Mitta ja Integraali [1]

Ilkka Holopainen ja Anssi Mirka[2]

September 16, 2015

[1]Perustuvat pääosin luentomonisteeseen *I. Holopainen, Mitta ja Integraali, 2004.*
[2]Ilmoita painovirheistä esim. sähköpostitse osoitteeseen `anssi.mirka@helsinki.fi`

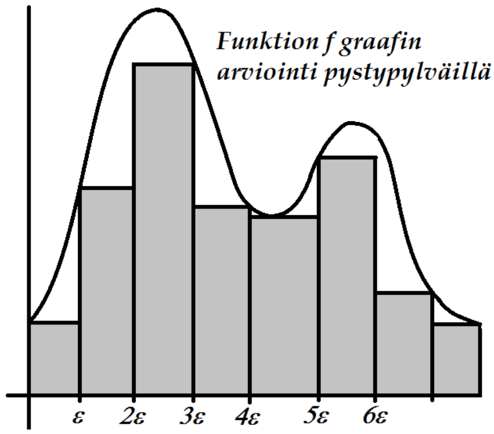
Contents

It would be so nice if something made sense for a change.

-Lewis Carroll, Alice in Wonderland

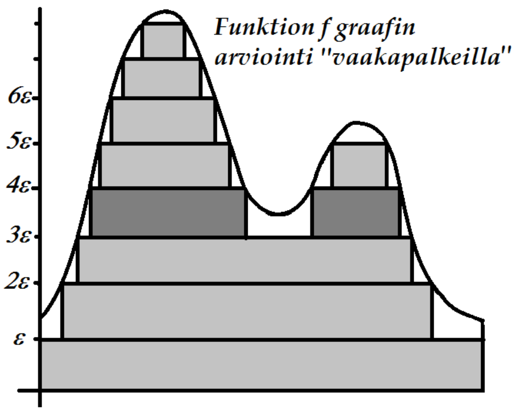
Esipuhe: Instrumentti nimeltä Integraali

Vuoteen 1904 asti integraali – tuo analyysin tehokkain työkalu taisteluparinsa derivaatan rinnalla – tarkoitti Riemann-integraalia. Sen idean voi tiivistää seuraavaan kuvaan:



Jokaisella pystypylväällä on luonnollinen pinta-ala (kanta kertaa korkeus). Riemann-integraalin tavoite on arvioida graafin ja x-akselin väliin jäävän alueen alaa (mikäli sellainen on) näiden pystypylväiden alojen summalla. Käytännön täsmällisessä tarkastelussa joutuu huolehtimaan matemaattisista yksityiskohdista, mutta idea on lopuksi äärimmäisen yksinkertainen.

Uusi innovaatio: Miksei vaakapalkkeja? Mitä jos yritämmekin seuraavaa: Sen sijaan, että "teemme jaon x-akselilla", kokeilemme jakaa pystyakselin ε-pituisiin väleihin, jotka integroitavan funktion graafin avulla määräävät vaaka"pylväikön" seuraavasti:



Huomaamme, että vaakapalkit eivät välttämättä ole yhtenäisiä vaan koostuvat useammasta "osapalkista". Kuvan funktio on muuten harhaanjohtavan kesy; käytännössä vaakapalkki saattaa osittua äärettömän moneen osaan. Törmäämme siis ensimmäiseen (ja lopulta ainoaan) haasteeseen: Miten määräämme alan mielivaltaisella "palkille"? Luonnollisesti haluaisimme edelleen soveltaa periaatetta "kanta kertaa korkeus", ja koska korkeus on ε, kysymys palautuu "kannan pituuden" määräämiseen.

Oletetaan, huvin vuoksi, että osaamme antaa pituuden $m(E)$ mille tahansa osajoukolle $E \subset \mathbb{R}$. Silloin osaamme antaa pinta-alan kaikille vaakapalkeille. Esimerkiksi kuvan tummemman "palkin" kanta voidaan ilmaista alkukuvana $f^{-1}[4\varepsilon, \infty)$ (pisteet, joissa funktion "f arvo ylittää riman 4ε").

Näin ollen tumman vaakapalkin alan pitäisi olla $m(f^{-1}[4\varepsilon,\infty))\varepsilon$.

Näin ollen osaamme määrätä jokaiselle vaakapalkille alan, joten voimme arvioida graafin ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa palkkien alojen summalla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(f^{-1}[n\varepsilon,\infty))\varepsilon. \tag{-1.1}$$

Lopuksi, kuten Riemann-integraalissa, haluamme päästää jakoparametrin ε nollaan. Itse asiassa summa (-1.1) onkin funktion $y \to m(f^{-1}[y,\infty))$ eräs Riemann-alasumma! Lisäksi huomaamme, että kyseessä on *laskeva* funktio, koska $[z,\infty) \supset [y,\infty)$ kun $z < y$. Muistamme, ehkä, aikaisemmilta kursseilta, että monotoniset funktiot ovat automaattisesti Riemann-integroituvia. Voimme siis todellakin päätellä[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(f^{-1}[n\varepsilon,\infty))\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\to} (R)\int_0^{\infty} m(f^{-1}[y,\infty))\,dy, \qquad \text{(R tarkoittaa Riemann-integraalia.)} \tag{-1.2}$$

Mitä oikeastaan olemme saaneet aikaiseksi? Vastaus: Uuden tavan integroida funktioita. Pohjimmainen periaate perustuu vaakapalkkeihin pystypalkkien sijasta, ja näin saatu uusi integraali voidaan laskea vanhan Riemann-integraalin avulla käyttäen kaavaa (-1.2).

Mitä sitten? Kuka haluaisi käyttää moista kaavaa? Motivaatio: Potentiaali ei ole kaavassa, tai ainakaan sen käytössä käytännön laskuissa, vaan yksinkertaisesti sen olemassaolossa. Se osoittaa, että "Vaakapalkki-prosessimme toimii ja tuottaa jotakin järkevää".

Olemme kuitenkin unohtaneet erään tärken seikan. Nimittäin joukkojen $f^{-1}[y,\infty)$ pituuksien määräämisen. Ilman niitä koko metodi ja myös integraalikaava (-1.2) on järjetön. Toisaalta tämä puute luo toivoa: mitä suuremmalle kokoelmalle joukkoja osaamme määrätä pituuden, sitä suurempaa luokkaa funktioita voimme uudella ideallamme integroida. Huomiomme keskittyy täten *mittaamisen ongelmaan*: jotta voisimme käyttää uutta metodiamme, meidän on opittava mittaamaan mahdollisimman monimutkaisia joukkoja. Meidän on luotava yleinen "mittateoria". Ja mitä tehokkaampi mittateoria, sitä yleisempi integrointiteoria.

On luultavasti liikaa toivottu (ja tämä aavistus osoittautuu oikeaksi), että voisimme antaa mielekkään mitan *kaikille* joukoille. "Mitallisten joukkojen perhe" on siis jokin aito osakokoelma $\mathbb{R}$:n osajoukkoja. Mutta heti kun olemme löytäneet (toivottavasti kattavan) kokoelman mitallisia joukkoja, voimmekin määritellä "integroitavan funktion" käsitteen: Integroitava funktio on sellainen, jonka alkukuville $f^{-1}[y,\infty)$ osaamme antaa mitan. Siispä kyseessä ovat *täsmälleen* ne funktiot, joilla *integroimisprosessi vaakapalkeilla menee läpi.*

Tällä esipuheella on kolme sanomaa. Ensimmäinen on idea integroinnista vaakapalkeilla. Toinen on mittateorian rooli integroinnissa; jotta uusi integrointi-ideamme voisi toimia, meidän on pakko tutkia mittauksen ongelmaa. Kolmas on väistämätön määritelmä funktiolle jota voi integroida; voimme soveltaa uutta metodiamme vain funktioihin, joilla alkukuvat $f^{-1}[y,\infty)$ ovat mitallisia.

Tässä vaiheessa on sopivaa paljastaa, että "vaakapalkki-integrointi" on nimen omaan Lebesgue-integrointia, ja integroitava funktio kulkee virallisesti nimellä mitallinen funktio. Kurssin tarkoitus on saattaa ylläoleva käsienheiluttelu täsmälliseen muotoon. Aivan ensimmäiseksi, kuten nyt lienee selvää, rakennamme (Lebesguen) mittateorian. Sen jälkeen konstruoimme Lebesgue-integraalin oleellisesti ylläesitetyllä menetelmällä (joskin matemaattinen määritelmä esiintyy hieman hämäävänä). Lopuksi demonstroimme teoriamme voimaa todistamalla tuloksia, joihin vanhanaikainen Riemann-integraali on auttamattoman riittämätön.

[1]Nämä matemaattiset yksityiskohdat ja argumentit eivät ole tärkeitä. Voit huoletta seurata tarinaa ideoiden tasolla.

0 Taustatietojen kertausta ja täydennystä

0.1 Käytännön joukko-oppia

Aivan aluksi on parasta hieman koota ja kerrata esitietoja. Hyvä perusrutiini helpottaa työtä myöhemmin ja auttaa keskittymään oleelliseen teorian rakennuksessa.

Olkoon X mikä tahansa joukko. Tällöin X:n *potenssijoukko* on

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subset X\}$$

ja X:*n joukkoperhe* (tai *perhe/kokoelma* X:*n osajoukkoja*) on mikä tahansa $\mathcal{P}(X)$:n osajoukko

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X).$$

Perheen $\mathcal{F}$ *yhdiste* on

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X \colon x \in A \ \underline{\text{jollakin}}\ A \in \mathcal{F}\}$$

ja *leikkaus* on

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x \in X \colon x \in A \ \underline{\text{kaikilla}}\ A \in \mathcal{F}\}.$$

Olkoon $\mathcal{A}$ jokin (indeksi)joukko ja oletetaan, että jokaista $\alpha \in \mathcal{A}$ vastaa yksikäsitteinen X:n osajoukko $V_\alpha \subset X$. (Toisin sanoen, $\alpha \mapsto V_\alpha$ on kuvaus $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$.) Tällöin kokoelma

$$\mathcal{F} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$$

on X:*n indeksöity joukkoperhe.*

Indeksöidyn perheen *yhdiste* on

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X \colon x \in V_\alpha \ \underline{\text{jollakin}}\ \alpha \in \mathcal{A}\}$$

ja vastaavasti *leikkaus* on

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \{x \in X \colon x \in V_\alpha \ \underline{\text{kaikilla}}\ \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Merkitsemme myös

$$\bigcup_{\alpha} V_\alpha \quad \text{ja} \quad \bigcap_{\alpha} V_\alpha, \quad \text{jos } \mathcal{A} \text{ käy selville asiayhteydestä.}$$

Esimerkki 0.2. 1. Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Voimme tulkita $\mathcal{F}$:n indeksöidyksi perheeksi käyttämällä $\mathcal{F}$:ää itseään indeksijoukkona. Toisin sanoen, jos $\alpha \in \mathcal{F}$ (jolloin α on X:n osajoukko), niin merkitään $V_\alpha = \alpha$. Tällöin $\mathcal{F} = \{V_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{F}\}$.

2.

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}, \qquad \{x\} = \text{ yksiö.}$$

Usein indeksijoukkona on $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, jolloin merkitään

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcup_{n}^{\infty} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcup_n V_n,$$

ja vastaavasti

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcap_{n}^{\infty} V_n \quad \text{tai} \quad \bigcap_n V_n.$$

Merkinnät (V_n), $(V_n)_{n=1}^{\infty}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ja $V_1, V_2, \ldots$ tarkoittavat (joukkojen) *jonoja*.
Joukkojen $A, B \subset X$ *erotus* on

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$

Joukon $B \subset X$ *komplementti* (X:n suhteen) on

$$B^c = X \setminus B.$$

Huomautus 0.3.

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Lause 0.4. *Olkoon* $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ *jokin* X*:n joukkoperhe. Tällöin pätee ns.* de Morganin lait*:*

$$\Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big)^c = \bigcap_\alpha V_\alpha^c \tag{0.5}$$

ja

$$\Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big)^c = \bigcup_\alpha V_\alpha^c. \tag{0.6}$$

Olkoon $B \subset X$*. Tällöin pätee ns.* distributiiviset lait yhdisteelle ja leikkaukselle*:*

$$B \cap \Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha (B \cap V_\alpha) \tag{0.7}$$

ja

$$B \cup \Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big) = \bigcap_\alpha (B \cup V_\alpha). \tag{0.8}$$

Tod. (0.5):

$$x \in \Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big)^c \iff x \notin \bigcup_\alpha V_\alpha \iff \forall\alpha : x \notin V_\alpha \iff \forall\alpha : x \in V_\alpha^c \iff x \in \bigcap_\alpha V_\alpha^c.$$

(0.6): Samoin.
(0.7):

$$x \in B \cap \Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big) \iff x \in B \text{ ja } x \in \bigcup_\alpha V_\alpha \iff x \in B \text{ ja } x \in V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A}$$

$$\iff x \in B \cap V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \iff x \in \bigcup_\alpha \big(B \cap V_\alpha\big).$$

(0.8): Samoin. □

Joukkoperheen yhdisteen/leikkauksen kuvat ja alkukuvat.

Olkoot X ja Y epätyhjiä joukkoja ja $f\colon X \to Y$ kuvaus.

Joukon $A \subset X$ *kuva* (kuvauksessa f) on

$$f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}. \quad (\subset Y)$$

Merkitään myös lyhyemmin fA.

Joukon $B \subset Y$ *alkukuva* (kuvauksessa f) on

$$f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}.$$

Merkitään myös $f^{-1}B$. Käytämme myös merkintää

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}),$$

kun $y \in Y$. [Huom.: f:llä ei tarvitse olla käänteiskuvausta.]

Lause 0.9. *Olkoon $f\colon X \to Y$, $\{V_\alpha\colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ X:n joukkoperhe ja $\{W_\beta\colon \beta \in \mathcal{B}\}$ Y:n joukkoperhe. Silloin*

$$f\Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha fV_\alpha \tag{0.10}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_\beta W_\beta\Big) = \bigcup_\beta f^{-1}W_\beta \tag{0.11}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcap_\beta W_\beta\Big) = \bigcap_\beta f^{-1}W_\beta. \tag{0.12}$$

Tod. (0.10):

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_\alpha V_\alpha\Big) &\iff y = f(x) \text{ ja } x \in \bigcup_\alpha V_\alpha \iff y = f(x) \text{ ja } x \in V_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \\ &\iff y \in fV_\alpha \text{ jollakin } \alpha \in \mathcal{A} \iff y \in \bigcup_\alpha fV_\alpha. \end{aligned}$$

(0.11) ja (0.12): Samoin. □

Huomautus 0.13. Aina pätee

$$f\Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big) \subset \bigcap_\alpha fV_\alpha,$$

mutta inkluusio voi olla aito. Yhtäsuuruus $f(\cap_\alpha V_\alpha) = \cap_\alpha fV_\alpha$ pätee esimerkiksi, jos f on injektio.

0.14 Numeroituvat ja ylinumeroituvat joukot.

Numeroituvuus on erittäin tärkeä mittateoriassa!

Määritelmä 0.15. Joukko A on *numeroituva*, jos $A = \emptyset$ tai $\exists$ injektio $f\colon A \to \mathbb{N}$ ($\iff$ $\exists$ surjektio $g\colon \mathbb{N} \to A$).

A on *ylinumeroituva*, jos A ei ole numeroituva.

Huomautus 0.16. 1. A numeroituva $\iff$ A äärellinen (mukaanluettuna $\emptyset$) tai *numeroituvasti ääretön* (jolloin $\exists$ bijektio $f\colon A \to \mathbb{N}$).

2. $A \neq \emptyset$ numeroituva $\iff$ $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ (toisto sallittu, joten A voi olla äärellinen).

3. A numeroituva, $B \subset A$ $\Rightarrow$ B numeroituva.

Lause 0.17. *Jos joukot A_n ovat numeroituvia $\forall n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ on numeroituva.}$$

(Eli "numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista on numeroituva".)

Tod. Voi olettaa $A_n \neq \emptyset\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. A_n numeroituva $\Rightarrow$ $A_n = \{x_m(n) \colon m \in \mathbb{N}\}$. Määritellään kuvaus

$$g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \cup_n A_n, \quad g(n,m) = x_m(n).$$

Silloin g on surjektio $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \cup_n A_n$. Riittää löytää surjektio $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, koska silloin

$$g \circ h\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

on surjektio ja siten $\cup_n A_n$ numeroituva. Esimerkki surjektiosta $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\underset{=h(1)}{(1,1)} & & \underset{=h(3)}{(1,2)} & & \underset{=h(6)}{(1,3)} & & \underset{=h(10)}{(1,4)} & & \underset{=h(15)}{(1,5)} & \cdots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
\underset{=h(2)}{(2,1)} & & \underset{=h(5)}{(2,2)} & & \underset{=h(9)}{(2,3)} & & \underset{=h(14)}{(2,4)} & & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & \\
\underset{=h(4)}{(3,1)} & & \underset{=h(8)}{(3,2)} & & \underset{=h(13)}{(3,3)} & & & & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
\underset{=h(7)}{(4,1)} & & \underset{=h(12)}{(4,2)} & & & & & & & \\
 & \nearrow & & & & & & & & \\
\underset{=h(11)}{(5,1)} & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

$\square$

Seuraus 0.18. Rationaalilukujen joukko

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$$

on numeroituva. Syy: Joukko

$$A_k = \{\frac{m}{n} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ |m| \leq k, |n| \leq k\}$$

on äärellinen (ja siten numeroituva) $\forall k \in \mathbb{N}$. Lause 0.17 $\Rightarrow$ $\mathbb{Q} = \cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ numeroituva. $\square$

Esimerkki 0.19. (Ylinumeroituva joukko). Väli $[0,1]$ (ja siten myös $\mathbb{R}$) on ylinumeroituva.

Idea: $x \in [0,1] \Rightarrow$ x:llä on desimaalikehitelmä

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

missä $a_j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Voimme siis tavallaan ajatella reaalilukuja lukujonoina! Tämä huomio tarjoaa näkökulman muutoksen, joka on soveltuu erinomaisesti numeroituvuustarkasteluihin.

Todistus: Tärkeä vaihe: Vastaoletus: $[0,1]$ numeroituva, jolloin $[0,1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pisteillä x_n on desimaalikehitelmät

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \ldots \\
x_2 &= 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \ldots \\
x_3 &= 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \ldots \\
&\vdots \\
x_n &= 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \ldots a_n^{(n)} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nyt idea – idea, joka on yksi matematiikan historian kuuluisimpia – on rakentaa *uusi desimaalikehitelmä joka ei esiinny ylläolevassa listassa.* Temppu tottelee nimeä Cantorin diagonaaliargumentti:

”Lävistäjällä” on lukujono $a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, a_3^{(3)}, \ldots, a_n^{(n)}, \ldots$, missä $a_n^{(n)}$ on x_n:n n:s desimaali. Jos valitsemme luvut b_n siten, että $b_n \neq a_n^{(n)}$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$, niin silloin $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, on desimaalikehitelmä, joka ei esiinny edellissä listassa! Tadaa! Uskomatonta. Todistimme juuri, että kokonaislukujonoja – ja täten desimaalikehitelmiä – on ylinumeroituvan monta. Alkuperäistä väitettä varten meidän pitää vielä tarkistaa yksi pieni asia, jolla ei ole mitään syvällistä annettavaa tulokselle. Korostamme, että ylivoimaisesti tärkein ydinargumentti on jo esiintynyt.

Vähemmän tärkeä vaihe: Desimaalikehitelmä ei ole yksikäsitteinen! [Esim. $0,5999\ldots = 0,6000\ldots$ (nähdään esim. geometrisen sarjan avulla).] Meidän on siis varmistettava, että tämän uuden desimaalikehitelmän määräämä reaaliluku, $x := 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, ei vastaa mitään reaalilukua ylläolevassa listassa $[0,1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Tämä onnistuu helposti, kunhan huomaa, että kaksi desimaalikehitelmää, $0, c_1 c_2 \ldots$ ja $0, d_1 d_2 \ldots$ määrittelevät eri reaaliluvut jos $2 < |c_n - d_n| < 9$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$. (Vakuuta itsesi tutkimalla esimerkkijonoa.) Saadaksemme konkreettisen esimerkin, voimme valita vaikka seuraavasti:

Määritellään luku $x \in [0,1]$ asettamalla $x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, missä

$$b_n = \begin{cases} a_n^{(n)} + 2, & \text{jos } a_n^{(n)} \in \{0,1,2,\ldots,7\}, \\ a_n^{(n)} - 2, & \text{jos } a_n^{(n)} \in \{8,9\}. \end{cases} \tag{0.20}$$

Luvun x n:s desimaali toteuttaa $|b_n - a_n^n| = 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, joten $x \neq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Tämä on ristiriita, sillä $[0,1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Siis $[0,1]$ on ylinumeroituva.

[*Huomio 1:* Toistamme, että todistuksen ylivoimaisesti tärkein vaihe on alkuosan diagonaaliargumentti. Loppuosan yksikäsitteisyystarkastelut ovat sen rinnalla melkein häiritseviä. Älä välitä, jos ne eivät kiinnosta; tosin on hyvä tietää mistä on kysymys.

Huomio 2: Sama diagonaaliargumentti pätee mille tahansa numeroituvalle listalle lukujonoja. Mainitsemme erikseen tämän tärkeän sivuosuman: kokonaislukujonojen joukko on ylinumeroituva.]

Sopimus. Jatkon kannalta on kätevää ottaa "∞" mukaan laskutoimituksiin seuraavilla konventioilla:

$$\begin{aligned} a+\infty=\infty+a&=\infty, \qquad a\neq-\infty \\ a-\infty=-\infty+a&=-\infty, \qquad a\neq\infty \\ \infty-\infty, \quad -\infty+\infty &\quad \text{ei määr.} \\ -(\infty)=-\infty, &\qquad -(-\infty)=\infty \end{aligned}$$

$$\infty\cdot a=a\cdot\infty=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\\ 0, & a=0\end{cases} \qquad \text{Huom! } 0\cdot\infty=0$$

$$(-\infty)a=a(-\infty)=\begin{cases}-\infty, & a>0\\ +\infty, & a<0\\ 0, & a=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\infty\cdot\infty=(-\infty)(-\infty)&=\infty\\ (-\infty)\infty=\infty(-\infty)&=-\infty\end{aligned}$$

$$\frac{a}{0}=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\\ \text{ei määr.}\ , & a=0\end{cases}$$

$$\frac{a}{\infty}=\frac{a}{-\infty}=0, \quad a\in\mathbb{R}$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \text{ei määr.}$$

Motivaatio: Käytännössä $\pm\infty$ "tarkoittaa" aina jotakin raja-arvo prosessia: $\pm\infty=\lim_{k\to\infty}y_k$. Kyseisiä raja-arvoja tulee vastaan esimerkiksi "mitattaessa" äärettömän suuria joukkoja. Kun tämän pitää mielessä, on helppo päätellä oikeat sopimukset: esim. "$a\pm\infty=a\pm\lim_{k\to\infty}y_k=\lim_{k\to\infty}a\pm y_k=\pm\infty$".

Varoitus: Sopimusta $0\cdot\infty=0$ ei voi käyttää raja-arvojen $\lim_{k\to\infty}x_ky_k$ laskemisessa tapauksissa joissa *myös* "nolla korvataan raja-arvolla": $0=\lim_{k\to\infty}x_k$, $\infty=\lim_{k\to\infty}y_k$. Toisin sanoen, ei saa "päätellä", että $\lim_{k\to\infty}x_ky_k=(\lim_{k\to\infty}x_k)(\lim_{k\to\infty}y_k)=0\cdot\infty=0$. [2]

0.21 Summeerausteoriaa

Muistutus: Jos $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on jono s.e. $a_j\geq0\ \forall\ j$, niin joko

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}a_j\in\mathbb{R} \quad \text{tai} \quad \sum_{j=1}^{\infty}a_j=+\infty.$$

[2] Miksei? Kokeile valita $x_k:=1/k$ ja $y_k:=k$.

