Mitta ja integraali, talvi 2016
Hytönen / Hänninen
2. laskuharjoitukset (käsitellään ke 27.1. ja pe 29.1.)

Tehtävät eivät välttämättä ole vaikeusjärjestyksessä. Osa vastauksista löytyy varmasti kirjallisuudesta, mutta jos prujaat, varmista silti että ymmärrät (ja osaat esittää asian toisille uskottavasti).

1. Olkoot A_n, $n = 1, 2, \ldots$ mitallisia joukkoja, mutta ei välttämättä erillisiä. Osoita, että
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2. Osoita, että joukolla $\Omega = \mathbb{Q}$ ei ole olemassa mittaa $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$, joka toteuttaa seuraavat ominaisuudet:

   (a) $\mathscr{F}$ on σ-algebra, joka sisältää kaikki rationaalivälit $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, missä $a, b \in \mathbb{Q}$ ja $a < b$.

   (b) $\mu((a, b] \cap \mathbb{Q}) = b - a$ kaikilla tällaisilla $a < b$.

   (Vihje: Vastaoletus. Laske sopiva mitta kahdella eri tavalla ja päädy ristiriitaan.) Myöhemmin kurssilla rakennetaan Lebesguen mitta, joka osoittaa, että homma toimii, jos yllä $\mathbb{Q}$:n tilalla on $\mathbb{R}$.

3. Todista luennoilla sivuutettu tulos: Jos $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ on laskeva jono mitallisia joukkoja ja $\mu(A_1) < \infty$, niin
$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
   (Vihje: Muunnelma yhdisteitä koskevasta vastaavasta tuloksesta.)

4. Osoita, että mitan määritelmässä ehto $\mu(\varnothing) = 0$ voidaan lieventää muotoon: on olemassa ainakin yksi mitallinen joukko A, jolla $\mu(A) < \infty$, ts. tästä ja täysadditiivisuudesta jo seuraa, että $\mu(\varnothing) = 0$.

5. Olkoot A_n, $n = 1, 2, \ldots$ mitallisia joukkoja. Olkoon
$$A := \{x \in \Omega : x \text{ kuuluu äärettömän moneen joukkoon } A_n\}.$$

   (a) Esitä joukko A joukkojen A_n ja tavallisten joukko-operaatioiden (yhdiste, leikkaus, komplementti) avulla.

   (b) Jos lisäksi pätee $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, osoita että $\mu(A) = 0$. (Vihje: tehtävien 1 ja 3 tuloksista voi olla iloa.)

6. Olkoon $\Omega = \mathbb{Z}_+ := \{1, 2, \ldots\}$, olkoon $\mathscr{F}$ sen kaIkkien osajoukkojen kokoelma, ja olkoon μ ns. pistelaskurimitta, eli $\mu(A) =$ joukon A alkioiden lukumäärä.

   (a) Toteta, että jokainen funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty]$ on mitallinen.

   (b) Osoita integraalin määritelmästä, että $\int_{\mathbb{Z}_+} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.