Mitta ja integraali, talvi 2016
Hytönen / Hänninen
3. laskuharjoitukset (käsitellään ke 3.2. ja pe 5.2.)

Oletetaan seuraavat tulokset, jotka perustellaan myöhemmin kurssilla:

Lause 1 (Lebesguen mitan olemassaolo). *On olemassa reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ σ-algebra $\mathfrak{M}$ ja mitta $m : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$, joilla pätee:*

1. *$\mathfrak{M}$ sisältää kaikki $\mathbb{R}$:n osavälit.*
2. *$m(I) = \ell(I)$ on välin I tavallinen pituus kaikilla väleillä ?.*

Lause 2 (Riemannin integraali on erikoistapaus Lebesguen integraalista). *Olkoon $I = [a, b]$ suljettu $\mathbb{R}$:n osaväli. Jos $f : I \to [0, \infty)$ on integroituva Riemannin mielessä (mukaan lukien epäoleellinen Riemannin integraali), niin se on integroituva Lebesguen mielessä, ja pätee*

$$(R) \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = (L) \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}m,$$

missä vasemmalla puolella on Riemannin integraali ja oikealla Lebesguen integraali lauseessa 1 esiintyvän mitan m (eli Lebesguen mitan) suhteen.

Huomautus 1. Myös Lebesguen integraalissa saa merkitä integroimismuuttujan näkyviin:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}m = \int_\Omega f(x) \,\mathrm{d}m(x).$$

Tämä on erityisesti kätevää, jos funktio f on annettuna konkreettisena x:n lausekkeena.

1. Laske
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt[3]{x}}{1 + nx} \,\mathrm{d}x.$$
2. Laske
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n \log\Big(1 + \frac{x^5}{n}\Big) \,\mathrm{d}x.$$
3. Olkoot $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia funktioita. Todista, että niiden tulo fg on myös mitallinen. Vihje: Perustele luennolla esitetty kaava
$$\{fg > \alpha\} = \bigcup_{\beta\in\mathbb{Q}_+} \{f > \beta\} \cap \{g > \frac{\alpha}{\beta}\}, \qquad \forall\alpha > 0.$$
4. Olkoot E_j erillisiä mitallisia joukkoja, joilla $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$. Olkoon kullakin j annettu funktio $f_j : E_j \to \mathbb{R}$, joka on mitallinen E_j:llä, ts. $\{x \in E_j : f_j(x) > \alpha\}$ on mitallinen joukko kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Osoita, että asettamalla $f(x) := f_j(x)$ kun $x \in E_j$, saadaan koko avaruudella Ω määritelty mitallinen funktio.
5. Olkoon $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ mitta-avaruus, jossa kaikki nollamittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia: Jos $E \subset F \in \mathscr{F}$ ja $\mu(F) = 0$, niin myös $E \in \mathscr{F}$. Totea, että tällöin myös $\mu(E) = 0$. Olkoon $N \subset \Omega$ nollamittainen (ts. $\mu(N) = 0$) ja olkoon $g : N^c \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funktio, joka yhtyy g:hen N^c:lla, ts. $f(x) = g(x)$ kun $x \in N^c$. Osoita, että f on välttämättä mitallinen koko Ω:lla, vaikka emme tiedä mitään sen arvoista joukolla N.

6. Olkoon μ mitta ja $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen funktio, jolla $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Osoita, että mitalla

$$\phi(E) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_\Omega 1_E f \, \mathrm{d}\mu$$

on seuraava jatkuvuusominaisuus: kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $\mu(E) < \delta$, niin $\phi(E) < \varepsilon$. Vihje: voit edetä esim. seuraavasti:

(a) Vastaoletuksesta seuraa (miksi?), että jollakin $\varepsilon > 0$ on olemassa joukot $E_1, E_2, \ldots$, joilla $\mu(E_n) < 2^{-n}$, mutta $\phi(E) \geq \varepsilon$.

(b) Olkoon $F_n := \bigcup_{k \geq n} E_k$. Tämä on ... (millainen?) jono. Arvioi tämän μ- ja ϕ-mittoja.

(c) Havaitse, että $\mu(\bigcap_{n \geq 1} F_n) = 0$. (Miksi?)

(d) Päättele, että $\phi(F_n) = \lim_{j \to \infty} \phi(F_n \setminus F_j)$.

(e) Päättele, että on olemassa jono $n_1 < n_2 < \ldots$, jolla $\phi(F_{n_k} \setminus F_{n_{k+1}}) \geq \frac{1}{2}\phi(F_{n_k})$.

(f) Huomaa, että joukot $G_k := F_{n_k} \setminus F_{n_{k+1}}$ ovat erillisiä. Mitä voit sanoa niiden ϕ-mitoista, ja miten tämä johtaa ristiriitaan?