Eli ”positiivisten termien ääretön summa on aina olemassa”, joko reaalilukuna tai äärettömänä. Syy: osasummat $\sum_{j=1}^{k} a_j$ muodostavat kasvavan jonon.

On hyödyllistä esitellä uusi lähestymistapa positiivistermisten ”sarjojen” summaukseen: Olkoon $I \neq \emptyset$ mielivaltainen (mahdollisesti ylinumeroituva) indeksijoukko ja $a_i \geq 0 \ \forall\, i \in I$. Kysymys: Mitä tarkoittaa

$$\sum_{\alpha \in I} a_i ?$$

Vastaamme omaan kysymykseemme: Ensin, jos $J \subset I$ on äärellinen, niin merkitään

$$S_J = \sum_{i \in J} a_i\,, \qquad S_\emptyset = 0.$$

Määritelmä 0.22.

$$\sum_{i \in I} a_i := \sup\{S_J \colon J \subset I \text{ äärellinen}\}.$$

On hyvä tarkistaa, että uusi määritelmä on yhteensopiva vanhan kanssa, kun indeksijoukko on $\mathbb{N}$:

Lemma 0.23.

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

eli ”uusi” määritelmä yhtäpitävä aiemman (Diff.I) kanssa.

Tod. Merkitään $J_n = \{1, \ldots, n\}$, $\quad S = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \quad (= \sup\{S_J \colon J \subset \mathbb{N} \text{ äärellinen}\})$.

$$\begin{gathered} \left(S_{J_n}\right) \quad \text{nouseva jono} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n \to \infty} S_{J_n} = S' \\ S_{J_n} \leq S \quad \Rightarrow \quad S' \leq S. \end{gathered}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} J \subset \mathbb{N} \text{ äärellinen} \quad &\Rightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{ s.e. } \ J \subset J_n \\ &\Rightarrow \quad S_J \leq S_{J_n} \leq S' \\ &\Rightarrow \quad S \leq S' \quad (\text{ottamalla sup yli } \forall\, J). \end{aligned}$$

□

Seuraavassa sekä I että J ovat mielivaltaisia indeksijoukkoja. (Lisäksi merkitään lyhyemmin $a_{ij} = a_{(i,j)}$.)

Lemma 0.24.

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

Tod. Merkitään S_{vas} = vasemman puoleisin summa, S_{kes} = keskimmäinen summa, ja S_{oik} = oikean puoleisin summa.

(a): Jos $\mathcal{A} \subset I \times J$ on äärellinen, niin $\exists$ äärelliset $I' \subset I$, $J' \subset J$ s.e. $\mathcal{A} \subset I' \times J'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad S_{\mathcal{A}} \leq S_{I' \times J'} &\overset{(*)}{=} \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'} a_{ij} \leq \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J} a_{ij} \leq S_{\text{kes}} \\ \Rightarrow \quad S_{\text{vas}} &\leq S_{\text{kes}} \quad (\text{ottamalla sup yli } \forall\, \mathcal{A}). \end{aligned}$$

[(∗): summassa $S_{I'\times J'}$ äärellisen monta termiä, joten voidaan summata missä järjestyksessä tahansa.]
(b): Olkoon $I' \subset I$ äärellinen ja $J_i' \subset J$ äärellinen $\forall\ i \in I'$. Merkitään

$$\mathcal{A} = \{(i,j)\colon i \in I', j \in J_i'\}.$$

Silloin

$$S_{\text{vas}} \geq S_{\mathcal{A}} = \sum_{i\in I'} \sum_{j\in J_i'} a_{ij}.$$

Otetaan ($\forall\ i \in I'$) sup yli äärellisten $J_i' \subset J$

$$S_{\text{vas}} \geq \sum_{i\in I'} \sum_{j\in J} a_{ij}$$

$$\text{sup yli äärellisten } I' \subset I \quad \Rightarrow \quad S_{\text{vas}} \geq S_{\text{kes}}.$$

Samoin $S_{\text{vas}} = S_{\text{oik}}$. □

Korollari 0.25.

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij}\,.$$

0.26 Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{n \text{ kpl}} \quad \text{karteesinen tulo}$$

Alkoita kutsutaan *pisteiksi* tai *vektoreiksi*.

$$x \in \mathbb{R}^n \iff x = (x_1,\dots,x_n),\ x_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\dots,n.$$

Algebrallinen rakenne.
Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *summa* on

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_x) \in \mathbb{R}^n.$$

Reaaliluvun $\lambda \in \mathbb{R}$ ja pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ *tulo* on

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nollavektori

$$0 = \bar{0} = (0,\dots,0).$$

Pisteen $x \in \mathbb{R}^n$ *vastavektori* (vastinpiste)

$$-x = (-1)x = (-x_1,\dots,-x_n).$$

Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *erotus* on

$$x - y = x + (-y).$$

$\mathbb{R}^n$:ssä summa ja reaaliluvulla kertominen toteuttavat *vektoriavaruuden* ehdot (Lin.alg.I), esim.

$$x + y = y + x, \quad x + 0 = 0 + x = x,$$
$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \quad \text{jne}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *sisätulo* on

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i \right)^{1/2} \qquad x\text{:n } \textit{normi}.$$

Euklidinen etäisyys $\mathbb{R}^n$:ssä.
Pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ *etäisyys* on

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Usein merktään $d(x, y) = |x - y|$. Tällöin d on *metriikka* $\mathbb{R}^n$:ssä, ts. kuvaus $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toteuttaa (metriikan) ehdot:

$$\begin{aligned}
&d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\
&d(x, y) = 0 \iff x = y \\
&d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\
&d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad \text{(kolmioepäyht., } \triangle\text{-ey).}
\end{aligned}$$

Avoimet ja suljetut joukot $\mathbb{R}^n$:ssä. (Vektorianalyysi, Topo I)
Euklidinen metriikka d määrää $\mathbb{R}^n$:ään avoimet ja suljetut joukot (ja siten $\mathbb{R}^n$:n topologian) seuraavasti:
Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

on *avoin* (x-keskinen, r-säteinen) *kuula* (engl. "ball") ja

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$$

on (x-keskinen, r-säteinen) *pallo* (tai *pallokuori*) (engl. "sphere"). Vastaavasti

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}$$

on *suljettu* (x-keskinen, r-säteinen) *kuula*.
Joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ on *avoin*, jos $\forall x \in V\ \exists\ r = r(x) > 0$ s.e. $B(x, r) \subset V$.
Joukko $V \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos $\mathbb{R}^n \setminus V$ on avoin.

Esimerkki 0.27.

1. $B(x, r)$ on avoin $\forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ ($\triangle$-ey, ks. yo. kuva).
2. Suljettu kuula $\bar{B}(x, r)$ on suljettu joukko.
3. $\mathbb{R}^n$ ja $\emptyset$ ovat sekä avoimia että suljettuja.
4. Puoliavoin väli, esim. $[0, 1)$, ei ole avoin eikä suljettu.

Huomautus 0.28. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *sulkeuma* on

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x \in A \text{ tai } x \text{ on } A\text{:n kasautumispiste}\}.$$

Piste $x \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ kasautumispiste, jos $\forall r > 0$ $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. $\mathbb{R}^n$:ssä pätee $\bar{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$.

Varoitus. Joskus kuulaa $B(x,r)$ kutsutaan myös palloksi, jolloin $S(x,r)$:ää on kutsuttava pallokuoreksi.

Huomautus 0.29. Jos (X,d) on *metrinen avaruus*, ts. $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ toteuttaa metriikan ehdot, niin voidaan määritellä X:n avoimet ja suljetut joukot (metriikan d suhteen) kuten edellä korvaamalla $|y - x|$ metriikalla $d(x,y)$.

Seuraava tulos pätee yleisesti:

Lause 0.30. *Olkoon $\mathcal{A}$ mikä tahansa indeksijoukko. Silloin*

$$V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ avoin;} \tag{0.31}$$

$$V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ suljettu } \forall \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \text{ suljettu;} \tag{0.32}$$

$$V_1, \ldots, V_k \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{k} V_j \text{ avoin;} \tag{0.33}$$

$$V_1, \ldots, V_k \subset \mathbb{R}^n \text{ suljettu} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k} V_j \text{ suljettu.} \tag{0.34}$$

Tod. (Topo I) (0.31):

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in \mathcal{A} \text{ s.e. } x \in V_{\alpha_0},$$
$$V_{\alpha_0} \text{ avoin } \Rightarrow \exists \text{ avoin kuula } B(x,r) \subset V_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

(0.32):

$$\begin{aligned} V_\alpha \quad \text{suljettu } \forall\ \alpha \ &\Rightarrow\ V_\alpha^c \quad \text{avoin } \forall\ \alpha \\ \overset{(0.31)}{\Longrightarrow} \quad \bigcup_\alpha V_\alpha^c \ &\overset{\text{de Morg.}}{=}\ \Big(\bigcap_\alpha V_\alpha\Big)^c \quad \text{avoin} \\ &\Rightarrow\ \bigcap_\alpha V_\alpha \quad \text{suljettu.} \end{aligned}$$

(0.33) ja (0.34): (HT). □

Huomautus 0.35.

$$V_j \text{ avoin } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ avoin,}$$
$$V_j \text{ suljettu } \forall j \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \text{ suljettu.} \quad \text{(HT)}$$

1 Lebesguen mitta $\mathbb{R}^n$:ssä

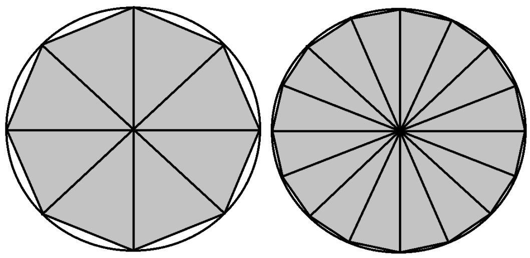
1.1 Mittauksen filosofiaa

Miksi ympyrällä on pinta-ala? Siksikö, että voimme laskea integraalin

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi?$$

Ei. Integraalikaava vain kertoo, mikä kyseinen ala luultavasti on mikäli se on olemassa. Mutta onko se olemassa? Tai paremminkin, miksi on mielekästä kutsua jotakin reaalilukua ympyrän "alaksi"? Senkö vuoksi, että jokin integraali sattuu tuottamaan sen tulokseksi? Ei tyydytä.

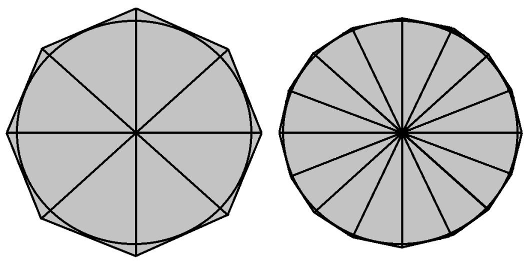
Lähempänä hyväksyttävää vastausta on toinen, alkeellisempi, metodi määrittää ympyrän pinta-ala: piirtämällä sen sisään monikulmioita.



Kun sisämonikulmioon "lisää kulmia" se näyttäisi "lähestyvän ympyrää". Samalla sen ala lähestyy piitä [3]. Täten tekisi mieli sanoa, että ympyrällä on pinta-ala, pii. Mutta nojaammeko me liikaa visioomme siitä, että "monikulmio lähestyy ympyrää"? Lähestyykö se oikeasti?

Tarkkaan ottaen sisämonikulmio perustelu osoitti, että *jos* ympyrällä on ala, se on *vähintään* pii. Tämä argumentti perustuu vaatimukseemme pinta-alan "monotonisuudesta": emme pidä mielekkäänä käsitettä, jossa suuremmalla joukolla voi olla pienempi ala.

Joten eikö meidän kannatakin arvioida ympyrää myös ulkoa päin:



Identtinen päättely ulkomonikulmioilla kertoo meille, että *jos* ympyrällä on pinta-ala, niin se on *korkeintaan* ulkoarvioiden alaraja, pii. Mutta tämä on sama kuin sisäarvioiden raja-arvo!

Eli mitä voimme sanoa? Ainakin, että *ainoa* luku joka mahdollisesti käy ympyrän mielekkääksi pinta-alaksi on tuo yhteinen raja, pii. Mutta älä keskity itse lukuun vaan pikemminkin sen *olemassaoloon*; siihen, että raja-arvot ovat yhtenevät. Eikö tuo arvioiden täsmääminen nimenomaan

[3] Miksi monikulmiolla on pinta-ala? Se koostuu äärellisen monesta erillisestä kolmioista, joten jos kolmioilla on mielekäs "ala", niin silloin luontevaa sanoa, että alojen summa on monikulmion ala. Kolmioiden ala puolestaan on olemassa, sillä on helppo perustella, että se on puolet erään nelikulmion alasta. Ja nelikulmioilla yksinkertaisesti on ala, eikö olekin?

tarjoa hyvän perustelun koko pinta-alan olemassaololle? Eikö juuri se oikeuta meidät kutsumaan piitä ympyrän pinta-alaksi?

Valinta on sinun

Pinta-ala/tilavuus/pituus ei ole ennalta annettu totuus. Matematiikka ei tarjoa tyhjästä vastauksia kysymyksiin "onko ympyrällä pinta-ala" tai "onko $\mathbb{Q}$:lla pituus?" Ei edes peruskysymykseen "mikä on neliön pinta-ala"? Meidän on itse tehtävä aloite. Jos olemme sitä mieltä, että edes neliölle ei löydy sopivaa reaalilukua jota sopisi kutsua sen "alaksi", niin matematiikalla ei ole valintaamme vastaansanomista. Mutta, jos ensin katsomme sopivaksi määrätä neliöiden $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ aloiksi $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$, ja sen jälkeen vielä hyväksymme jonkin yleisen pelisäännön kuten: "jos kahdella erillisellä joukolla on alat A ja B niin silloin niiden yhdisteellä on myös ala, $A + B$ ", niin tämän jälkeen matematiikka ja logiikka väistämättä sanoo, että monilla muillakin joukoilla on pinta-ala. Jos intuitiomme vielä lisäksi kannustaa meitä lisäämään pelisääntöihin esimerkiksi ympyrän tapauksessa ehdotetun "kuristusperiaatteen", niin silloin meidän on loogista hyväksyä myös ympyrän pinta-alan olemassaolo.

Tämän kappaleen ei ole tarkoitus ohjata valitsemaan tiettyjä pelisääntöjä, vaan auttaa ymmärtämään, että me itse saamme määrätä ne; juuri niinkuin oma intuitiomme (tai seikkailunhalumme) sanelee. Matematiikka vain ohjaa meitä laskuissa, kuten ympyrän sisä- ja ulkoarvioiden selvittämisessä.

Jos olet tottunut käyttämään Riemann-integraalia, olet jo hyväksynyt erään muodon kuristusperiaatteesta: funktio on *määritelmän* mukaan integroituva, jos sen yläintegraali (infimum yläsummista) ja alaintegraali (supremum alasummista) ovat samat. Visuaalisesti tämä tarkoittaa graafin ja x-akselin väliin jäävän alueen ulko- ja sisäapproksimaatioita hyvin erityisillä monikulmioilla: äärellisillä pylväsyhdistelmillä. Eli, kyseessä on täsmälleen sama kuristusperiaate kuin ympyrän tapauksessa.

Viimeiseksi kysymys toiseen suuntaan: Mitä jos olisi käynyt ilmi, että ympyrän tapauksessa arviot eriävät: ulkoarvio > sisäarvio? Uskaltaisitko sanoa, että ympyrällä on ala? Tai mitä jos Riemann-integraalin tapauksessa yläintegraali > alaintegraali? Virallisen määritelmän mukaan funktio *ei* tällöin ole integroituva. Mutta mitä jos arvioinneissamme onkin parannettavaa? Mitä jos olemme rohkeampia ja hyväksymme uusia pelisääntöjä?

Äärellisen tuolle puolen

Usko tai älä, mutta ympyräesimerkki sisältää jo koko mittateorian perusidean. Periaatteessa tällä kurssilla ei käytetä mitään monimutkaisempaa strategiaa. Ainoa pieni muutos on kuristusperiaatteen laajennus. Vaikka käytännön seuraukset ovat valtavat, vanha periaate pysyy samana.

Kuten olemme nähneet (ympyrässä ja Riemann-integraalissa), kuristusperiaate on kriittinen askel uusien "mitallisten" joukkojen löytämiseen. Esitetyt kuristukset ovat toistaiseksi olleet varovaisen yksinkertaista muotoa. Ympyrän tapauksessa esiintyi äärellisiä yhdisteitä kolmioista, ja Riemann-integraalissa äärellisiä pylväskokoelmia. Äärellistä ja äärellistä... Miksemme käyttäisi kuristukseen monimutkaisempia apujoukkoja, kunhan pidämme huolen, että arviot varmasti "pysyvät intuition oikealla puolella"?

Erityisesti, miksemme käyttäisi *numeroituvia* kokoelmia yksinkertaisia joukkoa, kuten välejä, neliöitä ja kuutioita? Jos esimerkiksi $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ on jono *erillisiä* välejä, niin eikö ole luonnollista antaa niiden yhdisteelle "mitaksi"

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \in [0, \infty]?$$

Oletan, että sanot kyllä. Tämän jälkeen näitä uusia "mitallisia" joukkoja voi puolestaan käyttää muiden joukkojen arvioimiseen. Näin konstruoitu ”laajennettu kuristusperiaate” on merkittävästi tehokkaampi, kuten kurssi tulee tekemään selväksi.

Entäs jos Riemann-integraalissa antaa luvan käyttää *numeroituvia* pylväs-yhdistelmiä? Sopivasti tulkittuna, vaikkei sitä kurssilla osoitetakaan, näin päätyy itse asiassa suoraan Lebesgue-integraaliin. Ei kuitenkaan mennä asioiden edelle; sitä paitsi tällä kurssilla lähestymme Lebesgue-integraalia eri suunnasta (muista esipuhe). Tarkoitus on vain korostaa, että Lebesgue-integraali ei tietyssä mielessä eroa paljoa esi-isästään.

Joten siinä se suuri moderni mullistus: Laajennetaan kuristusperiaatetta sallimalla ”numeroituvat monikulmiot”. Loppu on matemaattista pyöritystä. Yksityiskohdat tarjoavat haastetta, mutta pohjimmainen idea on idioottimaisen yksinkertainen.

1.2 Lebesguen ulkomitta $\mathbb{R}^n$:ssä

Lähtökohta: N-välit ja Geometrinen mitta

Lähtökohtamme on hyvin minimaalinen. Ainoat asiat jotka otamme intuition pohjalta ”mitallisiksi” ovat ”n-ulotteiset kuutiot”. Ensin yhdessä ulottuvuudessa: jos $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu väli, niin sen pituus on

$$\ell(I) = b - a.$$

Samoin jos I avoin tai puoliavoin. Vastaavasti korkeammissa ulottuvuuksissa kutsumme joukkoa $I \subset \mathbb{R}^n$ *n-väliksi*, jos se on muotoa

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n,$$

missä kukin $I_j \subset \mathbb{R}$ on väli (joko avoin, suljettu tai puoliavoin).

I on avoin (vastaavasti suljettu) n-väli, jos jokainen I_j on avoin (vastaavasti suljettu).

Olkoot I_j:n päätepisteet a_j, b_j; $a_j < b_j$. Silloin I:n *geometrinen mitta* on

$$\ell(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

($n = 1$ pituus, $n = 2$ pinta-ala, $n = 3$ tilavuus). Merkitään $\ell(\emptyset) = 0$.

Arviointi ulkoa: Lebesguen peite ja Ulkomitta

Olemme luoneet perustan: rakennuspalikoina toimivat n-välit, ja mittana geometrinen mitta. Näiden avulla voimme muotoilla tavan approksimoida mitä tahansa joukkoa ulkoa.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Arviointia varten haluamme peittää A:n joukolla, jonka ”tiedämme olevan mitallinen” (tai vähintään sellaisella, jonka mitalle osaamme sanoa ylärajan). Tarkastellaan *A:n numeroituvia avoimia peitteitä.* Olkoon perhe

$$\mathcal{F} = \{I_1, I_2, \ldots\},$$

numeroituva (mahdollisesti siis äärellinen) kokoelma avoimia n-välejä siten, että perheen joukkojen yhdiste peittää joukon A:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Tällöin sanomme, että $\mathcal{F}$ on A:n *Lebesguen peite*. (Oikeastaan välien avoimuus ei ole oleellista. Myöhemmin osoitetaan, että myös suljetut n-välit kelpaavat.)

Koska peitteen $\mathcal{F}$ alkiot peittävät joukon A, voimme arvioida A:n *mahdollista* mittaa peitteen n-välien geometristen mittojen avulla. Voisimme määritellä järkevän mitan myös itse yhdisteelle $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ja käyttää sitä ylärajana, mutta valitsemme pienen oikotien: koska peitteen alkioilla on mahdollisesti jopa päällekäisyyksiä, on turvallista "olettaa", että n-välien geometristen mittojen summa

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k), \quad 0 \le S(\mathcal{F}) \le +\infty,$$

tarjoaa yläarvion joukon A "mitalle".

Samoin jokainen joukon A Lebesguen peite tarjoaa jonkin yläarvion. Siten myös yläarvioiden infimum on yläarvio. Näin ollen pääsemme muotoilemaan ulkomitan käsitteen:

Määritelmä 1.3 (Ulkomitta)**.** Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *n-ulotteinen (Lebesguen) ulkomitta* on

$$\boxed{m_n^*(A) = \inf \{S(\mathcal{F})\colon\ \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\}.}$$

Matemaattisesti ulkomitan voi muotoilla ilman suurempia selityksiä, mutta taustalla on idea: *jos* osoittautuu, että joukolla A on mielekäs "mitta", on tuo mitta korkeintaan $m_n^*(A)$.

Huomautus 1.4.

1. Merkitään $J_k = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x_j| < k\ \forall j\}$ (avoin n-väli). Selvästi

   $$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,$$

   joten <u>aina on olemassa avoimia peitteitä</u> $\cup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A$ (ja inf on siten olemassa).

2. Ulkomitta $m_n(A)$ riippuu (tietenkin) dimensiosta n. Jos n on selvä asiayhteydestä, niin merkitsemme lyhyemmin $m^*(A) = m_n^*(A)$.

3. Suoraan määritelmästä seuraa: Jokaisella $\varepsilon > 0$ löytyy jokin A:n Lebesguen peite $\mathcal{F}$, siten, että

   $$S(\mathcal{F}) \le m^*(A) + \varepsilon.$$

   (Sallitaan $m^*(A) = +\infty$.) Infimumin määritelmä <u>ei</u> tarkoita, että (aina) olisi mahdollista löytää A:n Lebesguen peite $\mathcal{F}$, jolla $m_n^*(A) = S(\mathcal{F})$.

4. <u>Siis:</u> $A \mapsto m^*(A)$ on kuvaus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, erityisesti m^* on määritelty <u>koko</u> $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$:ssä. Eli riippumatta joukon A "mitallisuudesta", sen *mahdolliselle* mitalle voidaan aina antaa yläraja $m^*(A)$. Vertaa tilannetta Riemann-integraaliin: mille tahansa funktiolle, integroituva tai ei, voi määritellä *ylä*-integraalin.

Keskeytetään teorian rakennus hetkeksi, jotta saamme paremman tuntuman ulkomitasta. Esimerkki 1.6 tekee selväksi, että ulkomitta saattaa käyttäytyä varsin epäintuitiivisesti.

