Mitta ja integraali, talvi 2016
Hytönen / Hänninen
1. laskuharjoitukset

Ensimmäinen tehtäväsarja harjoittaa kurssilla tuiki tärkeitä joukkomanipulaatioita. Näistä ei tule pisteitä, vaan kyseessä on eräänlainen esitietoharjoitus. Osallistu laskuharjoituksiin erityisesti, jos nämä tuntuvat vaikeilta.

Lue lisäksi Holopaisen monisteen luku 0.

1. Osoita, että jokainen avoin väli (a, b) voidaan esittää suljettujen välien $[a', b']$ yhdisteenä.

2. Osoita, että suljettua väliä $[a, b]$ ei void esittää avointen välien (a', b') yhdisteenä.

3. Reaalilukujen osajoukkoa A sanotaan *avoimeksi*, jos jokaisella pisteellä $x \in A$ on olemassa jokin $r > 0$, siten että $(x - r, x + r) \subset A$. Osoita, että yhtäpitävä avoimuuden määritelmä saadaan, jos vaaditaan, että jokaisella $x \in A$ on olemassa jokin avoin väli $J = (a, b)$, siten että $x \in J \subset A$. (Mutta J:n ei siis vaadita olevan x-keskinen eli muotoa $(x - r, x + r)$, kuten alkuperäisessä määritelmässä.)

4. Osoita:

   (a) Jokainen avoin joukko voidaan esittää avointen välien yhdisteenä.

   (b) Sama onnistuu, vaikka käytettäisiin pelkästään sellaisia välejä (a, b), joiden päätepisteet a ja b ovat rationaalilukuja.

5. Reaaliakselin puoliavointa väliä $[a, b)$ sanotaan *dyadiseksi*, jos $a = 2^{-j}k$ ja $b = 2^{-j}(k + 1)$ joillakin kokonaisluvuilla $j, k \in \mathbb{Z}$. Osoita:

   (a) Jokaisella dyadisella välillä I on olemassa täsmälleen yksi dyadinen väli $\hat{I}$, joka toteuttaa $I \subset \hat{I}$ ja $\ell(\hat{I}) = 2\ell(I)$, missä $\ell(I)$ tarkoittaa välin pituutta.

   (b) Dyadisia välejä on kaikkiaan numeroituva määrä.

6. Olkoon J avoin väli. Sanotaan, että dyadinen väli I on välin J *maksimaalinen dyadinen osaväli*, jos $I \subset J$ ja $\hat{I} \not\subset J$. Osoita, että J on maksimaalisten dyadisten osaväliensä erillinen yhdiste. (Siis kaksi asiaa: J on maksimaalisten dyadisten väliensä yhdiste, ja nämä dyadiset välit ovat keskenään erillisiä joukkoja eli eivät leikkaa toisiaan.)