Esimerkki 1.5. Olkoon $n = 2$ ja olkoon $A = \{(x, 0)\colon a \le x \le b\} \subset \mathbb{R}^2$ (jana tasossa).
<u>Väite:</u> $m_2^*(A) = 0$.
<u>Tod.</u> Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $I_\varepsilon =]a-1, b+1[\times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}^2$ avoin 2-väli.

$$A \subset I_\varepsilon \Rightarrow 0 \le m_2^*(A) \le \ell(I_\varepsilon) = 2\varepsilon(b - a + 2) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0,$$

joten $m_2^*(A) = 0$.

Esimerkki 1.6 (Harnack (1885))**.** Seuraavaksi äärimmäisen mielenkiintoinen ja yllättävä esimerkki. Kiinnitä erityistä huomiota tekniikkaan, jolla epsilon jaetaan äärettömän moneen vielä pienempään osaan: $\varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j$. Tämä temppu on keskeinen useimmissa mittateorian todistuksissa.

Tarkastellaan rationaalilukuja $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Väite: $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.
Tod. $\mathbb{Q}$ numeroituva, joten $\mathbb{Q} = \{q_j : j \in \mathbb{N}\}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Jokaisella $j \in \mathbb{N}$, olkoon

$$I_j = \left]q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right[\subset \mathbb{R}$$

avoin väli. Sen pituus on $\ell(I_j) = 2\varepsilon/2^{j+1} = \varepsilon/2^j$. Jokainen rationaaliluku q_j kuuluu nyt väliin I_j, joten pätee $\mathbb{Q} \subset \bigcup_j I_j$. Tämä tarkoittaa, että $\{I_j : j \in \mathbb{N}\}$ on $\mathbb{Q}$:n Lebesguen peite. Näin ollen ulkomitan määritelmästä seuraa, että

$$m_1^*(\mathbb{Q}) \le \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon.$$

Mutta ε oli mielivaltainen, joten $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Esimerkki 1.7. $A \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva $\Rightarrow$ $m_n^*(A) = 0$ (Kuten 2.)

Huomio: Siispä, tietyssä mielessä, numeroituvat joukot ovat "pieniä". Huomaa, että tarvitsemme *äärettömiä* Lebesguen peitteitä. Jos meillä olisi lupa käyttää vain äärellisiä kokoelmia välejä, niin silloin joukon $\mathbb{Q}$ "ulkomitta" olisikin ääretön!

Historiaa: Tämä ilmiö huomattiin ennen kuin mittateoria oli löytänyt oikean muotonsa. Kesti aikansa ennen kuin matemaatikot olivat valmiita hyväksymään esimerkiksi rationaalilukujoukon mitallisuuden: vaikka $\mathbb{Q}$ nähtiin edellisessä mielessä melko "olemattomana" joukkona, sille ei haluttu "myöntää" varsinaista "mittaa" nolla. (Meditoi hetki ja mieti missä mielessä $\mathbb{Q}$ on sinusta mitallinen.)

Kysymyksiä: Tarkastele edellistä todistusta. Koska jokaisen reaaliluvun vierestä löytyy rationaalilukuja äärettömän läheltä, ja jokainen rationaaliluku on "piiritetty" avoimella välilllä, niin eikö jokainen reaaliluku silloin kuulu johonkin peitteen väleistä? Eli eikö kyseessä ole samalla koko $\mathbb{R}$:n peite?? Päteekö $m_1^*(\mathbb{R}) = 0$???

Esimerkki 1.8. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu* joukko, ts. $\exists R > 0$ s.e. $A \subset B(0, R)$. Silloin $A \subset I$, missä

$$I = \,]-R, R[\, \overset{n \text{ kpl}}{\times \cdots \times} \,]-R, R[\quad \text{avoin } n\text{-väli.}$$

Saadaan arvio

$$m^*(A) \le \ell(I) = (2R)^n.$$

Eli rajoitetun joukon ulkomitta on äärellinen. Kuulostaa järkevältä.

(Lebesguen) ulkomitan ominaisuuksia.

Koska ulkomitan on tarkoitus toimittaa "ulkoapproksimaation" virkaa, toivoisimme siltä tiettyjä intuitiivisia ominaisuuksia. Kääntäen: jos ulkomitta ei toteuttaisi tiettyjä perusvaatimuksia, se tuskin soveltuisi mittateoriamme rakennuskappaleeksi. Tässä muutama hyvin luonnollinen ominaisuus:

Lause 1.9. *(1)* $m_n^*(\emptyset) = 0$;

(2) "monotonisuus"*:* $A \subset B \Rightarrow m_n^*(A) \le m_n^*(B)$;

Tulkinta: Jos $A \subset B$ *ja* B*:n (mahdollinen) mitta on korkeintaa* $m_n^*(B)$*, niin myös* A*:n (mahdollinen) mitta on korkeintaan* $m_n^*(B)$*.*

(3) "subadditiivisuus"*:* $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ *jono joukkoja* $\Rightarrow$

$$m_n^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j).$$

Tulkinta: Jos A_j*:n mitta on korkeintaan* $m_n^*(A_j)$*, niin yhdisteen* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ *mitta on korkeintaan "osien ylärajojen summa" eli* $\sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j)$*.*

Huomautus 1.10. (3) pätee myös äärelliselle yhdisteelle $\cup_{j=1}^{k}(A_j)$ (valitaan $A_{k+1} = \cdots = \emptyset$).

Lauseen 1.9 todistus

(1): Selvä.

(2): Ydinidea: "Jokainen joukon B Lebesguen peite on samalla joukon A Lebesguen peite".

Todistus: Olkoon $\mathcal{F}$ joukon B Lebesguen peite. Silloin voimme päätellä:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \text{ on myös } A\text{:n Lebesguen peite} \quad \overset{\text{määr.}}{\Longrightarrow} \quad m_n^*(A) \le S(\mathcal{F}).$$

Otetaan inf yli kaikkien B:n Lebesguen peitteiden $\quad \Rightarrow \quad m_n^*(A) \le m_n^*(B)$.

(3): Nyt, ihan vain määritelmän mukaan, jokaisella j voidaan mitä tahansa $\varepsilon_j > 0$ kohti valita A_j:n Lebesguen peite $\mathcal{F}_j = \{I_{j1}, I_{j2} \ldots\}$ siten, että

$$S(\mathcal{F}_j) \le m_n^*(A_j) + \varepsilon_j.$$

Meidän on nyt tämän tiedon avulla osoitettava, että mielivaltaisella $\varepsilon > 0$ löydämme unionin $\cup_j A_j$ Lebesguen peitteen $\mathcal{F}$ siten, että $S(\mathcal{F}) \le \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \varepsilon$.

Ensiksi huomataan, että $\mathcal{F} = \bigcup_j \mathcal{F}_j = \{I_{jk} : j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ on $\cup_j A_j$:n Lebesguen peite. Sen jälkeen suoraviivainen arviointi,

$$m_n^*(\cup_j A_j) \overset{\text{määr.}}{\le} S(\mathcal{F}) \le \sum_{j=1}^{\infty} S(\mathcal{F}_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} m_n^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j,$$

osoittaa, että meidän pitää vain valita ε_j siten, että $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \le \varepsilon$. Esimerkiksi $\varepsilon_j := \varepsilon 2^{-j}$ käy hyvin.

$\square$

N-välien geometrisella mitalla on seuraavat intuitiiviset ominaisuudet $\ell(I + x) = \ell(I)$, missä $x \in \mathbb{R}^n$, ja $\ell(rI) = r^n \ell(I)$, missä $r > 0$. On ymmärrettävää toivoa, että myös ulkomitan pitäisi käyttäytyä samoin yleisempien joukkojen tapauksessa.

Lause 1.11. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Silloin*

$$m_n^*(A + x) = m_n^*(A) \tag{1.12}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä $A + x = \{y + x : y \in A\}$;

$$m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A), \tag{1.13}$$

kun $t > 0$, missä $tA = \{ty : y \in A\}$.

Tod. Siirtoinvarianttius (1.12) jätetään harjoitustehtäväksi.

Todistetaan skaalausominaisuus (1.13). Oletetaan heti, että $t > 0$, koska muuten väite on triviaali.

Ydinajatus: Todistuksen ideassa on vain kaksi elementtiä. Ensimmäinen on huomio $\ell(tI) = t^n \ell(I)$, joka seuraa geometrisen mitan määritelmästä. Toinen elementti on seuraava yksi yhteen vastaavuus: Perhe $t\mathcal{F} := \{tI : I \in \mathcal{F}\}$ on tA:n Lebesguen peite jos ja vain jos $\mathcal{F} = \{I : I \in \mathcal{F}\}$ on A:n Lebesguen peite.

Yksityiskohtainen todistus: Olkoon $\mathcal{F}$ joukon A Lebesguen peite, joten $A \subset \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I$. Tästä nähdään, että $tA \subset t \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} tI$. Täten $t\mathcal{F}$ on tA:n Lebesguen peite. Siispä ulkomitan määritelmän mukaan pätee

$$m_n^*(tA) \le S(t\mathcal{F}) = \sum_{I \in \mathcal{F}} \underbrace{\ell(tI)}_{= t^n \ell(I)} = t^n S(\mathcal{F}).$$

Tämä pätee kaikilla A:n Lebesguen peitteillä, joten ottamalla infimum yli peitteiden $\mathcal{F}$ saamme $m_n^*(tA) \le t^n m_n^*(A)$.

Toinen suunta voidaan todistaa identtisesti. On kuitenkin hauskempaa päätellä se alkuosasta:

$$m_n^*(A) = m_n^*(t^{-1}(tA)) \le t^{-n} m_n^*(tA).$$

(Sovelsimme jo todistettua suuntaa joukkoon tA skalaarilla t^{-1}.) □

Mitä "mittoja" monimutkaisemmat joukot tulevatkaan ikinä saamaan vaadimme, että n-välin mitta sama kuin sen geometrinen mitta $\ell(I)$. Siksi myös n-välin ulkomitan pitäisi olla vähintään geometrinen mitta. On aika tarkistaa, että ulkomitta on yhteensopiva tämän periaatteen kanssa.

Lause 1.14. *(n-välin ulkomitta) Olkoon I n-väli. Tällöin $\ell(I) \le m_n^*(I)$. Lisäksi triviaalisti pätee toinen suunta $m_n^*(I) \le \ell(I)$. Täten meillä on perustavanlaatuinen yhtäsuuruus*

$$m_n^*(I) = \ell(I).$$

Huomautus 1.15. Korostamme, että epätriviaali osuus on nimenomaan suunta $\ell(I) \le m_n^*(I)$. Pysähdy nyt hetkeksi miettimään sitä. Eikö sekin tunnu oikeastaan itsestään selvältä? Mutta, mutta. Muista nyt miten kävi $\mathbb{Q}$:n ulkomitan kanssa. Se oli nolla! Jos sisäistit Esimerkin 1.6 todistuksen kunnolla, uskosi parhaillaan todistettavaan tulokseen pitäisi hieman horjua. Kyseessä on siis äärimmäisen keskeinen tulos, joka ei olekaan niin triviaali miltä ensisilmäyksellä näyttää.

Tod. Hoidetaan triviaali suunta $m_n^*(I) \le \ell(I)$ pois alta: Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin n-väli $J \supset I$ siten, että $\ell(J) < \ell(I) + \varepsilon$. Nyt $\{J\}$ on I:n Lebesguen peite, joten $m_n^*(I) \le S(\{J\}) = \ell(J) < \ell(I) + \varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, niin täytyy päteä $m_n^*(I) \le \ell(I)$.

Nyt on päätuloksen $\ell(I) \le m_n^*(I)$ vuoro: Olkoon $\mathcal{F} = \{J_k : k = 1, 2, \ldots\}$ n-välin I Lebesguen peite. Teemme vastaoletuksen: $\sum_{k \ge 1} \ell(J_k) < \ell(I)$. Koska $I \subset \bigcup_{k \ge 1} J_k$, niin väite kieltämättä vaikuttaa uskottavalta, mutta yhdisteen äärettömyys monimutkaistaa asioita. Miten pääsemme eroon siitä? Mikä topologinen apuneuvo on "räätälöity" redusoimaan äärettömät kokoelmat avoimia joukkoja äärellisiksi. Vastaus: ***kompaktius***.

Jos n-väli I olisi kompakti, niin silloin numeroituvalla avoimella peitteellä $\mathcal{F}$ olisi äärellinen osapeite ja olisimme melkein maalissa. Muista, että $\mathbb{R}^n$:n osajoukko on kompakti jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. N-välimme I on kyllä automaattisesti rajoitettu, mutta ei välttämättä suljettu. Pystymme kuitenkin oleellisesti palauttamaan tilanteen tähän erikoitapaukseen:

Jokaisella $\varepsilon > 0$ löytyy suljettu n-väli $\tilde{I} \subset I$, jolla pätee $\ell(\tilde{I}) > \ell(I) - \varepsilon$. Valitaan nyt vastaoletusta silmällä pitäen $\varepsilon := \ell(I) - \sum_{k\geq 1} \ell(J_k) > 0$. Sitä vastaavalle suljetulle n-välille $\tilde{I}$ pätee nyt epäyhtälö

$$\sum_{k\geq 1} \ell(J_k) < \ell(\tilde{I}).$$

Lisäksi on voimassa sisältyvyys $\tilde{I} \subset I \subset \bigcup_{k\geq 1} J_k$. Tilanne on siis sama kuin lähtökohtamme ei-suljetulla n-välillä I.

Nyt on aika päästä eroon äärettömyyksistä. Koska $\{J_k : k = 1, 2, \ldots\}$ on kompaktin joukon $\tilde{I}$ avoin peite, on olemassa *äärellinen* osapeite $\{J_k : k = 1, 2, \ldots N\}$, eli pätee sisältyvyys $\tilde{I} \subset \bigcup_{k=1}^{N} J_k$. Samalla pätee, tottakai, myös epäyhtälö

$$\sum_{k=1}^{N} \ell(J_k) < \ell(\tilde{I}).$$

On suhteellisen selvää, että tämä ei ole mahdollista (piirrä vaikka kuva), joten kyseessä on ristiriita. Allaoleva Lemma 1.17 tekee sen täsmälliseksi lainaten (laiskuuden vuoksi) hieman Riemann-integrointia. Kyseiset yksityiskohdat voi huoletta sivuuttaa; niissä ei tapahdu mitään syvällistä. Mitä teetkin, pidä huolta, ettei mikään varasta huomiota tärkeiltä pääideoilta. $\square$

Huomautus 1.16. Mikä oli todistuksen tärkein askel? Vastaus: kompaktius. Oikeastaan kriittinen tekijä on mahdollista jäljittää reaalilukujen *täydellisyyteen.* Vertaa tilannetta rationaalilukuihin. Niiden joukko ei ole täydellinen eikä rajoitettu rationaali-intervalli ole kompakti.

Kenties löydät seuraavasta vertauksesta jonkin opetuksen: määritellään rationaalilukuvälien "geometrinen mitta" analogisesti $\ell_{\mathbb{Q}}((q,p) \cap \mathbb{Q}) := p - q$, missä $q, p \in \mathbb{Q}$. Vastaavasti voimme määritellä osajoukon $A \subset \mathbb{Q}$ "ulkomitan" $m^*_{\mathbb{Q}}((q,p) \cap \mathbb{Q})$ näiden rationaalivälien geometrisen mitan avulla. Näillä määritelmillä Lauseen 1.14 vastine ei päde: $m^*_{\mathbb{Q}}((0,1) \cap \mathbb{Q}) = 0 < 1 = \ell_{\mathbb{Q}}((0,1) \cap \mathbb{Q})$.

Lemma 1.17. *Olkoot I ja $I_1, \ldots, I_k$ n-välejä s.e. $I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$. Silloin $\ell(I) \leq \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)$. Jos lisäksi leikkauksilla $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, ei ole sisäpisteitä (ts. mikään $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, ei sisällä avointa kuulaa) ja $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$, niin $\ell(I) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)$.*

Tod. Aloitetaan määritelmällä ja huomiolla. Olkoon $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ n-väli, missä $I_j \subset \mathbb{R}$ on väli päätepisteinä $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Määritellään $\chi_I \colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ (I:n karakteristinen funktio)

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I\,. \end{cases}$$

Seuraavaksi huomataan, että geometrinen mitta voidaan kätevästi esittää karakteristisen funktion Riemann-integraalina:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_I = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} 1\, dx_1 \cdots dx_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \ell(I).$$

Nyt voimme varmistaa, että väitteemme todellakin pätee: Oletuksesta $I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ seuraa, että $\chi(x) \leq \sum_{j=1}^{k} \chi_j(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$., joten arvioimme

$$\sum_j \ell(I_j) = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Big(\sum_j \chi_{I_j}\Big)}_{\geq \chi_I} \geq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_I = \ell(I).$$

Jos väleillä I_j ei ole yhteisiä sisäpisteitä, niin $\chi(x) = \sum_{j=1}^{k} \chi_j(x)$ paitsi mahdollisesti välien reunoilla, jotka eivät vaikuta integrointiin. $\square$

Huomautus 1.18 (Lebesguen peite ei-avoimilla n-väleillä)**.** Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ ja $J_1, J_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltaisia (suljettuja/avoimia/puoliavoimia) n-välejä s.e. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. (Eli $\{J_1, J_2 \ldots\}$ on A:n "Lebesguen peite") Jokaisella i on olemassa avoin n-väli $I_i \supset J_i$ s.e. $\ell(I_i) < \ell(J_i) + \varepsilon/2^i$. Nyt $\{I_1, I_2 \ldots\}$ on A:n (avoin) Lebesguen peite, joten $m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) + \varepsilon$. (Muista geometrinen sarja.) Tästä seuraa, että

$$m^*(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(J_i) \colon A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i,\ J_i \text{ mielivaltainen } n\text{-väli}\Big\}.$$

Huomautus 1.19. Subadditiivisuus <u>ei</u> (yleensä) päde muodossa

$$m_n^*\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \leq \sum_{i \in I} m_n^*(A_i), \tag{1.20}$$

missä $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$, ja I on *ylinumeroituva* indeksijoukko. <u>Syy:</u> "Mikä tahansa joukko voidaan esittää alkioidensa yksiöinä". Esimerkiksi:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \{x\}, \quad m_n^*(\{x\}) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Jos (1.20) pätisi, niin

$$0 \leq m_n^*(\mathbb{R}^n) = m_n^*\Big(\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \{x\}\Big) \overset{(1.20)}{\leq} \sum_{x \in \mathbb{R}^n} m_n^*(\{x\}) = 0.$$

Toisaalta myöhemmin todetaan (tai totea itse heti), että $m_n^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$. <u>RR</u> (= "ristiriita") eli (1.20) ei päde!

1.21 (Lebesgue-)mitalliset joukot

Vihdoin on aika esitellä tapa saada uusia mitallisia joukkoja. Meiltä kuitenkin puuttuu toistaiseksi yksi oleellinen elementti: tapa approksimoida joukkoa ja sen mahdollista "mittaa" sisältä/alhaalta. Kun tämä on mahdollista, mitallisuus määritellään luontevasti "arvioiden yhtymisenä".

Sisämitta. Esittelemme lyhyesti sisämitan käsitteen keskittymällä ideaan yksityiskohtien kustannuksella. Konstruktio ei ole välttämätön, ja usein hypätäänkin sen yli suoraan Carathéodoryn ehtoon (Määritelmä 1.57), korvaten aito motivaatio lupauksilla "rikkaasta teoriasta". Ilman sisämittaa on kuitenkin mahdoton noudattaa mittauksen luonnollisinta filosofiaa. Se on myös erittäin hyödyllinen ajatusapuväline monissa myöhemmissä tuloksissa, vaikkei sitä todistuksissa käyttäisikään. Sisämitta on niille, jotka haluavat ymmärtää mitä tekevät.

Miten arvioisimme joukon mittaa alhaalta? Tästä aiheesta ja sen eri näkökulmista voisi selittää monta sivua, mutta tyydymme tällä kertaa ottamaan oikopolun. Meillä nimittäin on jo tapa approksimoida joukkoja ulkoa: ulkomitta. Hyvin yleisellä periaatteella ulkoarviointi on aina helposti käännettävissä sisäarvioksi. Selitys liikkuu ideoiden tasolla, eikä sen ole tarkoituskaan olla matemaattisen täsmällinen (joskin sen voi sellaiseksi tehdä).

Yksinkertainen huomio on, että, yleisesti ottaen, joukon ja sen komplementin approksimointi ovat jokseenkin sama asia. Mitä paremmin arvioimme yhtä, sen paremmin arvioimme myös toista. Mieti asiaa. Periaatetta on helpompi havainnollistaa jos oletamme, että $\mathbb{R}^3$:n osajoukko, kutsutaan sitä A:ksi, sisältyy johonkin kuutioon: $I \supset A$. Nyt jos tiedämme, että joukon A tilavuus on *korkeintaan* $a \in \mathbb{R}$, niin silloin sen komplementin $I \setminus A$ tilavuus on *vähintään* $\ell(I) - a$. Kuulostaa järkevältä? Kääntäen, jos tiedämme, että komplementin $I \setminus A$ tilavuus on *korkeintaan* $b \in \mathbb{R}$, niin silloin joukon A tilavuus on *vähintään* $\ell(I) - b$. Eli jokainen komplementin $I \setminus A$ yläraja antaa joukon A alarajan! Koska ulkomitta $m^*(I \setminus A)$ tarjoaa ylärajan komplementin tilavuudelle, päättelemme, että $\ell(I) - m^*(I \setminus A)$ on alaraja joukon A tilavuudelle.

Edellisten argumenttien inspiroimana päädymmekin *määrittelemään* n-välin I mielivaltaisen osajoukon A sisämitan $m_*(A)$ kaavalla

$$m_*(A) := \ell(I) - m^*(I \setminus A). \tag{1.22}$$

Jos joukko ei sisälly mihinkään yksittäiseen n-väliin, voimme esimerkiksi osittaa avaruuden numeroituvan moneen n-väliin, soveltaa kaavaa niissä, ja lopuksi summata yhteen. Mutta ne eivät ole tärkeitä yksityiskohtia.

Seuraava seikka ansaitsee huomion: ulkomitan subadditiivisuudesta seuraa, että $\ell(I) = m^*(I) \leq m^*(A) + m^*(I \setminus A)$, joten pätee uskottava perusarvio: $m_*(A) \leq m^*(A)$ – niin kuin pitääkin.

Ymmärrä jälleen, että ei ole oikeaa ja väärää tapaa määritellä ulko- ja sisäapproksimaatiota; kaikki on loppujen lopuksi oman intuitiomme sanelemaa peliä. Jos esimerkiksi kiellämme *numeroituvat* yhdisteet ja monikulmiot, päädymme klassiseen mitta/integrointiteoriaan (Jordan-mitta, Riemann-integraali). Tämä kurssi osoittaa, että kyseisen kiellot vapauttaminen on idea, joka kantaa matemaattista hedelmää.

Mitallisuus: Motiivi ja Muotoilu

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että joukko A sisältyy johonkin n-väliin I. Intuitiivinen lähtökohtamme mitallisuudelle [4] on vaatimus $m_*(A) = m^*(A)$. Koska sisämitta voidaan esittää ulkomitan avulla (katso edellinen kappale), tämä ehto voidaan lausua seuraavasti: $\ell(I) - m^*(I \cup A) = m^*(A)$. Viemällä ulkomittatermit samalle puolelle pääsemme muotoiluun, jossa *ei esiinny enää sisämittaa* :

$$\ell(I) = m^*(A) + m^*(I \setminus A). \tag{1.23}$$

Kirjallisuudessa tämä ehto, muodossa tai toisessa, otetaan usein suoraan mitallisuuden määritelmäksi. Sen etuna on, että säästytään sisämitan konstruoimisen vaivalta. Lisäksi se on suoraviivaisempi yleistää abstrakteihin mitta-avaruuksiin. Helposti kuitenkin unohdetaan mitallisuuden alkuperäinen motivaatio. Ehto (1.23) sanoo epäsuorin joskin elegantein termein: Joukon A sisä- ja ulkoapproksimaatiot ovat samat, eli $m_*(A) = m^*(A)$. Kyseessä on kuin onkin niin luonnollinen mitallisuuden määritelmä kuin mahdollista.

[4] Tämä on toistaiseksi yhä motivaatiota; *virallinen* määritelmä tulee kohta.

Carathéodoryn ehto

On aika siirtyä kohti kovaa matematiikkaa. Ensinnäkin meidän pitää korjata rajoitus, että A on jonkin n-välin I osajoukko. Yksi luonnollinen tapa oikaista ongelma on yksinkertaisesti vaatia, että ulkomitta ja sisämittä täsmää "kaikissa n-väleissä", eli

$$m_*(I \cap A) = m^*(I \cap A), \tag{1.24}$$

missä I on mielivaltainen n-väli. Jos taas esitämme sisämitan komplementin ulkomitan avulla, $m_*(I \cap A) = \ell(I) - m^*(I \setminus A)$, identiteetti (1.24) muuttuu ehdoksi:

$$\ell(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A) \quad (\forall I \text{ on n-väli}). \tag{1.25}$$

Hyvä, voimme siis halutessamme muotoille mitallisuuden määritelmän ilman sisämittaa. Mutta tämäkään ei vielä ole virallinen määritelmä. Historian vakiintuneiden käytäntöjen mukana menemme vieläkin pidemmälle ja vaadimme, että (1.25) pätee, ei ainoastaa kaikilla n-väleillä, vaan *kaikilla* $\mathbb{R}^n$:n osajoukoilla (Määritelmä 1.57). Tämä intuitiivisesta näkökulmasta yllättävä vaatimus on parempi vain toistaiseksi hyväksyä. Onneksi pian osoitamme (Lemma 1.28), että se on yhtäpitävä lievemmän vaatimuksen ((1.25)) kanssa.

Määritelmä 1.26. (Carathéodoryn ehto, v. 1914.) Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on *(Lebesgue-)mitallinen*, jos

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(\underbrace{A \setminus E}_{=A \cap E^c}) \quad \underline{\text{kaikilla}} \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Huomautus 1.27. Itseasiassa riittää tarkistaa epäyhtälö: $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen $\iff$

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \quad \text{kaikilla } A \subset \mathbb{R}^n, \text{ joilla } m^*(A) < \infty.$$

<u>Syy:</u> $\boxed{\leq}$ seuraa subadditiivisuudesta, ja $\boxed{\geq}$ pätee aina, jos $m^*(A) = +\infty$.

Toinen tulkinta Carathéodoryn ehdolle on: "joukko E toteuttaa Carathéodoryn ehdon, jos E *leikkaa minkä tahansa testijoukon siististi kahtia (ulkomitan mielessä).*" Tämä sopii ensimmäiseen tulkintaamme, jonka mukaan "joukon E sisä- ja ulkoapproksimaatiot täsmäävät". Molemmat ehdot sanovat omalla tavallaan, että "joukon E reuna ei ole liian monimutkainen".

Ihan ensimmäiseksi meidän kannattaa tarkistaa, että luonnollisempi ehto (1.25) todellakin on yhtäpitävä Carathéodoryn ehdon kanssa.

Lemma 1.28 (Vaihtoehtoinen Karakterisaatio)**.** *Olkoon joukko E avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Jos kaikilla n-väleillä I pätee*

$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \setminus E),$$

niin silloin E toteuttaa myös Carathéodoryn ehdon, eli on Lebesgue mitallinen.

Lause sanoo, että voimme rajoittua paljon pienempään kokoelmaan "testijoukkoja", nimittäin n-väleihin. Loogisesti tämä ei ole elintärkeää, mutta säästäväisyys on hyvä periaate joka pelastaa meidät ylimääräiseltä vaivalta jatkossa.

Tod. Osoitetaan, että E "leikkaa mielivaltaisen joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ siististi kahtia": Valitaan $\varepsilon > 0$ ja sitä vastaava joukon A Lebesguen peite $\mathcal{F}$ siten, että $m^*(A) + \varepsilon \geq S(\mathcal{F})$. Nyt ei tarvitse muuta kuin arvioida seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
m^*(A)+\varepsilon &\geq S(\mathcal{F}) \\
&= \sum_{I\in\mathcal{F}} \ell(I) \\
&\overset{1.14}{=} \sum_{I\in\mathcal{F}} m^*(I) \\
&= \sum_{I\in\mathcal{F}} m^*(I\cap E)+m^*(I\setminus E) \\
&\overset{sub.add}{\geq} m^*\big(\underbrace{\bigcup_{I\in\mathcal{F}} I\cap E}_{\supset A\cap E}\big)+m^*\big(\underbrace{\bigcup_{I\in\mathcal{F}} I\setminus E}_{\supset A\setminus E}\big) \\
&\overset{monot.}{\geq} m^*(A\cap E)+m^*(A\setminus E). \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

Koska $\varepsilon>0$ oli mielivaltainen, joukko E leikkaa mielivaltaisen testijoukon A siististi. (Muista, että epäyhtälön todistaminen riittää.) Eli E toteuttaa Carathéodoryn ehdon. $\square$

Moraali: Tulos on itseasiassa varsin intuitiivinen: Oletus sanoo, että joukko E leikkaa kaikki n-välit ”siististi” kahtia. Siten tuntuu järkevältä, että se leikkaa kaikki äärelliset kokoelmat n-välejä siististi. Ja oikeastaa saman tien myös kaikki numeroituvat kokoelmat (muista ”$\varepsilon 2^{-n}$-kikka” kun siirrytään äärellisistä äärettömiin). Erityisesti se siis leikkaa kaikki Lebesguen peitteet siististi. Mutta ulkomitta määritellään Lebesguen peitteiden avulla joten...

Määritelmä 1.30 (Mitan määritelmä)**.** Jos $E\subset\mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin merkitään

$$m(E)=m^*(E) \quad \text{tarvittaessa } m_n(E).$$

$m(E)$ on E:n *(n-ulotteinen Lebesgue-) mitta.*

Merkitään

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n=\{E\subset\mathbb{R}^n\colon E \text{ Lebesgue-mitallinen}\} \quad \subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Siis

$$m=m^*|\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n\colon \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n\to[0,\infty] \quad \text{ulkomitan rajoittuma.}$$

Myöhemmin näytetään, että

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n\subsetneq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Carathéodoryn ehdolla muutamat perustulokset – tulokset joiden toivoisi intuitiivisesti olevan totta – seuraavat jouhevasti. Esimerkiksi, kuvittele että joukon ulkomitta on nolla. Selvästi kyseinen joukko on ”hyvin mitätön”, joten tuntuisi luonnolliselta että se on mitallinen (koska sen mitan ”pitäisi olla nolla”). Jos näin ei olisi, mittateoriassamme saattaisi olla jotakin korjattavaa. Lebesguen mitta kuitenkin läpäisee testin:

Lause 1.31.

$$m^*(E)=0 \quad\Rightarrow\quad E \textit{ on mitallinen.}$$

Tod. Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$ testijoukko. Kuten huomautettu, meidän riittää osoittaa epätriviaali suunta

$$m^*(A)\geq\underbrace{m^*(A\cap E)}_{=0}+m^*(A\setminus E).$$

Ensimmäinen termi häviää, sillä $A \cap E \subset E$, ja E:n ulkomitta on nolla. Toisaalta $A \setminus E \subset A$ ja ulkomitta on monotoninen, joten epäyhtälö todellakin on totta. □

Lisää mittauksen filosofiaa: Pohdi mitallisen joukon E komplementtia E^c. Jos kerran E:n mitallisuus tarkoittaa, että sitä voi "approksimoida mielivaltaisen hyvin sekä ulkoa että sisältä", niin eikö silloin komplementtia E^c voi vastaavasti approksimoida mielivaltaisen hyvin sisältä ja ulkoa? Kuten kappaleessa *Sisämitta* selitettiin, jokainen E:n "ulkoapproksimaatio" vastaa sen komplementin "sisäapproksimaatiota", ja toisin päin. Tai jos käytämme tulkintaa "reunan siisteydestä" niin eiköhän E leikkaa siististi jos ja vain jos E^c leikkaa? Mitallisuuden tulkintojen näkökulmasta kuvittelisimme, että joukon E mitallisuus olisi täysin yhtäpitävää sen komplementin mitallisuuden kanssa. Näin on:

Lause 1.32.

$$E \quad \textit{mitallinen} \quad \Longleftrightarrow \quad E^c \quad \textit{mitallinen.}$$

Tod. Tämä seuraa suoraan Carathéodoryn määritelmästä: Joukko E on mitallinen jos ja vain jos pätee

$$m^*(A) = m^*(A \cap \underbrace{E}_{(E^c)^c}) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n.$$

Kuten huomio $E = (E^c)^c$ tekee selväksi, tämä on täsmälleen Carathéodoryn ehto komplementin E^c mitallisuudelle. □

Esimerkki 1.33. Erikoistapauksia:

$$\emptyset \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R},$$
$$\text{rationaaliluvut } \mathbb{Q} \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}, \text{ irrationaaliluvut } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathrm{Leb}\,\mathbb{R}.$$

On aika varmistaa, että mitallisuus toteuttaa tärkeimmän intuitiivisen kriteerin: Vaadimme ehdottomasti, että n-välit ovat mitallisia.

Lause 1.34 (N-välin mitallisuus)**.** *Jos I on n-väli, niin I on mitallinen ja*

$$m(I) = \ell(I).$$

Tod. Kaava $m(I) = \ell(I)$ seuraa jo tarkistetusta tiedosta $m^*(I) = \ell(I)$ (Lause 1.14) heti kun mitallisuus on varmistettu.

Meidän pitää siis tarkistaa, että I toteuttaa Carathéodoryn ehdon. Koska I on itse n-väli, meidän on huomattavasti mukavampi rajoittua testijoukkoihin jotka myös ovat n-välejä (Karakterisaation 1.28 suoma ylellisyys).

Olkoon testijoukko J mielivaltainen n-väli. Meidän pitää tarkistaa epäyhtälö

$$m^*(J \cap I) + m^*(J \setminus I) \leq m^*(J). \tag{1.35}$$

Todistuksen idea on siirtyä ulkomitasta geometriseen mittaan, joka on paljon yksinkertaisempi, ja jolle väite on suhteellisen triviaali. Testijoukko J ja leikkaus $J \cap I$ ovat valmiiksi n-välejä, joten voimme "vaihtaa mitat": $m^*(J) = \ell(J)$ ja $m^*(J \cap I) = \ell(J \cap I)$. Sitä vastoin erotus $J \setminus I$ ei välttämättä ole n-väli, mutta sen voi selvästi esittää äärellisenä yhdisteenä erillisistä n-väleistä (lukija miettii yksityiskohtia mielenkiintonsa mukaan):

$$J \setminus I = \bigcup_{i=1}^{N} J_i.$$

Koska ulkomitan monotonisuuden perusteella pätee

$$m^*\Big(\bigcup_{i=1}^{N} J_i\Big) \le \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m^*(J_i)}_{\ell(J_i)},$$

voimme arvioida epäyhtälön (1.35) vasenta puolta ylhäältä

$$m^*(J \cap I) + m^*(J \setminus I) \le \ell(J \cap I) + \sum_{i=1}^{N} \ell(J_i),$$

jolloin pääsemme eroon ulkomitoista. Nyt, J on selvästi erillinen yhdiste n-väleistä: $J = (J \cap I) \cup J_1 \cup \ldots J_N$. Täten on selvää, geometrisen mitan tulkinnan perusteella, että pätee

$$\ell(J \cap I) + \sum_{i=1}^{N} \ell(J_i) = \ell(J) = m^*(J).$$

Kaksi viimeistä lauseketta yhdessä todistavat epäyhtälön (1.35). □

Äärellisen yhdisteen ja leikkauksen mitallisuus

Mittauksen filosofiaa: Olkoon meillä kaksi mitallista joukkoa E ja F. Tulkintamme mukaan se tarkoittaa, että molempia voi "approksimoida sekä ulkoa että sisältä". Eikö tällöin tuntuisi uskottavalta, että myös niiden yhdistettä $E \cup F$ voi approksimoida ulkoa ja sisältä? Ainakin jos E ja F ovat erillisiä tämän pitäisi olla selvää. Olettaisimme siis – intuitiomme puolesta – että "mitallisuus" säilyy äärellisissä yhdisteissä. Se, että näin todellakin on, valaa uskoa Carathéodoryn ehtoon.

Lemma 1.36. *$E_1, \ldots, E_k$ mitallisia $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$ ja $\bigcap_{i=1}^{k} E_i$ mitallisia.*

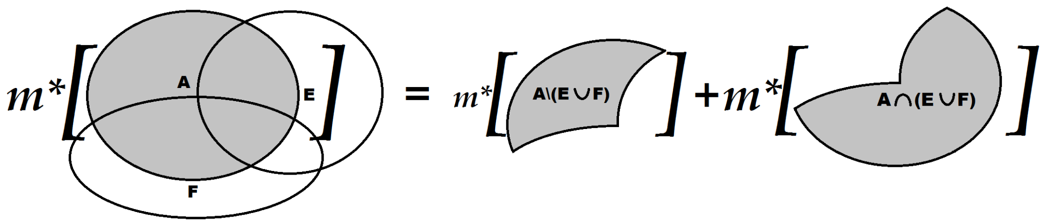
Todistus+Kuvitus+Moraali. $\boxed{\text{(a) yhdiste:}}$ Ensinnäkin, koska voimme kirjoittaa

$$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right) \cup E_k,$$

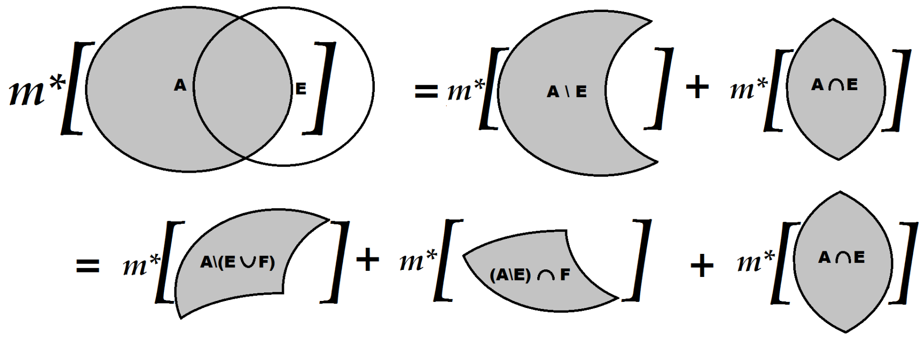
näemme, induktiolla, että riittää osoittaa tapaus $k = 2$.

Siispä olkoon joukot E ja F mitallisia. Carathéodoryn ehdon "toisen tulkinnan" mukaan kumpikin "leikkaa minkä tahansa joukon siististi kahtia". Meidän pitäisi osoittaa, että myös yhdiste $E \cup F$ leikkaa siististi.

A olkoon mielivaltainen testijoukko. Tavoite: meidän pitää näyttää, että voimme "leikata sen kahteen osaan" $A \setminus (E \cup F) = (A \setminus E) \setminus F$ ja $A \cap (E \cup F)$ niin, että ulkomitta säilyy:

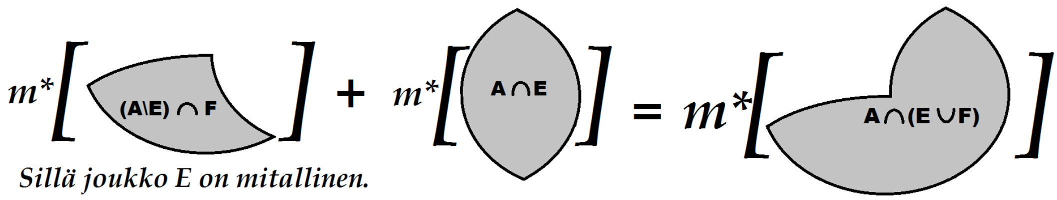


Ainoa tieto jota voimme käyttää on, että joukot E ja F ”leikkaavat tarkasti”, minkä joukon tahansa. Aloitetaan vaikka leikkaamalla joukolla E, jolloin saamme $m^*(A) = m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E)$. Sen jälkeen on luultavasti aika käyttää toista ”leikkuriamme” F. Leikkaamme sillä joukkoa $A \setminus E$ (toisin sanoen, sovellamme Carathéodoryn ehtoa testijoukkoon $A \setminus E$): $m^*(A \setminus E) = m^*((A \setminus E) \setminus F) + m^*((A \setminus E) \cap F)$.



Ensin käytetään joukon E mitallisuutta; sen jälkeen joukon F mitallisuutta.

Nyt olemme jakaneet alkuperäisen testijoukon A kolmeen osaan sailyttäen ulkomitan[5]! Yksi paloista on jo haluttua muotoa, nimittäin $A \setminus (E \cup F)$. Jäljelle jäävät palat, $A \cap E$ ja $(A \setminus E) \cap F$ *muodostavat yhdessä toisen halutun loppujoukon* $A \cap (E \cup F)$. Voimme liittää joukkoja yhteen? Toki! Itse asiassa voimme vedota jopa kahteen eri argumenttiin: Pelkkä ulkomitan subadditiivisuuskin takaa, että $m^*((A \setminus E) \cap F) + m^*(A \cap E) \geq m^*(A \cap (E \cup F))$. Tämä todistaa epätriviaalin suunnan Carathéodoryn ehdosta. Toisaalta, voimme yksinkertaisesti soveltaa Carathéodoryn ehtoa mitallisella E ja testijoukolla $A \cap (E \cup F)$:



Sillä joukko E on mitallinen.

Näin olemme saaneet jaettua testijoukon haluttuihin palasiin hävittämättä ulkomittaa. Tämä osoittaa yhdisteen $E \cup F$ mitallisuuden.

$\boxed{\text{(b) leikkaus:}}$ Koska voimme de Morganin avulla kirjoittaa

$$\bigcap_{i=1}^{k} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i^c \right)^c ,$$

niin komplementin mitallisuus (Lause 1.32) ja (a)-osa viimeistelevät todistuksen. □

Lause 1.37. *E_1, E_2 mitallisia $\Rightarrow$ $E_1 \setminus E_2$ mitallinen.*

Tod. $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$. □

Kuten toivoa sopii, mitallisille joukoille pätee äärellinen täystadditiivisuus (pian osoitamme, että myös numeroituva täysadditiivisuus on totta):

[5] Jos haluamme, voimme jakaa myös joukon $A \cap E$ kahteen osaan F joukolla. Näin saamme ”mahdollisimman monta palaa hävittämättä mittaa”.

Lause 1.38 (Äärellinen täysadditiivisuus)**.** *Olkoon $E_1, \dots, E_k$ mitallisia ja* erillisiä. *Tällöin pätee "täysadditiivisuus"*

$$m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) = \sum_{i=1}^{k} m(E_i).$$

Tod. Riittää jälleen todistaa tapaus $k = 2$.

Intuitio: Joukko E_1 on mitallinen, joten se "leikkaa kaikki joukot siististi kahtia"; erityisesti yhdisteen $E_1 \cup E_2$.

Yksityiskohdat: Joukko E_1 toteuttaa Caratheorodyn ehdon testijoukolla $E_1 \cup E_2$: $m(E_1 \cup E_2) = m(\overline{(E_1 \cup E_2) \cap E_1)} + m((E_1 \cup E_2) \setminus E_1) = m(E_1) + m(E_2)$. □

Lebesgue-mitallisten joukkojen peruslause.

Koko modernin mittateorian ja sitä myötä integrointiteorian voima perustuu seuraavaan tulokseen. Jos pitäisi valita yksi kurssin lause ylitse muiden, niin se olisi tämä.

Lause 1.39. *Olkoon $E_1, E_2, \dots$ jono mitallisia joukkoja. Tällöin joukot*

$$\bigcup_i E_i \quad ja \quad \bigcap_i E_i$$

ovat mitallisia. Jos lisäksi E_i:t erillisiä, niin pätee

$$m(\bigcup_i E_i) = \sum_i m(E_i). \qquad (\text{"täysadditiivisuus"}) \tag{1.40}$$

Ennen todistusta on painotettava, että tuloksen syvällinen sanoma on sen ensimmäinen osa: "mitallisuus säilyy numeroituvassa yhdisteessä (ja leikkauksessa)". Korostaaksemme tätä osoitamme ensin, että täysadditiivisuus on itseasiassa lähes "automaattisesti totta":

Lemma 1.41. *Olkoon $F_1, F_2, \dots$ jono erillisiä mitallisia joukkoja. Tällöin pätee*

$$m^*(\bigcup_i F_i) = \sum_i m(F_i).$$

Huomio. Vasemmalla puolella on ulkomitta, koska emme ihan vielä tiedä numeroituvan yhdisteen on mitallisuutta. Kaavan on tarkoitus tehdä selväksi, että mitan täysadditiivisuus on suhteellisen triviaali asia. Todistuksen kolme alkeellista peruselementtiä on alleviivattu.

Lemman 1.41 Todistus. Ulkomitan monotonisuuden mukaan kaikilla $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \geq m^*(\bigcup_{i=1}^{N} F_i).$$

Koska Lauseen 1.36 mukaan $\bigcup_{i=1}^{N} F_i$ on mitallinen voimme vaihtaa ulkomitan mittaan:

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{N} F_i) = m(\bigcup_{i=1}^{N} F_i).$$

Lisäksi äärelliselle erilliselle yhdisteelle pätee täysadditiivisuus (L. 1.38), joten saamme

$$m(\bigcup_{i=1}^{N} F_i) = \sum_{i=1}^{N} m(F_i).$$

Yhdistäen palaset arvioimme

$$m^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big) \geq \sum_{i=1}^{N} m(F_i), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Täten vastaava epäyhtälö pätee myös rajalla $N \to \infty$:

$$m^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i).$$

Se oli oikeastaan siinä, sillä toinen suunta pätee triviaalisti ulkomitan subadditiivisuudeen perusteella:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(F_i) \geq m^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big).$$

□

Edellinen lemma luonnollisesti keskittää huomiomme tutkimaan itse numeroituvan unionin mitallisuutta. Nyt on aika todistaa päätulos .

Lauseen 1.39 Todistus. Käytämme Karakterisaation 1.28 tietoa, että Carathéodoryn ehto riittää tarkistaa testijoukoille jotka ovat n-välejä. Olkoon siis n-väli I testijoukko.

Koska äärellinen yhdiste $\bigcup_{i=1}^{N} E_i$ on mitallinen (L. 1.36), voimme soveltaa Carathéodoryn ehtoa siihen n-välillä I:

$$m^*(I) = \ m^*(I \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) + m^*(I \setminus \bigcup_{i=1}^{N} E_i).$$

Suoraviivainen idea olisi päästää N äärettömään niin, että epäyhtälö säilyy. Silloin Carathéodoryn ehto olisi tarkistettu. Katsotaan mitä voimme tehdä.

Toinen termi on helppo: Koska $I \setminus \bigcup_{i=1}^{N} E_i \supset I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, voimme arvioida sitä alaspäin

$$m^*(I \setminus \bigcup_{i=1}^{N} E_i) \geq m^*(I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i).$$

Ensimmäinen termi: Tämä on tietenkin N:n suhteen kasvava jono, ja koska epäyhtälö pätee kaikilla N, se pätee myös rajalla $N \to \infty$. Yhdistäen tämän toisen termin arvion kanssa, saamme

$$m^*(I) \geq \lim_{N\to\infty} m^*\big(\bigcup_{i=1}^{N} I \cap E_i\big) + m^*(I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i).$$

Olemme näennäisesti melkein perillä. Parilla helpolla päättelyllä olemme päätyneet epäyhtälöön joka on melkein Carathéodoryn ehto. Kaikki riippuu siitä, voimmeko sanoa että

$$\lim_{N\to\infty} m^*\big(\bigcup_{i=1}^{N} I \cap E_i\big) = m^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} I \cap E_i\big)? \tag{1.42}$$

Ensin pikainen huomio: koska n-väli I on mitallinen ja mitallisuus säilyy äärellisissä yhdisteissä ja leikkauksissa, voimme "vaihtaa ulkomitan mittaan" seuraavasti

$$m^*(I \cap \bigcup_{i=1}^{N} E_i) = m\big(\bigcup_{i=1}^{N} I \cap E_i\big).$$

Nyt yksi tapa ratkaista kysymys (1.42) on huomata, että jos joukot E_i ovat *erillisiä*, joten myös joukot $F_i = I \cap E_i$ ovat erillisiä, niin silloin äärellisen täysadditiivisuuden nojalla pätee

$$\lim_{N\to\infty} m\big(\bigcup_{i=1}^{N} I \cap E_i\big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} m(I \cap E_i).$$

Viimeiseen muotoon voimme puolestaan käyttää edellistä Lemmaa 1.41:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(I \cap E_i) = m^*\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} I \cap E_i\big).$$

Tämä todistaa yhtälön (1.42), ja sitä myötä koko väitteen tapauksessa, jossa joukot E_i ovat erillisiä. Mutta tämä riittää! Alla esitettävä Lemma 1.43 kertoo, miten mikä tahansa numeroituva yhdiste voidaan itseasiassa esittää yhdisteenä erillisistä joukoista. Näin ollen tämä todistus on valmis.

Leikkauksen mitallisuus: Alkuosan ja Lauseen 1.32 perusteella $\bigcap_i E_i = \big(\bigcup_i E_i^c\big)^c$ on mitallinen. □

Heuristinen perustelu miksi mitallisuus säilyy numeroituvassa yhdisteessä. Muista, että Carathrodoryn ehdon takana on ajatus, että sen toteuttavaa joukkoa voi ”approximoida” sekä ulkoa, että sisältä mielivaltaisen hyvin. Jos meillä nyt on numeroituva kokoelma joukkoja, joita jokaista voi approksimoida mielivaltaisen hyvin, niin silloin on uskottavaa, että niiden yhdistettäkin voi: approximoi ensimmäistä tarkkuudella $\varepsilon 2^{-1}$, toista tarkkuudella $\varepsilon 2^{-2}$ jne. Tällöin yhdistettä voi luultavasti approksimoida tarkkuudella $\varepsilon 2^{-1} + \varepsilon 2^{-2} + \ldots = \varepsilon$. Idean voi tehdä täsmälliseksi ja siitä saa toisen todistuksen Lauseelle 1.39.

Vaikka Lauseen 1.39 merkitystä ei voi yliarvioida, sitä ei pidä pitää *yllättävänä* tuloksena. Päinvastoin, jos olemme onnistuneet konstruoimaan mitallisuuden käsitteen, joka noudattaa intuitiotamme, niin todellakin *odotamme* tämän tuloksen pitävän paikkansa. Lukijan ei kuitenkaan tarvitse huolestua; nämä näkökulmat ja odotukset kirkastuvat kunhan harjaantuu mittateorian käsitteisiin.

Seuraava yleispätevä tekniikka on hyödyllinen monissa yhteyksissä.

Lemma 1.43. *Olkoon $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, missä E_i:t mitallisia. Tällöin on olemassa* erilliset *ja mitalliset $F_i \subset E_i$ s.e.*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i.$$

Tod. Valitaan

$$\begin{aligned} F_1 &= E_1, \qquad \text{[mitallinen]} \\ F_2 &= E_2 \setminus E_1, \qquad \text{[mitallinen (L. 1.37)]} \\ &\vdots \\ F_k &= E_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i, \qquad \text{[mitallinen (L. 1.37 ja 1.36)]} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tällöin (selvästi)

$$F_i \subset E_i \quad \forall\, i, \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{ja} \quad F_i \cap F_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j.$$

$\square$

Lisähuomio: Sama tulos samalla todistuksella pätee jos unohdetaan kaikki mitallisuudet: *mikä tahansa numeroituva yhdiste voidaan aina esittää numeroituvana erillisenä yhdisteenä.*

1.44 Lisää mitallisia joukkoja

Ainoat konkreettiset esimerkit mitallisista joukoista tähän mennessä ovat n-välit ja joukot joiden ulkomitta tai komplementin ulkomitta on nolla. Numeroituvan additiivisuuden avulla (Lause 1.39) saamme nopeasti paljon lisää. Tässä luvussa osoitamme, että mm. avoimet ja siten suljetut joukot (avoimien joukkojen komplementteina) ovat mitallisia.

Perusidea on hyvin yksinkertainen: Meillä on perusrakennuspalikoina avoimet n-välit. Mitä avoimia joukkoja voimme rakentaa niistä numeroituvina yhdisteinä? Käy ilmi, että kaikki.

Lemma 1.45 (Avoin joukko numeroituvana yhdisteenä)**.** *Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Tällöin on voimme esittää sen numeroituvana yhdisteenä $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ avoimista n-väleistä I_i.*

Tod. Suoraviivainen tapa lähestyä ongelmaa on muistella avoimen joukon määritelmää (Topo I:n mielessä). Sen mukaan tiedämme, että jos valitsemme pisteen $x \in G$, niin on olemassa kuulaympäristö $B(x, r)$ joka myös sisältyy joukkoon G. On myös selvää, että edellisessä virkkeessä voi vaihtaa kuulan n-väliin, koska jokaisen kuulan sisälle mahtuu n-väli (ja toisinpäin).

Eli jokainen piste $x \in G$ voidaan ympäröidä avoimella n-välillä, merkitään sitä $I(x)$:llä, niin että $I(x) \subset G$. Voimme siis esittää joukon G ainakin ylinumeroituvana yhdisteenä

$$G = \bigcup_{x \in G} I(x).$$

Ovelaa, mutta miten pääsemme eroon *ylinumeroituvuudesta*? (Lopullinen motiivimme on G:n mitallisuus ja ylinumeroituva yhdiste ei välttämättä säilytä mitallisuutta.) Perhe $\mathcal{G} := \{I(x) \colon x \in G\}$ on G:n avoin peite. Koska joka ikinen piste $x \in G$ on piiritetty avoimella joukolla $I(x)$, peitteen $\mathcal{G}$ jäsenillä täytyy olla *paljon* ”päällekkäisyyksiä”. Voimme siis luultavasti heittää osan joukoista $I(x)$ menemään. Mutta kuinka paljon? Riittääkö jättää numeroituvan monta? Riittää. Kyseessä on eräs syvällinen topologinen ominaisuus (L. 1.46), jonka esimerkiksi avaruus $\mathbb{R}^n$ sattuu omaamaan. Jätämme todistuksen erinomaiseksi harjoitustehtäväksi, ja esitämme tässä vaihtehtoisen perustelun:

Mikä topologinen ominaisuus ”eliminoi ylimääräisiä avoimia joukkoja”? Vastaus: kompaktius. Jos joukko G olisi kompakti, niin saisimme heti jopa *äärellisen* $\mathcal{G}$:n osapeitteen. Mutta joukko G on avoin (eikä välttämättä rajoitettu) eli se ei ole kompakti (oletamme, että $G \neq \emptyset$). Se voidaan kuitenkin esittää *numeroituvana yhdisteenä kompakteista osajoukoista*! Määritellään joukko $G_k := \{x \in [-k, k]^n : dist(x, G^c) \geq 1/k\} \subset G$, joka koostuu G:n pisteistä jotka eivät ole liian lähellä reunaa eivätkä liian kaukana origosta. Nyt G voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä

$$G = \bigcup_{k \geq 1} G_k.$$

Jokainen G_k on selvästi suljettu ja rajoitettu, ja siten kompakti. Tietenkin $\mathcal{G}$ on myös $G_k \subset G$:n avoin peite, joten on olemassa G_k:n äärellinen osapeite $\mathcal{G}_k$. Siten äärellisten peitteiden $\mathcal{G}_k$ yhdiste,

$$\mathcal{F} := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{G}_k,$$

on G:n peite. Se on äärellisten perheiden numeroituvana yhdisteenä numeroituva.

Koska jokainen peite $\mathcal{G}_k$ koostui n-väleistä, myös peite $\mathcal{F}$ koostuu n-väleistä $I_i := I(x_i), i = 1, 2, \ldots$, ja jokainen niistä tietenkin sisältyy edelleen joukkoon G. Täten pätee

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i. \qquad \square$$

Kuten edellä viitattiin, $\mathbb{R}^n$:n topologialla on seuraava mielenkiintoinen ominaisuus. Se kertoo, että mielivaltaiset avoimet peitteet voi monissa tilanteissa "korvata" numeroituvilla peitteillä.

Lause 1.46. *(Lindelöfin lause) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa osajoukko ja*

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \supset A$$

peite avoimilla joukoilla $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathcal{A}$. Silloin on olemassa numeroituva *alipeite*

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_{\alpha_j} \supset A.$$

Tod. HT $\square$

Lause 1.47. *$\mathbb{R}^n$:n avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia.*

Tod. (a) Avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä n-välejä (Lemma 1.45). N-välit ovat mitallisia ja mitallisuus säilyy numeroituvassa yhdisteessä (Lause 1.39).

(b) Jos F suljettu, niin F^c avoin ja siten mitallinen. Mitallisuus säilyy komplementissa, joten $F = (F^c)^c$ on mitallinen. $\square$

Mitallisiin joukkojen kokoelma on siis varsin vaikuttava. Ja se kasvaa vielä huomattavasti. Itseasiassa siihen kuuluu niin monimutkaisia ja kummallisia joukkoja, että helposti herää epäilys kaikkien joukkojen mitallisuudesta. Myöhemmin näemme, että se on liikaa toivottu. Siitä huolimatta sopii arvostaa miten tehokkaaasti *numeroituva* yhdiste ja leikkaus antavat meille lisää mitallisia joukkoja.

Yleisempiä mitallisia joukkoja, σ-algebrat.

$$\mathcal{F}_\sigma\text{-joukot} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i, \quad F_i \text{ suljettu} \quad (\text{esim. } \mathbb{Q},\ [a,b),\ (a,b])$$

$$\mathcal{G}_\delta\text{-joukot} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i, \quad G_i \text{ avoin} \quad (\text{esim. } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ [a,b),\ (a,b])$$

$$\mathcal{F}_{\sigma\delta}\text{-joukot} \quad \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_j,\ A_j \in \mathcal{F}_\sigma$$

$$\mathcal{G}_{\delta\sigma}\text{-joukot} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_j,\ B_j \in \mathcal{G}_\delta$$

jne.

Määritelmä 1.48. Olkoon X mikä tahansa joukko. Perhe $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ on X:n *σ-algebra* ("sigma-algebra"), jos

(a) $\emptyset \in \Gamma$;

(b) $A \in \Gamma \;\Rightarrow\; X \setminus A \in \Gamma$;

(c) $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

Huomautus 1.49. (1) Jos Γ on σ-algebra ja $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N}$, niin myös $\bigcap_i A_i \in \Gamma$, sillä

$$\bigcap_i A_i = \bigcap_i \big(A_i^c\big)^c = \big(\bigcup_{i=1} A_i^c\big)^c \in \Gamma.$$

(2) Olemme todistaneet: Lebesgue-mitallisten joukkojen perhe $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra (Lauseet 1.31, 1.32, 1.39).

(3) $\mathcal{P}(X)$ on suurin X:n σ-algebra; $\{\emptyset, X\}$ on pienin X:n σ-algebra; $A \subset X$ (kiinnitetty) $\Rightarrow$ $\{\emptyset, X, A, A^c\}$ on X:n σ-algebra.

Määritelmä 1.50. *Borel-joukkojen perhe* $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ on pienin $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot.

Olemassaolo: Merkitään

$$\boxed{\mathcal{B} = \bigcap\{\Gamma \colon \Gamma \text{ on } \mathbb{R}^n\text{:n } \sigma\text{-algebra},\ \Gamma \text{ sisältää suljetut joukot}\}.}$$

(Esim. $\Gamma = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ on eräs $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot.)
$\mathcal{B}$ on σ-algebra, sillä

(a) $\emptyset \in \mathcal{B}$;

(b) $A \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; A^c \in \Gamma\ \forall\Gamma \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{B}$;

(c) $A_i \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Gamma\ \forall\Gamma \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$.

Konstruktio $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ on pienin $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot, joten

$$\boxed{\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n = \mathcal{B}\,.}$$

Avoimet, suljetut, $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{G}_\delta$, jne. joukot ovat Borel-joukkoja.

Lause 1.51. *Jokainen Borel-joukko on mitallinen.*

Tod. Mitallisten joukkojen perhe $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on σ-algebra ja sisältää suljetut joukot, joten

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \subset \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n.$$

□

1.52 Yleistä mittateoriaa.

Määritelmä 1.53. Olkoon Γ X:n σ-algebra. Funktio $\mu\colon \Gamma \to [0, +\infty]$ on *mitta* X:ssä, jos

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $A_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N}$, erillisiä $\Rightarrow$ $\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$. "täysadditiivisuus"

Kolmikko (X, Γ, μ) on *mitta-avaruus*.

Huomautus 1.54. 1. Mitta μ on myös *monotoninen*:

$$A, B \in \Gamma,\ A \subset B \ \Rightarrow\ 0 \le \mu(A) \le \mu(B).$$

Syy: $A,\ B \setminus A \in \Gamma$ erillisiä, $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\Rightarrow\ \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\ge 0} \ge \mu(A).$$

2. $A, B \in \Gamma,\ A \subset B,\ \mu(A) < \infty \ \Rightarrow\ \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Mitta μ on *todennäköisyysmitta* (lyhyemmin tn-mitta), jos $\mu(X) = 1$.

Esimerkki 1.55. (1) n-ulotteinen Lebesgue-mitta

$$m_n\colon \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$$

on mitta (ei tn-mitta).
Syy: $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n σ-algebra ja m on täysadditiivinen.

(2) Olkoon $X \ne \emptyset$ mielivaltainen joukko. Kiinnitetään $x \in X$ ja asetetaan kaikilla $A \subset X$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A; \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Silloin $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ on tn-mitta (ns. *Dirac mitta* alkiossa $x \in X$).
Syy: (a) $\mathcal{P}(X)$ on σ-algebra.
(b) Olkoot $A_j \subset X,\ j \in \mathbb{N}$, erillisiä (ts. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \ne j$). Silloin

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

sillä

$$\begin{cases} x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \ \Rightarrow\ \text{molemmat puolet } = 0 \\[2ex] x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \overset{\text{erill.}}{\Longrightarrow} \exists \text{ täsm. yksi } j_0 \in \mathbb{N} \text{ s.e. } x \in A_{j_0} \ \Rightarrow\ \text{molemmat puolet } = 1. \end{cases}$$

(3) $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty],\ \mu(A) = 0\ \forall A \subset X$, on mitta.

(4) Olkoot $a_j \ge 0,\ j \in \mathbb{N}$, s.e. $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1$. Asetetaan kaikilla $A \subset \mathbb{N}$

$$\mu(A) = \sum_{j\in A} a_j.$$

Tällöin $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1]$ on tn-mitta (HT).

Määritelmä 1.56. Olkoon X mikä tahansa joukko. Kuvaus $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty]$ on *ulkomitta* X:ssä, jos

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \;\Rightarrow\; \mu^*(A) \le \mu^*(B)$;

(3) $A_j \subset X,\; j \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \mu^*\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

Lisäksi joukko $E \subset X$ on (μ^*-)*mitallinen*, jos (Carathéodoryn ehto)

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \tag{1.57}$$

pätee $\forall A \subset X$.
Merkitään

$$\mathcal{M}_{\mu^*}(X) = \{E \subset X \colon E \ \mu^*\text{-mitallinen}\}$$

tai lyhyemmin $\mathcal{M}(X)$, jos μ^* on selvä asiayhteydestä.

Huomautus 1.58. $\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra X:ssä ja rajoittuma

$$\mu^*|\mathcal{M}(X)\colon \mathcal{M}(X) \to [0,+\infty]$$

on mitta. Tod. kuten Lebesguen ulkomitan tapauksessa.

1.59 Hausdorffin mitta ja dimensio.

(Vapaaehtoista kurssimateriaalia.)
Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ halkaisija on

$$d(A) = \sup\{|x-y| \colon x, y \in A\}, \quad d(\emptyset) = 0.$$

Olkoon $0 \le s < \infty$ ja $\delta > 0$. Jos $A \subset \mathbb{R}^n$, niin asetetaan

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} d(E_j)^s \colon A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ d(E_j) \le \delta\Big\},$$

missä tehdään sopimukset $d(\{x\})^0 = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $d(\emptyset)^s = 0 \ \forall s \ge 0$. (Yllä $E_j \subset \mathbb{R}^n$ on mikä tahansa osajoukko.)

Havaitaan: $0 \le \delta_1 \le \delta_2 \;\Rightarrow\; \mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$ (inf yli pienemmän joukon).

Määritelmä 1.60. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ s-ulotteinen Hausdorffin (ulko-)mitta on

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

(Voi olla $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.)

Lause 1.61. *Olkoon $0 \le s < \infty$. Silloin $\mathcal{H}^s$ on ulkomitta $\mathbb{R}^n$:ssä.*

Tod. HT □

$\mathcal{H}^s$-mitalliset joukot, $\mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n)$, määritellään Carathéodoryn ehdon (1.57) avulla.
Lisätieto:

$$\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \subset \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s}(\mathbb{R}^n).$$

Lause 1.62. *Jokaista $A \subset \mathbb{R}^n$ kohti on olemassa 1-käsitteinen luku $s = s(A) \geq 0$, ns. A:n* Hausdorffin dimensio*, s.e.*

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ ja} \\ &\mathcal{H}^{s-\varepsilon}(A) = +\infty \quad \forall \varepsilon \in (0, s]. \end{aligned}$$

Tod. Väite 1:

$$s \geq 0 \text{ ja } \mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0\ \forall t > s.$$

Olkoon $\delta > 0$. $\Rightarrow$ $\exists$ peite $\bigcup_{j=1}^\infty E_j \supset A$ s.e. $d(E_j) \leq \delta\ \forall j$ ja

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1 \overset{\text{olet.}}{<} \infty \\ \Rightarrow\ \mathcal{H}^t_\delta(A) &\overset{\inf}{\leq} \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^t = \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \underbrace{d(E_j)}_{\leq \delta}{}^{t-s} \overset{t>s}{\leq} \delta^{t-s} \sum_{j=1}^\infty d(E_j)^s \\ &\leq \delta^{t-s} \underbrace{\big(\mathcal{H}^s(A) + 1\big)}_{<\infty} \end{aligned}$$

Annetaan $\delta \to 0 \Rightarrow \delta^{t-s} \to 0 \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^t_\delta(A) = 0$ eli Väite 1 todistettu. Asetetaan

$$s(A) = \inf\{t > 0 \colon \mathcal{H}^t(A) = 0\}.$$

Väite 1 $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^{s(A)+\varepsilon}(A) = 0\ \forall \varepsilon > 0$. Toisaalta Väite 1 $\Rightarrow$ jos $0 \leq s < t < \infty$ ja $\mathcal{H}^t(A) > 0$, niin $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$. □

Huomautus 1.63. (1) Hausdorff-mitta voidaan määritellä samalla tavalla missä tahansa metrisessä avaruudessa (X, d) (joukon $A \subset X$ halkaisija on $d(A) = \sup\{d(x, y) \colon x, y \in X\}$).

(2) $\mathcal{H}^0$ on lukumäärämitta, ts. $\mathcal{H}^0(A) = \operatorname{card} A = A$:n alkioiden lukumäärä.

(3) $\mathbb{R}^n$:ssä pätee: $\mathcal{H}^n = c\, m_n^*$, missä $c = c(n)$ on vakio. Siksi usein $\mathcal{H}^s$ normeerataan kertomalla se tietyllä s:stä riippuvalla vakiolla.

(4) $A \subset \mathbb{R}^n$ annettu $\Rightarrow$ Hausdorff-dimensio $s(A) \in [0, n]$ (ei tarvitse olla kokonaisluku). Vastaava mitan arvo $\mathcal{H}^{s(A)}(A)$ voi olla mikä tahansa luku $\in [0, +\infty]$.

(5) $\mathbb{R}^n$:ssä $\mathcal{H}^s$, $0 \leq s \leq n$, sopii hyvin mittaamaan "pieniä" joukkoja. Esim. 0-mittaisella joukolla A, $m_n(A) = 0$, voi olla $\mathcal{H}^s(A) > 0$, $0 \leq s < n$. $\mathcal{H}^s(A)$ "näkee" A:n "hienorakennetta" ehtojen $d(E_j) \leq \delta$, $\delta \to 0$ takia.

1.64 Mitan konvergenssi

Mitan konvergenssitulokset ovat äärimmäisen tärkeitä ja hyödyllisiä. Itse asiassa, seuraavan lauseen ominaisuus on yhtäpitävä *numeroituvan* täysadditiivisuuden kanssa[6].

Olkoon $X \neq \emptyset$, $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, ja $\mu\colon \Gamma \to [0, +\infty]$ mitta.

Lause 1.65 (Mitan jatkuvuus)**.** *Olkoon $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \ldots,$ kasvava jono (ts. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset X$ (μ-)mitallisia). Tällöin*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Huom.: $A_j \in \Gamma\ \forall j \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Tod.

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\underbrace{A_j \setminus A_{j-1}}_{\text{erill. mitall.}}), \quad A_0 = \emptyset \ \ \text{(sopimus)}$$

Mitan täysadditiivisuus $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{k} (A_j \setminus A_{j-1})}_{=A_k}\Big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).\end{aligned}$$

□

Komplementtien avulla on helppo johtaa vastaava konvergenssitulos laskeville jonoille. Huomaa kuitenkin kriittinen oletus $\mu(A_k) < \infty$ jollakin $k \in \mathbb{N}$..

Lause 1.66. *Olkoon $A_j \in \Gamma$, $j = 1, \ldots,$ vähenevä jono (ts. $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ (μ-)mitallisia). Jos lisäksi $\mu(A_k) < \infty$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, niin silloin*

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Huom.: Γ σ-alg. $\Rightarrow$ $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Tod. Voidaan olettaa, että $\mu(A_1) < \infty$. Merkitään $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A$ ja $B_j = A_1 \setminus A_j$. Tällöin $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ ovat mitallisia.

[6] äärellinen täysadditiivisuus ja mitan jatkuvuus takaa numeroituvan täysadditiivisuuden.

$$\text{Lause 1.65} \quad \Rightarrow \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\big) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j).$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j) = A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus A$$

$$A_1 = A_j \cup \big(\underbrace{A_1 \setminus A_j}_{=B_j}\big) \quad \text{erillinen yhdiste} \ \Rightarrow \ \mu(A_1) = \mu(A_j) + \mu(B_j)$$

$$A_1 = A \cup (A_1 \setminus A) \quad \text{erillinen yhdiste} \ \Rightarrow \ \mu(A_1) = \mu(A) + \mu(A_1 \setminus A)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ \mu(A) &= \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A) \quad (\text{tässä tarvitaan } \mu(A_1) < \infty) \\
&= \mu(A_1) - \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\big) \\
&= \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) \\
&= \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_j)\big) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).
\end{aligned}$$

□

Huomautus 1.67. Ehto $\mu(A_k) < \infty$ jollakin $k \in \mathbb{N}$ on välttämätön. Esim.

$$\begin{gathered}
A_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > j\} \\
A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \\
m_2(A_j) = \infty \ \forall j \\
\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \emptyset \ \Rightarrow \ m_2\big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\big) = 0 \neq \lim_{j\to\infty} m_2(A_j).
\end{gathered}$$

Huomautus 1.68. (Tn-teoriassa tärkeä sovellus) Borel-Cantelli lemma: Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, $A_j \in \Gamma,\ j \in \mathbb{N}$, ja

$$A = \{x \in X \colon x \in A_j \text{ äärettömän monella indeksillä } j \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty \ \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

(HT)

1.69 Lebesguen mitan yhteys Jordan-mittaan

(Vapaaehtoista kurssimateriaalia.)

Lause 1.70. *$E \subset \mathbb{R}^n$ (Leb.-)mitallinen $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ (Leb.-)mitallinen A ja B s.e. $A \subset E \subset B$ ja $m(B \setminus A) < \varepsilon$.*

Tod. HT 3/5 □

Määritelmä 1.71. (Diff II) $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mitallinen $\iff$ E rajoitettu ja χ_E Riemann-integroituva. Tällöin E:n Jordan-mitta on

$$m_J(E) = \int \chi_E.$$

Lause 1.72. *Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on Jordan-mitallinen, niin E on Lebesgue-mitallinen ja $m_J(E) = m(E)$.*

Tod. Oletetaan $n = 2$, yleinen n samoin. Valitaan suljettu suorakulmio $R \supset E$. Olkoon $D = \{R_j\}$ R:n jako äärellisen moneen suljettuun suorakulmioon R_j, joilla ei ole yhteisiä sisäpisteitä. Karakteristiseen funktioon χ_E liittyy yläsumma

$$M_D = \sum_j G_j \ell(R_j), \quad G_j = \begin{cases} 1, & R_j \cap E \neq \emptyset; \\ 0, & R_j \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

Merkitään

$$B_D = \bigcup \{R_j \colon R_j \cap E \neq \emptyset\}, \quad \text{jolloin } B_D \text{ mitallinen ja}$$
$$M_D = \sum_{R_j \cap E \neq \emptyset} \ell(R_j) \overset{\text{L. 1.17}}{=} m(B_D).$$

Vastaava alasumma on

$$m_D = \sum_j g_j \ell(R_j), \quad g_j = \begin{cases} 1, & R_j \subset E; \\ 0, & R_j \not\subset E. \end{cases}$$

Merkitään

$$A_D = \bigcup \{R_j \colon R_j \subset E\}, \quad \text{jolloin } A_D \text{ on mitallinen ja}$$
$$m_D = m(A_D).$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. E Jordan-mitallinen $\Rightarrow$ χ_E Riemann-integroituva $\Rightarrow$

$$\exists \text{ jako } D \text{ s.e. } M_D - m_D < \varepsilon$$
$$B_D = (B_D \setminus A_D) \cup A_D \text{ erillinen yhdiste}$$
$$\Rightarrow\ m(B_D \setminus A_D) = m(B_D) - m(A_D) = M_D - m_D < \varepsilon$$
$$A_D \subset E \subset B_D \overset{\text{L. 1.70}}{\Longrightarrow} E \text{ mitallinen.}$$

Lisäksi

$$m(A_D) \le m(E) \le m(B_D) \quad \text{ja}$$
$$m(A_D) = m_D \le m_J(E) \le M_D = m(B_D)$$
$$\Rightarrow\ -\varepsilon < m_D - M_D \le m(E) - m_J(E) \le M_D - m_D < \varepsilon$$
$$\text{t.s.} \quad |m(E) - m_J(E)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow\ m(E) = m_J(E).$$

□

Seuraus. Tunnetut (Riemann-integroimalla saadut) pinta-ala-/tilavuuskaavat ovat voimassa.
Esim. Merkitään $B^n(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ (avoin kuula).

$$m_2\big(B^2(x,r)\big) = \pi r^2\,; \quad m_3\big(B^3(x,r)\big) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Lisätieto: (ei todisteta) $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mitallinen $\iff$ E rajoitettu ja $m_n(\partial E) = 0$.

1.73 Ei-(Lebesgue-)mitallinen joukko $\mathbb{R}$:ssä

Lause 1.74. *(Vitali, 1905)*

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

eli $\exists\ E \subset \mathbb{R}$, *joka ei ole Lebesgue-mitallinen.*

Ideana on löytää joukko $B \subset \mathbb{R},\ 0 < m^*(B) < \infty$, ja B:n ositus

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

erillisiin joukkoihin A_i s.e.

$$m^*(A_i) = m^*(A_1)\ \forall i.$$

Tällöin jonkin joukoista A_i on oltava ei-mitallinen. Yksi tapa varmistaa, että joukoilla A_i on sama ulkomitta, on pyrkiä valitsemaan

$$A_i = A + x_i$$

jollakin (kiinteällä) joukolla $A \subset \mathbb{R}$ ja $x_i \in \mathbb{R}$ ja käyttää ulkomitan siirtoinvarianssia.

Tod. Tarkastellaan tekijäryhmää $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, jonka alkiot ovat ekvivalenssiluokkia $E(x),\ x \in \mathbb{R}$.

$$E(x) = E(y) \iff x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Voidaan kirjoittaa $E(x) = x + \mathbb{Q}$. Valitaan jokaisesta ekvivalenssiluokasta $E(x),\ x \in \mathbb{R}$, täsmälleen yksi edustaja, joka kuuluu väliin $[0, 1]$. Olkoon A näiden joukko.

Väite: $A \notin \operatorname{Leb}\mathbb{R}$.

Vastaoletus: $A \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}$.

(i) Joukot $A + r,\ r \in \mathbb{Q}$, ovat erillisiä:

$$\begin{aligned} x \in (A + r) \cap (A + s),\ r, s \in \mathbb{Q} &\Rightarrow x = a_1 + r \text{ ja } x = a_2 + s, \quad a_1, a_2 \in A \\ &\Rightarrow a_1 - a_2 = s - r \in \mathbb{Q} \\ &\Rightarrow a_1 \sim a_2 \Rightarrow E(a_1) = E(a_2) \\ &\Rightarrow a_1 = a_2 \quad \text{(koska valittiin \underline{täsm.} yksi alkio)} \\ &\Rightarrow s = r. \end{aligned}$$

(ii) $m(A) = 0$ (käytetään "siirtoinvarianssia": $A \in \operatorname{Leb}\mathbb{R} \Rightarrow A + a \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}$ ja $m(A) = m(A + a)$):

$$\begin{aligned} A \subset [0, 1] &\Rightarrow A + \frac{1}{n} \subset [0, 2] \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow 2 \geq m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A + \frac{1}{n})\Big) \overset{\text{erill.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} m(A + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A) \\ &\Rightarrow m(A) = 0. \end{aligned}$$

(iii) $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}}(A + r)$:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Rightarrow \exists a \in E(x) \cap A \Rightarrow x - a = r \in \mathbb{Q},\ a \in A \\ &\Rightarrow x = a + r, \quad a \in A \\ &\Rightarrow x \in A + r. \end{aligned}$$

(i), (ii) ja (iii) $\Rightarrow$

$$+\infty = m(\mathbb{R}) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} m(A+r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \underbrace{m(A)}_{=0} = 0. \ \underline{\text{RR}}$$

$\square$

Huomautus 1.75. 1. Myös $\mathbb{R}^n$:ssä, $\forall n \geq 1$, $\exists$ samantyyppinen esimerkki, joten

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

2. Jos $A \subset \mathbb{R}$ on mikä tahansa joukko s.e. $m^*(A) > 0$, niin $\exists$ $B \subset A$ s.e. $B \notin \operatorname{Leb}\mathbb{R}$. (HT)

<u>Lisätieto</u>: (<u>Banach-Tarski paradoksi</u>, 1924): Mikä tahansa $\mathbb{R}^3$:n suljettu kuula $\overline{B}$ voidaan <u>osittaa</u> äärellisen moneen (erilliseen) palaan A_j

$$\overline{B} = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$$

(sopivalla $m \geq 2$) ja sitten järjestellä palat uudelleen kuvauksilla

$$g_j\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ g_j(x) = y_j + T_j(x),$$

missä $y_j \in \mathbb{R}^3$ ja $T_j\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarinen kierto ($j = 1, \ldots, m$) niin, että syntyy kaksi $\overline{B}$:n kanssa samankokoista (s.o. sama säde) suljettua kuulaa. Lebesguen mitta siirto- ja kiertoinvariantti $\Rightarrow$ joukot $A_1, \ldots, A_m$ eivät mitallisia.

2 Mitalliset kuvaukset

2.1 Johdanto: Funktio jota voi integroida

Mittateoriamme on valmis; voimme rakentaa integrointiteorian. Kuten esipuheessa kävi ilmi, uusi integrointimetodimme toimii vain funktioilla, joiden alkukuvat $f^{-1}[y,\infty)$ (tai $f^{-1}[y,\infty]$), kaikilla $y \in \mathbb{R}$, ovat sellaisia joukkoja, joille osaamme määrätä mitan, eli Lebesgue mitallisia. Tämä tarjoaa luonnollisimman määritelmän "funktiolle jota voi integroida". Vaikka virallisella määritelmällä on puolensa, niin sen juuria ei kannata unohtaa.

Oletetaan, että alkukuvat $f^{-1}[y,\infty]$, $y \in \mathbb{R}$ ovat mitallisia joukkoja. Ensimmäinen askel kohti mitallisen funktion "modernia" määritelmää on yksinkertainen huomio, että alkukuva "kunnioittaa" komplementtia, yhdistettä ja leikkausta:

$$f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c, \quad f^{-1}\big(\bigcup_\alpha E_\alpha\big) = \bigcup_\alpha f^{-1}(E_\alpha), \quad f^{-1}\big(\bigcap_\alpha E_\alpha\big) = \bigcap_\alpha f^{-1}(E_\alpha).$$

Näiden identiteettien avulla joukkojen $f^{-1}[y,\infty]$, $y \in \mathbb{R}$ mitallisuudesta seuraa, että myös monimutkaisempien joukkojen alkukuvat ovat mitallisia. Esimerkiksi, väli $(y,\infty]$ voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä $\bigcup_{n=1}^\infty [y+1/n,\infty]$, joten $f^{-1}(y,\infty] = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}[y+1/n,\infty]$ on mitallinen. Samoin, koska väli $[-\infty,y)$ voidaan esittää komplementtina $[y,\infty]^c$, päättelemme, että alkukuva $f^{-1}[-\infty,y) = (f^{-1}[y,\infty])^c$ on mitallinen, kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Sen jälkeen huomaamme, että avoimien välien alkukuvat $f^{-1}(x,y) = f^{-1}[-\infty,y) \cap f^{-1}(x,\infty]$ ovat mitallisia.

Seuraava tärkeä karakterisaatiotulos osoittaa, että voimme mennä vieläkin pidemmälle:

Lause 2.2 (Mitallisen Kuvauksen Karakterisaatio)**.** *Merkitään $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. Seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä.*

(1) $f^{-1}(G)$ *on mitallinen kaikilla avoimilla* $G \subset \mathbb{R}$*;*
ja lisäksi alkukuvat $f^{-1}(\infty)$ *ja* $f^{-1}(-\infty)$ *ovat mitallisia.*

(2) $f^{-1}[-\infty,a) = \{x \in A\colon f(x) < a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(3) $f^{-1}(a,\infty] = \{x \in A\colon f(x) > a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(4) $f^{-1}[-\infty,a] = \{x \in A\colon f(x) \le a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$;

(5) $f^{-1}[a,\infty] = \{x \in A\colon f(x) \ge a\}$ *on mitallinen* $\forall a \in \mathbb{R}$.

Todistus. Huomiot yllä riittävät perusteluksi, miksi kohdat (2)-(5) ovat yhtäpitäviä. [Lukijan on kuitenkin suositeltavaa selvittää itselleen ainakin muutama yksityiskohta.] Jäljellä on siis osoittaa, että kohta (1) on yhtäpitävä esimerkiksi kohdan (2) kanssa.

(1)⇒(2): Tämä seuraa huomiosta $f^{-1}[-\infty,a) = f^{-1}(-\infty) \cup f^{-1}(-\infty,a)$.

(2)⇒(1): Olemme jo todenneet kohdat(2)-(5) yhtäpitäviksi, joten voimme käyttää kaikkia. Niiden avulla tiedämme, että avoimen välin alkukuva on mitallinen. Nyt meidän tarvitsee vain muistaa, että avoin joukko $G \subset \mathbb{R}$ voidaan aina esittää numeroituvana yhdisteenä avoimia välejä $G = \bigcup_n I_n$ (L. 1.45). Näin ollen mielivaltaisen avoimen joukon alkukuva

$$f^{-1}(G) = \bigcup_n f^{-1}(I_n),$$

on mitallinen. □

Kysymys: Huomasitko missä tarvitsimme tietoa, että joukko A on mitallinen? Vastaus: komplementeissa. Silloin kun lähtöavaruus A ei ole koko $\mathbb{R}$, pätee esimerkiksi $f^{-1}([a,\infty]^c) =$

$A \setminus f^{-1}[a, \infty]$. Tämä "alkukuvan komplementti joukon A suhteen" ei välttämättä ole mitallinen, ellei A ole. Siksi meidän on oletettava se.

Edellisen karakterisaation seuraus on, että voimme (loogisessa mielessä) yhtä hyvin ottaa mitallisen funktion viralliseksi kriteeriksi avoimien joukkojen alkukuvien mitallisuuden. Idea ei ole huono sillä, kuten Carathéodoryn ehto, tämä määritelmä on kätevämpi yleistää abstrakteihin asetelmiin. Määritelmän motivaatio on kuitenkin integraaliprosessissa: Mitallinen funktio on sellainen, jota voi integroida esipuheessa kuvatulla menetelmällä.

2.3 Mitallinen kuvaus

Seuraa virallinen määritelmä. Jaamme sen kahteen osaan: skalaariarvoisiin funktioihin (maalijoukkona $\dot{\mathbb{R}}$); sekä vektoriarvoisiin funktioihin (maalijoukkona $\mathbb{R}^m$). Emme tällä kurssilla varsinaisesti tarvitse vektoriarvoista mitallisuutta, mutta sitä kannattaa tutkia vähintään harjoituksen vuoksi.

Määritelmä 2.4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$.
Skalaariarvoinen funktio: Sanomme, että kuvaus $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ on *mitallinen*, jos

(i) $f^{-1}G$ on mitallinen kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}$,

(ii) $f^{-1}(+\infty)$ on mitallinen ja

(iii) $f^{-1}(-\infty)$ on mitallinen.

Vektoriarvoinen funktio: kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ on *mitallinen* (σ-algebran $\mathrm{Leb}\,\mathbb{R}^n$ suhteen), jos $f^{-1}G$ on (Lebesgue-)mitallinen kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}^m$.

Huomautus 2.5. Vektoriarvoisessa tapauksessa kuvaus ei voi saada "äärettömyyksiä". Siksi meidän ei tarvitse muotoilla skalaaritapausta vastaavia kohtia (ii) ja (iii). Lisäksi, voimme käyttää tietoa että avoin joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä n-väleistä (L. 1.45), joten $f^{-1}(G) = \bigcup_n f^{-1}(I_n)$. Näin ollen vektoritapauksessa *riittää tarkistaa n-välien alkukuvien mitallisuus.*
Lisätieto: Vaihtoehtoinen tapa määritellä vektoriarvoisen kuvauksen $f = (f_1, \dots f_m)$ mitallisuus on vaatia sen komponenttien $f_i, i = 1, \dots m$ mitallisuus (Lause 2.10). Täten yleisen kuvauksen mitallisuus palautuu loppujen lopuksi skalaaritapaukseen.

Muistutus. Älä unohda Karakterisaatiota 2.2. Se on erittäin hyödyllinen käytännön toimenpiteissä, koska monesti on paljon helpompi tarkistaa yksinkertaisempien alkukuvien $f^{-1}[-\infty, a)$ mitallisuus kuin kohta (i).

Määritelmästä seuraavia välittömiä huomioita:

1. Määritelmässä esiintyvä lähtöjoukko A on automaattisesti mitallinen: Vektoritapauksessa tieto seuraa huomiosta, että A on avoimen joukon $\mathbb{R}^m$ alkukuva $A = f^{-1}\mathbb{R}^m$.

   Samoin skalaaritapauksessa A on avoimen joukon $\mathbb{R}$ ja "äärettömyyksien" alkukuvien yhdisteenä mitallinen (jos f on mitallinen):

$$A = f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\infty) \cup f^{-1}(-\infty).$$

2. Jos rajoitamme kuvauksemme mitalliseen osajoukkoon $B \subset A$, rajoitettu kuvaus $f|B$ on mitallinen joukossa B: tämä seuraa perusidentiteetistä joka pätee rajoittuman alkukuvalle

$$(f|B)^{-1}(G) = \underbrace{B}_{\text{mitallinen}} \cap f^{-1}G.$$

   Joten jos joukko G on avoin ja f mitallinen, niin myös alkukuva $(f|B)^{-1}(G)$ on mitallinen.

On aika etsiä mitallisia kuvauksia. Toivottavasti ainakin jatkuvat funktiot ovat mitallisia, koska niitä nyt vähintään haluamme integroida.

Jatkuvuuden ominaisuuksien muistutus: (Vektorianalyysi/Topo I) Kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, on jatkuva pisteessä $x \in A$, jos $\forall \varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.e.

$$f\big(B(x,\delta) \cap A\big) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

$f\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva, jos f on jatkuva kaikissa pisteissä $x \in A$.

Jatkuvuudelle löytyy yhtäpitävä *karakterisaatio avoimien joukkojen avulla* (Topo I): Kuvaus $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva jos ja vain jos kaikkien avoimien joukkojen $G \subset \mathbb{R}^m$ alkukuva $f^{-1}G$ on avoin A:ssa.

Lisäksi muistamme tuloksen (Topo I), että joukko $f^{-1}G$ on avoin A:ssa jos ja vain jos löytyy avoin $V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $f^{-1}G = V \cap A$.

Jatkuvan funktion mitallisuus on nyt suora seuraus mitallisuuden määritelmästä yhdistettynä tähän jatkuvuuden karakterisaation.

Lause 2.6. *Jatkuva funktio $f\colon A \to \mathbb{R}^m$* mitalliselta *joukolta A on mitallinen kuvaus.*

Tod. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^m$ avoin. Tehtävämme on tarkistaa, että alkukuva $f^{-1}G$ on mitallinen joukko. No, funktion f jatkuvuudesta seuraa, että $f^{-1}G$ on avoin joukko A:ssa. Näin ollen löytyy avoin $V \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $f^{-1}G = V \cap A$. Lopuksi muistamme, että avoimet joukot ovat mitallisia, joten siksi leikkaus $V \cap A$ on mitallinen. (Huomaa, että lopussa tarvitsemme lähtöjoukon A mitallisuutta.) □

Keskeytetään hetkeksi mitallisten funktoiden metsästys ja viedään loppuun eräs päättely, jonka panimme alulle luvun johdannossa.

Muista kuinka helposti alkukuvien $f^{-1}[a,\infty]$ mitallisuudesta seurasi avoimien joukkojen alkukuvien mitallisuus. Syy oli siinä, että alkukuva kunnioittaa komplementteja, yhdisteitä ja leikkauksia. Miksi pysähtyä avoimiin joukkoihin? Esimerkiksi, suljettu joukko F on avoimen joukon F^c komplementti, joten suljetun joukon alkukuva $f^{-1}F = f^{-1}(F^{cc}) = (f^{-1}(F^c))^c$ on mitallinen. Samoin voimme päätellä, että $\mathcal{G}_\sigma$-joukon $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$ alkukuva on mitallinen. Identtisesti myös $\mathcal{F}_\sigma$ joukon $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ alkukuva on mitallinen, ja niin edelleen. Kysymys kuuluu: kuinka pitkälle pääsemme?

Seuraavan tulos on aika ajoin hyödyllinen myöhemmillä kursseilla, mutta nyt kannattaa ennen kaikkea keskittyä sen todistusmetodiin. Idea on elegantti, mutta äärimmäisen abstrakti, mikä on seurausta Borel-joukkojen määritelmän abstraktiudesta.

Lause 2.7. *Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallinen. Silloin alkukuva $f^{-1}B$ on mitallinen kaikilla Borel-joukoilla $B \subset \mathbb{R}^m$.*

Todistus. Miten lähestyisimme ongelmaa? Meidän kannattaa aloittaa kokoamalla kaikki joukot, joiden alkukuva on mitallinen: määritellään perhe $\Gamma = \{V \subset \mathbb{R}^m \colon f^{-1}V \text{ mitallinen}\}$. Voimme nyt muotoilla väitteen yhtäpitävästi näin: Perhe Γ sisältää Borel-joukot.

Borel-joukkojen perhe määriteltiin pienimpänä σ-algebrana joka sisältää suljetut joukot. Olemme edellä todenneet, että suljettujen joukkojen alkukuva on mitallinen, joten ainakin suljetut joukot sisältyvät kokoelmaan Γ. Jos Γ "sattuisi" nyt olemaan σ-algebra, niin Borel-joukkojen *määritelmä* takaisi $\Gamma \supset \operatorname{Bor}\mathbb{R}^m$ ja todistus olisi valmis!

Osoitamme siis, että Γ toteuttaa σ-algebran aksioomat:

(1) $f^{-1}\emptyset = \emptyset$ mitallinen $\Rightarrow\ \emptyset \in \Gamma$,

(2) $V \in \Gamma \ \Rightarrow\ f^{-1}V^c = \underbrace{A}_{\text{mitallinen}} \setminus \underbrace{f^{-1}V}_{\text{mitallinen}}$ mitallinen $\Rightarrow\ V^c \in \Gamma$,

(3) $V_i \in \Gamma,\ i \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ f^{-1}\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i\big) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}V_i}_{\text{mitallinen}}$ mitallinen $\Rightarrow\ \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \in \Gamma$.

Täten Γ on sigma-algebra joka sisältää suljetut joukot, joten pienin sigma-algebra joka sisältää suljetut joukot on Γ:n osaperhe. $\square$

Huomio: Kokoelman $\{V \subset \mathbb{R}^m \colon f^{-1}V \text{ mitallinen}\}$ σ-algebrallisuus, riippuu jälleen siitä, että alkukuva kunnioittaa komplementteja ja yhdisteitä.

Korollari 2.8. *f mitallinen $\Rightarrow$ pisteen alkukuva on mitallinen.*

Seuraava tulos on hyödyllinen ja sen todistus on hyvä pieni käsite-harjoitus.

Lause 2.9. *Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallinen, $A \subset \mathbb{R}^n$, ja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jatkuva. Silloin $g \circ f$ on mitallinen.*

Todistus on suoraviivainen sovellus määritelmiä: olkoon $G \subset \mathbb{R}^k$ avoin. Yhdistetyn funktion alkukuva $(g \circ f)^{-1}G$ voidaan kirjoittaa muodossa $f^{-1}(g^{-1}G)$. Koska g on jatkuva, alkukuva $g^{-1}G$ on avoin. Koska f on mitallinen, avoimen joukon $g^{-1}G$ alkukuva $f^{-1}(g^{-1}G)$ on mitallinen. Näin ollen yhdistetty funktio $g \circ f$ on mitallinen. $\square$

Lisätieto: yleistys. Jos jatkuva funktio g on määritelty vain osajoukossa $B \subset \mathbb{R}^m$, niin silloin alkukuva $g^{-1}G$ on avoin B:ssä, eli löytyy avoin $V \subset \mathbb{R}^m$ siten, että $g^{-1}G = B \cap V$. Jotta voisimme nyt päätellä alkukuvan $f^{-1}(g^{-1}G) = f^{-1}(B \cap V)$ mitallisuuden, meidän pitää tehdä lisäoletuksia. Esimerkiksi, riittää olettaa, että B on Borel joukko, tai että $fA \subset B$.

Varoitus: Vaikka mitalliset funktioita koskevat tulokset muistuttavat osittain eräitä jatkuvien funktioiden tuloksia niin analogia ei ole täydellinen: f ja g mitallisia $\not\Rightarrow$ $g \circ f$ mitallinen. Tiedä myös, että mielivaltaisen Lebesgue-mitallisen joukon alkukuva ei välttämättä ole mitallinen.

Edellistä tulosta apuna käyttäen on mukava osoittaa vektoriarvoisen mitallisen kuvauksen karakterisaatio sen komponenttien mitallisuuden avulla.

Notaatio: Jos $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, niin merkitsemme

$$f = (f_1, \dots, f_m),\ f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big),$$

missä

$$f_j\colon A \to \mathbb{R},\ f_j(x) = (P_j \circ f)(x) \text{ ja } P_j(y_1, \dots, y_m) = y_j \ (P_j \text{ projektio } j\text{:nnelle koord.}).$$

Lause 2.10. *$f = (f_1, \dots, f_m)\colon A \to \mathbb{R}^m$ on mitallinen $\iff$ f_j on mitallinen $\forall j \in \{1, \dots, m\}$.*

Tod. $\boxed{\Rightarrow}$ Jos f on mitallinen, niin $f_j = P_j \circ f$ on mitallinen (L. 2.9), sillä P_j jatkuva.

$\boxed{\Leftarrow}$ Oletetaan, että f_j on mitallinen kaikilla j. Tehtävämme helpottuu huomattavasti kun muistamme Huomion 2.5, jonka ansiosta *riittää tarkistaa n-välin alkukuvan $f^{-1}(I_n)$ mitallisuus.* Huomaamme, että n-väli voidaan esittää projektioiden alkukuvien leikkauksena: $I = I_1 \times \cdots \times I_m = \bigcap_{j=1}^m P_j^{-1} I_j$[7].

[7] Miksi? Koska $x \in I \Leftrightarrow x_i \in I_i = P_i(I), \forall i = 1, \dots, m \Leftrightarrow x \in P_i^{-1}(I), \forall i = 1, \dots, m$.

Tämän esityksen avulla voimme päätellä, käyttäen oletusta koordinaattifunktion $f_j = P_j \circ f$ mitallisuudesta, että alkukuva

$$f^{-1}I = \bigcap_{j=1}^{m} f^{-1}P_j^{-1}I_j = \bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{(P_j \circ f)^{-1}I_j}_{\text{mitallinen}},$$

on mitallinen. □

Lause 2.11. *Mitallisten funktioiden $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ summa ja tulo ovat mitallisia (mikäli määriteltyjä). Samoin λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, ja $|f|^a$, $a > 0$, ovat mitallisia.*

Todistus. $\boxed{\text{Summa.}}$ Ensin tapaus, jossa funktiot saavat äärellisiä arvoja: olkoot $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ mitallisia. Ovela, joskaan ei suoraviivainen, idea on kirjoittaa kuvaus $x \mapsto f(x) + g(x)$ yhdisteenä mitallisesta ja jatkuvasta kuvauksesta: $f + g = u \circ v$, missä

$$A \xrightarrow{v} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{u} \mathbb{R}, \quad v = (f, g) \quad \text{ja} \quad u(x, y) = x + y.$$

Nyt, Lauseen 2.10 mukaan, vektoriarvoinen kuvaus v on mitallinen, ja lisäksi u on selvästi jatkuva. Näin ollen Lauseen 2.9 nojalla yhdistetty kuvaus $f + g = u \circ v$ on mitallinen.

<u>Lisätieto:</u> Vektoriarvoisen summan mitallisuus, jossa $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$, todistuu identtisellä päättelyllä. Eli pätee tulos: Jos kuvaukset $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$ ovat mitallisia niin summa $f + g$ on mitallinen.

Nyt tapaus, jossa sallitaan äärettömyydet: olkoot $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja summa $f + g$ hyvin määritelty. [Summa $f + g$ on määritelty, jos missään $x \in A$ ei ole $f(x) = +\infty$, $g(x) = -\infty$, tai päinvastoin.] Merkitään $f + g = h$. Tiedetään, että A on mitallinen. Haluamme soveltaa alkuosaa, joten pyrimme poistamaan joukot, joissa joko f tai g saa äärettömyyksiä. Siksi muodostamme joukon $A_0 := A \setminus [f^{-1}(+\infty) \cup f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(-\infty)]$, josta "äärettömyydet on poistettu". A on selvästi mitallinen.

Nyt voimme *soveltaa alkuosaa äärellisiin rajoittumiin* $f|A_0$ ja $g|A_0$, josta voimme päättelellä, että rajoittuma $h|A_0$ on mitallinen. Täten kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}$ alkukuva $(h|A_0)^{-1}(G) = h^{-1}(G) \cap A_0 = h^{-1}(G)$ on mitallinen. Lisäksi äärettömyyksien alkukuvat

$$\begin{aligned} h^{-1}(+\infty) &= f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty) \ \text{ ja} \\ h^{-1}(-\infty) &= f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty) \ \ , \end{aligned}$$

ovat mitallisia[8]. Siispä summa $h = f + g$ on mitallinen.

$\boxed{\text{Tulo.}}$ Samoin (HT)

$\boxed{\lambda f}$ Erikoistapaus tulosta.

$\boxed{|f|^a}$ $|f|^a = u \circ f$, missä $u(x) = |x|^a$ jatkuva, jos $a > 0$. L. 2.9 $\Rightarrow$ $|f|^a$ on mitallinen. □

Tästä lähtien tarkastellaan vain funktioita $f\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Lisätieto: Mitallinen kuvaus abstraktissa mittateoriassa

Olkoon X mielivaltainen joukko ja $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra.

Määritelmä: Kuvaus $f\colon X \to \mathbb{R}$ on *mitallinen* (σ-alg. Γ suhteen), jos $f^{-1}G \in \Gamma$ kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}$.

[8]Ensimmäisen identiteettin perustelu: $h(x) = f(x) + g(x) = \infty$ jos ja vain jos $f(x) = \infty$ tai $g(x) = \infty$.

3 Lebesguen integraali

Meillä on mitallisia joukkoja. Meillä on integroitavia funktioita. Meillä on kaikki tarvittava integraalin luomiseen esipuheen inspiraatiota noudattaen.

Lisätieto: Eräs nopea reitti rakentaa positiivisen funktion Lebesgue-integraali on määritellä se suoraan Riemann-integraali-kaavan (-1.2) avulla:

$$(L)\int f := (R)\int_0^\infty m(f^{-1}[y,\infty])\, dy,$$

Joskus näin näkee tehtävän, mutta tällä kurssilla noudatamme vakiintuneempaa käytäntöä, joka ei "mainitse Riemann-integraalia ääneen". On joka tapauksessa mielenkiintoista tiedostaa, että emme varsinaisesti *tarvitse* uutta integraalin konstruktiota, vaan voimme halutessamme muotoilla kaiken klassisen teorian avulla... siis kunhan meillä on mitta.

3.1 Yksinkertaiset funktiot

Muistathan esipuheen tavoitteen antaa pinta-ala "vaakapalkeille" intuition sanelemalla periaatteella kanta-kertaa-korkeus. Luodaan käsite joka auttaa meitä ilmaisemaan ideoitamme:

Määritelmä 3.2 (Karakteristinen funktio)**.** Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $\chi_E \colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ joukon E karakteristinen funktio

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in E, \\ 0, & \text{jos } x \notin E. \end{cases}$$

Karakteristinen funktio "edustaa vaakapalkkia jolla on kanta E ja korkeus 1". Mitallisilla "kantajoukoilla" ja niiden karakteristisilla funktioilla on tärkeä yhteys:

Lemma 3.3. *Joukon E karakteristinen funktio χ_E on mitallinen funktio jos ja vain jos E on mitallinen joukko.*

Tod. $\boxed{\Rightarrow}$ Tämä seuraa huomiosta $E = \chi_E^{-1}(0,\infty]$. (Seuraa myös Korollaarista 2.8, sillä $E = \chi_E^{-1}(1)$.)

$\boxed{\Leftarrow}$ Olkoon E mitallinen ja $G \subset \mathbb{R}$ avoin. Helposti voi todeta, että pätee

$$\chi_E^{-1}(G) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \text{jos } \{0,1\} \subset G, \\ \emptyset, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \emptyset, \\ E, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \{1\}, \\ E^c, & \text{jos } \{0,1\} \cap G = \{0\}. \end{cases}$$

Nämä joukot ovat mitallisia, joten χ_E mitallinen funktio. □

Matemaattinen huomio: Todistus ei itse asiassa käyttänyt joukon G avoimuutta. Mitalliselle karakteristiselle (toisin kuin yleiselle mitalliselle) funktiolle päteekin, että alkukuva $\chi_E^{-1}(A)$ on mitallinen ihan kaikilla joukoilla A. Tällä tiedolla ei käytännössä ole mitään merkitystä.

Filosofinen huomio: Jos löytyisi mitallinen joukko E jonka karakteristinen funktio ei olisi mitallinen (lue:"integroitava"), olisimme pulassa. Miksi? Koska karakteristisen funktion χ_E on tarkoitus edustaa "vaakapalkkia". Jos emme voi integroida funktiota χ_E, silloin myös vaakapalkin pinta-alan mielekkyys muuttuu epävarmaksi. Mieti asiaa.

On hyödyllistä määritellä myös äärellinen lineaarikombinaatio karakteristisista funktioista:

Määritelmä 3.4. (Yksinkertainen funktio) Funktio $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ on *yksinkertainen*, jos sillä on esitys

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}}, \tag{3.5}$$

missä $a_i \geq 0$ ja $A_i, i = 1, 2, \dots k$, ovat mitallisia joukkoja.

Merkitään $Y = \{f \mid \ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ yksinkertainen}\} \quad (\text{tai } Y_n)$.

Huomautus 3.6.
1. $f \in Y \ \Rightarrow \ f(x) \neq \infty \ \forall x$. Eli yksinkertainen funktio saa vain *äärellisiä* arvoja.
2. $f \in Y,\ E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \ \Rightarrow \ f\chi_E \in Y$.
3. Jos f on yksinkertainen, se saa vain *äärellisen monta* eri arvoa.

Tarina jatkuu: Vaakapalkin mitta.[9] Jos karakteristinen funktio edustaa "yhtä vaakapalkkia", niin yksinkertainen funktio edustaa "vaakapalkkien kokoelmaa". Nyt keskeinen kysymys kuuluu: miten määräämme vaakapalkin alan? Huomaa, että vaakapalkki on konkreettinen joukko, nimittäin karteesinen tulo $E \times [0,a)$, joten *jos* sillä on mielekäs "ala" niin se on luultavasti mitta $m_{n+1}(E \times [0,a))$. Mutta onko tämä karteesinen tulo mitallinen? Seuraava lemma vastaa kysymykseen myönteisesti.

Lemma 3.7. *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^p$ m_p-mitallinen ja joukko $B \subset \mathbb{R}^q$ m_q-mitallinen. Tällöin karteesinen tulo $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on m_{p+q}-mitallinen ja pätee $m_{p+q}(A \times B) = m_p(A)m_q(B)$.*

Heuristinen perustelu. On intuitiivisesti selvää, että *aina* (ovat A ja B mitallisia tai eivät) pätee $m^*_{p+q}(A \times B) \leq m^*_p(A)m^*_q(B)$. Miksi? Koska jos tulon $A \times B$ "leveys" on *enintään* $m^*_p(A)$ ja vastavasti "korkeus" *enintään* $m^*_q(B)$, niin $A \times B$:n mitta voi olla *enintään* $m^*_p(A)m^*_q(B)$.

Identtisellä päättelyllä on selvää, että tulon $A \times B$ mitta on *vähintään* $m_{p*}(A)m_{q*}(B)$, joten pätee $m_{p+q*}(A \times B) \geq m_{p*}(A)m_{q*}(B)$.

Nyt jos joukot A ja B ovat *mitallisia*, niin pätee $m_{p*}(A) = m^*_p(A)$ ja $m_{p*}(B) = m^*_q(B)$, joten myös $m_{p+q*}(A \times B) = m^*_{p+q}(A \times B)$, eli tulo $A \times B$ on mitallinen ja sen mitta on tulo $m_p(A)m_p(B)$.

Todistus.[10] Meidän pitää yksinkertaisesti osoittaa, että $A \times B$ toteuttaa Caratheodoryn ehdon kaikilla n-väleillä $I \times J \subset \mathbb{R}^{p+q}$, missä $I \subset \mathbb{R}^p$ ja $J \subset \mathbb{R}^q$ [$(p+q)$-n-väli voidaan aina esittää alempiulotteisien n-välien tulona.]:

$$m^*_{p+q}((I \times J) \cap (A \times B)) + m^*_{p+q}((I \times J) \setminus (A \times B)) \overset{?}{\leq} \ell(I \times J). \tag{3.8}$$

(Kysymysmerkki tarkoittaa, että tavoitteemme on osoittaa kyseinen epäyhtälö.) Aloitamme huomiolla, että karteesisten tulojen leikkaus on yhä karteesinen tulo: $(I \times J) \cap (A \times B) = (I \cap A) \times (J \cap B)$, ja erotus $(I \times J) \setminus (A \times B)$ on (erillinen) yhdiste karteesisista tuloista $(I \setminus A) \times (J \setminus B)$, $(I \setminus A) \times (J \cap B)$ ja $(I \cap A) \times (J \setminus B)$. Täten voimme subadditiivisuuden nojalla arvioida yhtälön (3.8) vasemman puolen toista termiä ylhäältä

$$m^*_{p+q}((I \times J) \setminus (A \times B)) \leq m^*_{p+q}((I \setminus A) \times (J \setminus B)) + m^*_{p+q}((I \setminus A) \times (J \cap B)) + m^*_{p+q}((I \cap A) \times (J \setminus B)). \tag{3.9}$$

[9] Lemma 3.7 ei ole rakennettavan teorian kannalta loogisesti välttämätön, mutta se osoittaa, että vaakapalkin pinta-ala on olemassa (Lebesgue-mittana) ja se todella määräytyy periaatteella kanta-kerta-korkeus. Tämä toimii motivaationa yksinkertaisen funktion integraalin määritelmälle.

[10] Periaatteessa idea on täysin sama kuin heuristisessa perustelussa, mutta Caratheodoryn ehdon tuomat yksityiskohdat peittävät yksinkertaisen idean.

Eli nyt meillä neljä karteesista tuloa joita pitäisi jotenkin arvioida ylhäältä. Puuttuva palanen on seuraava

Aputulos: Aina pätee

$$m^*_{p+q}(A \times B) \leq m^*_p(A) m^*_q(B), \tag{3.10}$$

ovat joukot mitallisia tai ei.

Aputuloksen todistus: Olkoon $\mathcal{F} = \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ joukon A Lebesguen peite ja $\mathcal{G} = \{J_k : k \in \mathbb{N}\}$ joukon B Lebesguen peite. Silloin perhe $\{I_n \times J_k : n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\}$ on karteesisen tulon $A \times B$ Lebesguen peite, joten ulkomitan määritelmän mukaan pätee

$$m^*_{p+q}(A \times B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\ell(I_n \times J_k)}_{\ell(I_n)\ell(J_k)}. \tag{3.11}$$

Ottamalla infimum yli peitteiden $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ (ja käyttämällä jälleen ulkomitan määritelmää) saamme väitteen (3.10).

Nyt käytämme aputulosta jokaiseen neljästä termistä, jolloin pääsemme eroon karteesisista tuloistamme

$$\begin{aligned} m^*_{p+q}((I \times J) \cap (A \times B)) + m^*_{p+q}((I \times J) \setminus (A \times B)) \quad &\leq \quad m^*_p(I \cap A) m^*_q(J \cap B) \\ &+ \quad m^*_p(I \setminus A) m^*_q(J \setminus B) \\ &+ \quad m^*_p(I \setminus A) m^*_q(J \cap B) \\ &+ \quad m^*_p(I \cap A) m^*_q(J \setminus B). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Vihdoin voimme käyttää tietoa, että joukot A ja B toteuttavat Caratheodoryn ehdon. Ryhmitellään oikean puolen termit ja käytetään ensin B:n mitallisuutta ja sitten A:n mitallisuutta:

$$\begin{aligned} & m^*_p(I \cap A)\big[m^*_q(J \cap B) + m^*_q(J \setminus B)\big] + m^*_p(I \setminus A)\big[m^*_q(J \setminus B) + m^*_q(J \cap B)\big] \\ = \quad & m^*_p(I \cap A)\ell(J) + m^*_p(I \setminus A)\ell(J) \\ = \quad & \ell(I)\ell(J) \\ = \quad & \ell(I \times J). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Yhdistämällä tämän ja edellisen arvion olemme osoittaneet, että Caratheodoryn ehto (3.8) pätee. Täten joukko $A \times B$ on m_{p+q}-mitallinen.

Mutta edellinen päättely osoittaa enemmän: koska $A \times B$ on toteuttaa Caratheodoryn ehdon (3.8) yhtäsuuruudella "=" (muista, että toinen suunta "$\geq$" on triviaali), niin *kaikki epäyhtälöt yllä esiintyvässä päättelyssä ovat itse asiassa yhtälöitä*! Erityisesti saamme yhtälön

$$m_{p+q}((I \times J) \cap (A \times B)) = m_p(I \cap A) m_q(J \cap B),$$

joka pätee *kaikilla* n-väleillä $I \times J$. Täten (osittamalla $\mathbb{R}^{p+q}$ erillisiin n-väleihin $[n, n+1) \times [k, k+1)$) voimme päätellä että $m_{p+q}(A \times B) = m_p(A) m_q(B)$. $\square$

Mitallinen funktio $a\chi_E$ edustaa "vaakapalkkia kannalla E ja korkeudella a" meidän olisi luonnollista määritellä funktion $a\chi_E$ integraaliksi $m(E \times [0, a))$. Edellisen lemman mukaan tämä mitta on kuitenkin vain $am(E)$ (eli "kanta-kertaa-korkeus-periaate" todella pätee), joten voimme ottaa viralliseksi määritelmäksi jälkimmäisen ilmaisun.

Määritelmä 3.14. Olkoon $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}$ yksinkertainen funktio. Tällöin f:n *integraali* (yli $\mathbb{R}^n : n$) on

$$I(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i). \qquad (\text{muista } 0 \cdot \infty = 0)$$

Lisäksi, jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin määrittelemme f:n integraalin yli joukon E seuraavasti:

$$I(f, E) = I(f\chi_E).$$

Erityisesti:

$$I(f) = I(f, \mathbb{R}^n),$$

$$0 \leq I(f, E) \leq \infty,$$

$$E \in \operatorname{Leb} \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; I(\chi_E) = m(E).$$

Huomautus 3.15. Koska yksinkertaisella funktiolla on aina monia eri esityksiä (esimerkiksi $\chi_E = 1/2\chi_E + 1/2\chi_E = \chi_{E\cap F} + \chi_{E\cap F^c}$), niin periaatteessa meidän pitäisi tarkistaa, että integraali eri esityksille antaa saman lopputuloksen. Muuten integraali ei ole hyvinmääritelty. Matemaatikon on hyvä olla hereillä ja hoksata tämä seikka, mutta varsinainen tarkistaminen jätetään jokaisen lukijan oman mielenkiinnon varaan.

Jokaisella yksinkertaisella funktiolla on eräs erityinen esitys, joka on usein hyödyllinen: Olkoon $f \in Y$ ja f:n eri arvot $a_1, \ldots, a_k \in [0, +\infty)$. Silloin joukot

$$A_i = f^{-1}(a_i) \quad \text{ovat mitallisia ja } \textit{erillisiä} \;, \quad \mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Näistä saatavaa esitystä

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{f^{-1}(a_i)},$$

kutsutaan *normaaliesitykseksi.* Eli normaaliesitys on sellainen missä joukot $A_i, i = 1, 2, \ldots k$, ovat erillisiä.

Normaaliesityksellä on helppo osoittaa, että tulkinta "integraali on pinta-ala" pätee yksinkertaisen funktion tapauksessa:

Lemma 3.16 (Integraali pinta-alana)**.** *Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ yksinkertainen. Määritellään sen graafin avulla joukko $\mathcal{G}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : 0 \leq y < f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Tällöin joukko $\mathcal{G}(f)$ on mitallinen ja pätee $I(f) = m_{n+1}(\mathcal{G}(f))$.*

Todistus. Valitaan normaaliesitys $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \chi_{A_i}$ jossa joukot A_i ovat erillisiä (ja mitallisia). Tällöin myös karteesiset tulot $A_i \times [0, a_i)$ ovat erillisiä ja mitallisia (L. 3.7), joten yhdiste $\bigcup_i A_i \times [0, a_i) = \mathcal{G}(f)$ on mitallinen. Lopuksi mitan täysadditiivisuus antaa meille

$$I(f) := \sum_{i=1}^{k} \underbrace{a_i m(A_i)}_{m_{n+1}(A_i \times [0, a_i))} = m_{n+1}\big(\underbrace{\bigcup_i A_i \times [0, a_i)}_{\mathcal{G}(f)}\big).$$

$\square$

Yksinkertaisen funktion integraalin ominaisuuksia

Periaatteessa olemme valmiit määrittelemään jo yleisen funktion integraalin. Maltetaan kuitenkin hetki ja tutkitaan yksinkertaista integraalia.

Lause 3.17. *Olkoon* $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}$ *yksinkertainen. Tällöin*

$$I(f,E) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E).$$

Tod. Huomaa aluksi, että yleisesti pätee $\chi_A \chi_E = \chi_{A\cap E}$. Näin ollen näemme $f\chi_E = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}\chi_E = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i \cap E}$, joten suoraan määritelmien mukaan päättelemme $I(f,E) = I(f\chi_E) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E)$. □

Seuraava tulos kertoo, että alkeellinen integraalimme on numeroituvan "täysadditiivinen". Se seuraa suoraan edellisestä lauseesta ja itse mitan täysadditiivisuudesta (Lause 1.39).

Lause 3.18. *Olkoot* E_j, $j \in \mathbb{N}$, *mitallisia ja erillisiä. Jos* $f \in Y$, *niin*

$$I\Big(f, \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} I(f, E_j).$$

Tod. Olkoon funktiolla f esitys $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$. Lauseen 3.17 mukaan

$$I\Big(f, \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\Big) = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j).$$

Koska $A_i \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_i \cap E_j)$, niin mitan täysadditiivisuus (Lause 1.39) sanoo $m(A_i \cap E) = \sum_{j\in\mathbb{N}} m(A_i \cap E_j)$, $\forall i = 1,\ldots,k$. Täten pätee

$$\begin{aligned} I\Big(f, \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\Big) &= \sum_{i=1}^k a_i \sum_{j\in\mathbb{N}} m(A_i \cap E_j) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^k a_i m(A_i \cap E_j) \\ &\overset{3.17}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} I(f, E_j). \end{aligned} \tag{3.19}$$

□

Huomautus 3.20. Selvästi $I(f,\emptyset) = I(f\chi_\emptyset) = I(0) = 0$, joten Lauseen 3.18 nojalla kuvaus

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty], \quad E \mapsto I(f,E)$$

on mitta jokaisella (kiinteällä) $f \in Y$.

Tällä huomiolla on yleisen mitan konvergenssilauseen 1.65 nojalla välitön seuraus:

Korollari 3.21. *Jos* $f \in Y$ *ja* $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ *ovat mitallisia, niin*

$$I\big(f, \bigcup_{j=1}^\infty E_j\big) = \lim_{j\to\infty} I(f, E_j).$$

Motivointia: Edellinen korollaari näyttelee tärkeää osaa integrointiteorian tärkeimmän tuloksen, Monotonisen konvergenssilauseen, standarditodistuksessa.

Lause 3.22. *Olkoot $f, g \in Y$, E mitallinen ja $a \geq 0$ vakio. Silloin*

(i) $f + g \in Y$ *ja* $I(f+g, E) = I(f, E) + I(g, E)$;

(ii) $af \in Y$ *ja* $I(af, E) = aI(f, E)$.

Oikeastaan nämä seuraavat suoraan integraalin määritelmästä, joka on muodostettu niin, että integraali on lineaarinen karakterististen funktioiden suhteen. Todistus käy silti käsiteharjoituksesta.
Tod. Olkoon funktioilla esitykset $f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j}$ ja $g = \sum_{i=1}^{\ell} b_i \chi_{B_i}$. Silloin yksinkertaisen funktion integraalin määritelmän nojalla summa $f + g$ on selvästi yksinkertainen ja pätee

$$\begin{aligned} I(f+g, E) &= I\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j} + \sum_{i=1}^{\ell} b_i \chi_{B_i}, E\Big) \\ &= I(a_1\chi_{A_1} + \ldots + a_k \chi_{A_k} + b_1 \chi_{B_1} + \ldots + b_\ell \chi_{B_\ell}, E) \\ &= \sum_{j=1}^{k} a_j m(A_j \cap E) + \sum_{i=1}^{\ell} b_i m(B_i \cap E) \\ &= I(f) + I(g). \end{aligned} \tag{3.23}$$

(ii): $af \in Y$ selvä.

$$a = 0 \;\Rightarrow\; I(af, E) = 0 = aI(f, E).$$

Olkoon $a > 0$ ja funktion f esitys $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$. Tällöin $af = \sum_{i=1}^{k} a a_i \chi_{A_i}$, joten

$$I(af, E) = \sum_{i=1}^{k} a a_i m(A_i \cap E) = a \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E) = aI(f, E).$$

□

Monotonisuusominaisuuksia.

Lause 3.24. *(1)* E *mitallinen ja* $f, g \in Y$, $f \leq g$ *(ts.* $f(x) \leq g(x)\ \forall x$*)* $\Rightarrow$ $I(f, E) \leq I(g, E)$;

(2) $E \subset F$ *mitallisia,* $f \in Y$ $\Rightarrow$ $I(f, E) \leq I(f, F)$;

(3) $f \in Y$, $m(E) = 0$ $\Rightarrow$ $I(f, E) = 0$.

Tod. (1): $g = f + (g - f)$, missä $g - f \geq 0$ ja $g - f \in Y$. Lause 3.22 $\Rightarrow$

$$I(g, E) \overset{3.22}{=} I(f, E) + \underbrace{I(g - f, E)}_{\geq 0} \geq I(f, E).$$

(2):

$$\left.\begin{aligned} E \subset F \;\Rightarrow\; 0 \leq \chi_E \leq \chi_F \\ f \in Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\chi_E \leq f\chi_F \quad (\in Y)$$

$$\Rightarrow I(f, E) = I(f\chi_E) \overset{(1)}{\leq} I(f\chi_F) = I(f, F).$$

(3): Jos $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ on jokin esitys, niin

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^{k} a_i \underbrace{m(A_i \cap E)}_{=0} = 0, \quad \text{sillä } A_i \cap E \subset E \text{ ja } m(E) = 0. \quad \square$$

Lisätieto. Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Funktio $f\colon X \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen, jos

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i},$$

missä $a_1, \ldots, a_k \geq 0$, ja $A_i \in \Gamma, i = 1, \ldots, k,$. Silloin f:n integraali on

$$I(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

Luvun 3.1 ominaisuudet ovat voimassa!

3.25 Lebesguen integraali, tapaus $f \geq 0$

Lebesguen integraali määritellään ensin ei-negatiivisille funktioille. Koska mikä tahansa funktio f voidaan esittää kahden ei-negatiivisen funktion erotuksena $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, missä $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ ja $f^-(x) := -\min\{f(x), 0\}$, joten tämä ei lopulta ole suuri rajoitus; mutta siitä lisää myöhemmin.

Nyt, vihdoin, teemme täsmälliseksi integrointi-prosessin idean. Matemaattisen formalismin kannalta on tyylikkäämpää puhua yksinkertaisista funktioista, joten muotoilemme approksimoinnin ja täten integraalin niiden avulla.

Seuraava tulos kertoo, että mikä tahansa ei-negatiivinen mitallinen funktio on raja-arvo yksinkertaisista funktioista. [11]

Lause 3.26. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geq 0$. Tällöin on olemassa nouseva jono 1-kertaisia funktioita $f_j \in Y$, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, s.e. $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Huomautuksia: Todistus on itse asiassa idioottimaisen suoraviivainen kunhan oppii näkemään sen monien yksityiskohtien läpi. Opettele tekemään niin. Lisähuomautuksena, funktion f mitallisuudella ei ole muuta tarkoitusta kuin varmistaa, *että muodostettavat yksinkertaiset funktiot f_j ovat myös mitallisia.* Tämä takaa, että voimme integroida approksimaatioita f_j. Sama väite ja sama todistus kuitenkin pätee, jos kaikki mitallisuudet unohdetaan.

Todistus. Idea tulee suoraan vaakapalkki-integroinnista: Ensimmäinen askel on jakaa pystyakseli $1/2^j$-pituisiin väleihin. Sen jälkeen muodostamme f:n "graafin approksimaation" *alkukuvien $f^{-1}[j, +\infty]$ mitallisten karakterististen funktioiden avulla.* (Katso esipuheen selitykset ja kuvat.)

Yksityiskohdat: Määritellään approksimaatiot $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ seuraavasti: Jaetaan $[0, j)$ erillisiin puoliavoimiin väleihin $I_1, \ldots, I_k$, joiden pituus on $1/2^j$, t.s.

$$I_i = [(i-1)2^{-j}, i2^{-j}), \quad i = 1, \ldots, k = j2^j.$$

Määritellään

$$f_j(x) = \begin{cases} (i-1)2^{-j}, & \text{kun } x \in f^{-1}I_i, \quad (\text{eli } (i-1)2^{-j} \leq f(x) < i2^{-j}) \\ j, & \text{kun } x \in f^{-1}[j, +\infty] \quad (\text{eli } f(x) \geq j). \end{cases}$$

[11] Tämä on yksi *kaikkein käytännöllisimmistä tavoista ajatella mitallisia funktioita.* Useimmat tulokset integrointiteoriassa palautuvat sen avulla yksinkertaisiin ja sitä kautta karakteristisiin funktioihin. (Parhaana esimerkkinä Fubinin lause kurssin lopussa.)

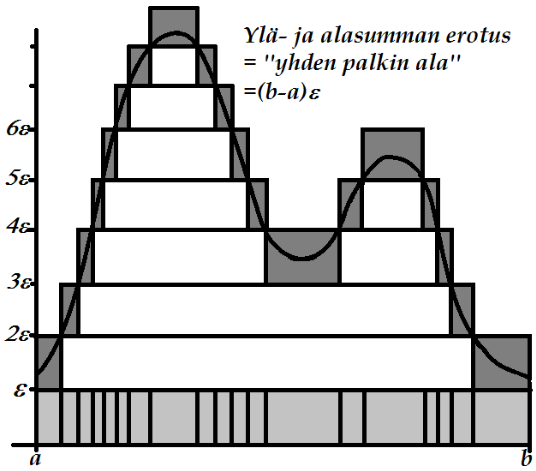
Strategia on siis valita approksimaation arvoksi $f_j(x)$ aina *"suurin jakoparametrin* $1/2^j$ *monikerta joka on pienempi kuin funktion arvo* $f(x)$*"*. Lukuunottamatta pisteitä joissa $f(x) = \infty$, tästä seuraa, että pätee $\underline{f_j(x) \leq f(x) \leq f_j(x) + 1/2^j}$, ainakin kaikilla $j > f(x)$. Tästä seuraa, että $f_j(x) \to f(x)$, kun $j \to \infty$ kaikilla x. (Huomaa: jos $f(x) = \infty$, niin $f_j(x) := j$.)

Lisäksi approksimaatiot ovat mitallisia, sillä alkukuvat $f^{-1}(I_i)$ ja $f^{-1}[j, +\infty]$ ovat mitallisia. Konstruktio takaa myös, että f_j saa äärellisen monta arvoa. Täten funktiot f_j ovat yksinkertaisia.

Viimeiseksi, koska jakoparametriksi valittiin $1/2^j$, niin jaot ovat "tiheneviä". Tällöin voi vakuuttua, että pätee voimassa monotonisuus $f_j \leq f_{j+1}$. (Pohdi ja piirrä kuva. Lisäile matemaattisia yksityiskohtia jos mieli tekee. Tärkeämpi materiaali on konstruktion idea.) □

Tarina jatkuu. Lauseessa 3.26 rakennetut yksinkertaiset funktiot edustavat esipuheen "vaakapalkkien perheitä". Näin ollen niiden integraalit $I(f_j)$ ovat ala-approksimaatioita "graafin alle jäävän alueen alalle". Approksimaatioiden nousevuudesta ja integraalin monotonisuudesta seuraa (L. 3.24), että jono $I(f_j)$ on monotoninen. Siksi on olemassa raja-arvo $\lim_{j\to\infty} I(f_j)$, joka alarajana funktion f mahdolliselle "integraalille" (jota emme vielä ole määritelleet).

Mutta entä yläraja? Riemann-integraali ja itse asiassa koko mittauksen filosofia opettaa meitä vaatimaan, että ylä- ja ala-arviot yhtyvät. Vastaus on yksinkertaisuudessaan fantastinen: ne yhtyvät automaattisesti.



Selkeyden vuoksi rajoitumme perustelemaan väitteen tapauksessa, jossa funktio $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ on rajoitettu ja häviää välin $[a, b]$ ulkopuolella (Kuva). Kaikki tarpeellinen on jo esillä Lauseen 3.26 todistuksessa; erityisesti epäyhtälössä $f_j(x) \leq f(x) \leq f_j(x) + 1/2^j$, jonka voi nyt olettaa pätevän kaikilla j (koska f on rajoitettu). Epäyhtälöstä seuraa, että $x \mapsto f_j(x) + 1/2^j \chi_{[a,b]}$ on "dominoiva" yksinkertainen funktio joka on pisteittäin suurempi kuin funktio $f(x)$. Siksi integraali $I(f_j(x) + 1/2^j \chi_{[a,b]}) = I(f_j) + (b - a)1/2^j$ toimii ylärajana funktion f integraalille. Ja kun $j \to \infty$, tämä yläraja lähestyy samaa raja-arvoa $\lim_{j\to\infty} I(f_j)$ kuin alarajat.

Päättelemme, että integraali $\int f$ on mielekkäällä tavalla olemassa. Huomaa että mitään lisäoletuksia ei tarvittu! Kaikki on piilotettu jo "vaakapalkkimetodiin" ja mitallisen funktion määritelmään. Teorian palaset loksahtelevat paikoilleen niin automaattisesti, että uskallamme toivoa voimakasta lähestymistapaa integraaliin. Kohta näemme, että käytännön tulokset lunastavat lupaukset.

Matematiikka jatkuu.

Koska mitallisen funktion ylä- ja alaintegraalit täsmäävät automaattisesti, niin yleinen käytäntö on määritellä Lebesgue-integraali *pelkkänä alaintegraalina*:

Määritelmä 3.27. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geq 0$. Silloin f:n *(Lebesguen) integraali* yli $\mathbb{R}^n$:n on

$$\int f = \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\}.$$

Jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin f:n integraali yli E:n on

$$\int_E f = \int f\chi_E. \tag{3.28}$$

Merkinnöistä: Integraali on abstrakti konstruktio eikä ole kovin tarkkaa miten sitä merkitään, kunhan ei synny epäselvyyksiä. Käytössä on seuraavia vaihtoehtoja:

$$\int_E f = \int_E f\,dm = \int_E f(x)\,dm(x).$$

Jos $n = 1$ ja $E = [a,b]$, niin merkitään $\int_E f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$.

3.29 Integraali "Pinta-alana"

Seuraava näkökulma tarjoaa tehokkaita todistusmenetelmiä sekä luo valoa moneen integrointiteorian tulokseen.

Lause 3.30. *Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$.
Määritellään joukko $\mathcal{G}(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : 0 \leq y < f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *Jos* f *on mitallinen funktio, niin joukko* $\mathcal{G}(f)$ *on* m_{n+1}*-mitallinen joukko, ja pätee*

$$\int f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)). \tag{3.31}$$

Todistus. Tarvitsemme vain kaksi ideaa: 1. Funktion approksimoiti nousevalla jonolla yksinkertaisia funktioita (L. (3.26)), ja 2. Mitan konvergenssi.

Mitallisuus: Ensiksi valitsemme yksinkertaiset funktiot φ_k siten, että $\varphi_k \nearrow f$. Tästä seuraa, että graafijoukoille pätee $\mathcal{G}(f) = \bigcup_k \mathcal{G}(\varphi_k)$[12]. Täten, koska joukot $\mathcal{G}(\varphi_k)$ ovat mitallisia, joukko $\mathcal{G}(f)$ on mitallinen.

Identiteetti: Integraalin määritelmän ja Lemman 3.16 mukaan:

$$\begin{aligned}\int f &:= \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\}\\ &= \sup_{\varphi\leq f} m_{n+1}(\underbrace{\mathcal{G}(\varphi)}_{\subset\mathcal{G}(f)})\\ &\leq m_{n+1}(\mathcal{G}(f)).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Toisaalta, koska joukot $\mathcal{G}(\varphi_k)$ muodostavat kasvavan jonon ja $\mathcal{G}(f) = \bigcup_k \mathcal{G}(\varphi_k)$, niin mitan konvergenssin mukaan voimme jatkaa arviointia seuraavasti:

$$\begin{aligned}m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) &= \lim_{k\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(\varphi_k))\\ &= \lim_{k\to\infty} I(\varphi_k)\\ &\leq \sup\{I(\varphi)\colon \varphi \in Y,\ \varphi \leq f\} = \int f. \quad \square\end{aligned} \tag{3.33}$$

Osoitamme vielä tuloksen

[12]Perustelu: Jos $y < f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$, niin on olemassa $k \in \mathbb{N}$ jolla $y < \varphi_k(x)$.

Lemma 3.34. *Joukolla* $\tilde{\mathcal{G}}(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : 0 \le y \le f(x)\}$ *on sama mitta kuin sen osajoukolla* $\mathcal{G}(f) \subset \tilde{\mathcal{G}}(f)$.

Näin ollen graafimittailuissa ei ole tarkkaa mitä määritelmää käyttää.

Tod. Tämä seuraa yksinkertaisesti siitä, että kaikilla $\alpha > 1$ pätee $\tilde{\mathcal{G}}(f) \subset \mathcal{G}(\alpha f) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$[13], joten $m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) \le m_{n+1}(\alpha \mathcal{G}(f)) + m_{n+1}(\{0\} \times \mathbb{R})$, ja $m_{n+1}(\{0\} \times \mathbb{R}) = 0$. Joten antamalla $\alpha \searrow 1$ väite on perusteltu. $\square$

Seuraus: Koska funktion *graafi* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : y = f(x)\}$ on täsmälleen erotus $\tilde{\mathcal{G}}(f) \setminus \mathcal{G}(f)$, niin saamme helposti hyödyllisen tuloksen

$$m_{n+1}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : y = f(x)\}) = 0. \tag{3.35}$$

3.36 Integraalin perusominaisuudet.

Varmistamme, että uudella integraalilla on tietyt perusominaisuuden joita integraaleilta osaa odottaa.

Lause 3.37. *Oletetaan, että esiintyvät funktiot ovat sekä ei-negatiivisia että mitallisia ja esiintyvät joukot ovat mitallisia* $\mathbb{R}^n$*:n osajoukkoja.*

(1) $f \le g \;\Rightarrow\; \int_E f \le \int_E g$ *(Monotonisuus)*

(2) $A \subset B \;\Rightarrow\; \int_A f \le \int_B f$

(3) $f(x) = 0 \;\forall x \in E \;\Rightarrow\; \int_E f = 0$

(4) $m(E) = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f = 0$

(5) $0 \le a < \infty \;\Rightarrow\; \int_E af = a\int_E f.$

Tod. (1): Jos $f \le g$ niin $\mathcal{G}(f) \subset \mathcal{G}(g)$, joten Lause 3.30 ja mitan monotonisuus sanoo $\int f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) \le m_{n+1}(\mathcal{G}(g)) = \int g$.

Vaihtoehtoinen todistus: Olkoon $E = \mathbb{R}^n$, $\varphi \in Y$, $\varphi \le f \;\Rightarrow\; \varphi \le g \;\Rightarrow$

$$I(\varphi) \le \int g \overset{\sup}{\Longrightarrow} \int f \le \int g.$$

$E \in \operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; f\chi_E \le g\chi_E$ $\mathbb{R}^n$:ssä $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$\int_E f = \int f\chi_E \le \int g\chi_E = \int_E g.$$

(2): $f\chi_A \le f\chi_B$ ja (1) $\Rightarrow$ väite.

(3): $f\chi_E = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f = I(0) = 0$.

(4): Olkoon $\varphi \in Y$, $\varphi \le f\chi_E$. Koska $\varphi|\mathbb{R}^n \setminus E = 0$, niin $\varphi = \varphi\chi_E$, joten

$$I(\varphi) = I(\varphi, E) \overset{3.24\,(3)}{=} 0 \overset{\sup}{\Longrightarrow} \int_E f = 0.$$

[13]Joukko $\{0\} \times \mathbb{R}$ huolehtii pisteistä, jossa $f(x) = 0$, jolloin *ei* päde $\alpha f(x) > f(x)$.

(5): Jos $a = 0$, niin molemmat puolet ovat nollia. Olkoon $a > 0$, $\varphi \in Y$, $\varphi \le f\chi_E \;\Rightarrow\; a\varphi \le af\chi_E \;\Rightarrow$

$$\int_E af \ge I(a\varphi) \overset{3.22\,\text{(ii)}}{=} aI(\varphi) \;\Rightarrow\; \int_E af \ge a\int_E f.$$
$$f = \frac{1}{a}(af) \;\Rightarrow\; \int_E f = \int_E \frac{1}{a}(af) \overset{\text{yllä}}{\ge} \frac{1}{a}\int_E af \;\Rightarrow\; a\int_E f \ge \int_E af.$$

□

Seuraava perusominaisuus on äärimmäisen hyödyllinen. Lisäksi sen todistus käyttää mittateorialle ominaista arviointitekniikkaa (oikeastaan filosofiaa) joka tulee vastaan vielä monta kertaa muodossa tai toisessa.

Lause 3.38. *Olkoon $f\colon E \to [0,\infty]$ mitallinen ja $\int_E f < \infty$.
Silloin $m(f^{-1}(\infty)) = m(\{x \in E : f(x) = \infty\}) = 0$. (Sanotaan, että $f(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in E$. Tästä lisää luvussa 4.12)*

Todistus 1. Vastaoletus: joukko $f^{-1}(\infty)$ ei ole nollamittainen. Nyt joukko $f^{-1}(\infty) \times [0, M] \subset \mathcal{G}(f)$ kaikilla $M > 0$, joten

$$\int_E f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) \ge m_{n+1}(f^{-1}(\infty) \times [0, M]) = m_n(f^{-1}(\infty))M \quad (M > 0). \tag{3.39}$$

Koska integraali oletettiin äärelliseksi tämä on ristiriita. □

Todistus 2. Merkitään $A = \{x \in E\colon f(x) = \infty\}$ (mitallinen joukko, sillä f on mitallinen).

$$f(x) \ge j \quad \forall x \in A,\ j = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; j\chi_A \le f\chi_E \quad \forall j$$
$$\Rightarrow\; \int_E f \ge I(j\chi_A) = jm(A) \quad \forall j$$
$$0 \le m(A) \le \frac{1}{j}\underbrace{\int_E f}_{<\infty} \xrightarrow{j\to\infty} 0 \;\Rightarrow\; m(A) = 0.$$

□

Lause 3.40. *Olkoon $f\colon E \to [0,\infty]$ mitallinen ja $\int_E f = 0$.
Silloin $m(f^{-1}(0,\infty]) = m(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0$. (Eli $f(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in E$.)*

Todistus. Vastaoletus: joukko $f^{-1}(0,\infty]$ ei ole nollamittainen. Silloin löytyy $k \in \mathbb{N}$ siten, että $m(f^{-1}(1/k,\infty]) > 0$ (HT). Nyt $f^{-1}(1/k,\infty] \times [0, 1/k] \subset \mathcal{G}(f)$ joten voimme arvioida

$$\int_E f = m_{n+1}(\mathcal{G}(f)) \ge m_{n+1}(f^{-1}(1/k,\infty] \times [0, 1/k]) = m_n(f^{-1}(1/k,\infty])\frac{1}{k} > 0, \tag{3.41}$$

mikä on ristiriita. □

Yhteys Riemann-integraaliin. Olemmeko onnistuneet yleistämään integraalin käsitettä? Jotta näin olisi, jokaisen Riemann-integroituva funktion pitäisi olla myös "Lebesgue-integroituva" eli mitallinen.

Lause 3.42. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu (koska Riemann-integraali on määritelty vain rajoittujen joukkojen yli) ja $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Jos f on Riemann-integroituva yli E:n, niin silloin f on mitallinen (eli "Lebesgue-integroituva") ja pätee*

$$\textit{(Riemann-integraali)} \quad (\mathrm{R})\int_E f = \int_E f \quad \textit{(oik.puol. Lebesgue-integraali)}.$$

Näin on esimerkiksi aina, kun E on suljettu n-väli ja f jatkuva.

Heuristinen perustelu: Yksi ainoa huomio riittää: Riemann-integraalia voi, määritelmän mukaan, approksimoida ylhäältä ja alhaalta *askel-funktioiden* integraaleilla. Askelfunktioilla tarkoitamme yksinkertaisia funktioita $\sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{A_i}$ joissa joukot A_i ovat *n-välejä.* Esimerkiksi jokainen Riemann-alasumma vastaa tällaisen (erittäin) yksinkertaisen funktion integraalia Määritelmän 3.14 mielessä. Todistuksen "moraali" on, että jos kerran funktiota voi "approksimoida askelfunktioilla", mikä tarkoittaa Riemann-integroituvuutta, niin kyllä sitä voi approksimoida yleisemmilläkin yksinkertaisilla funktioilla, mikä tarkoittaa Lebesgue integroituvuutta.

Summa summarum: Riemann-integraali on Lebesguen erikoistapaus, koska Riemann-integraali käyttää rajoitetumpaa kokoelmaa yksinkertaisia funktioita.

Vaihtoehtoinen näkökulma: Riemann-integraalissa tavoitteena on "approksimoida graafin ja x-akselin väliin jäävän alueen alaa/tilavuutta/mittaa *äärellisillä monikulmioilla*". Lebesgue-integraalissa on täsmälleen sama tavoite, mutta sallitaan *numeroituvat* monikulmiot (tai n-välien yhdisteet).

Lauseen 3.42 todistus Valitaan suljettu n-väli $I \supset E$. Koska määritelmän mukaan

$$(\mathrm{R})\int_E f = (\mathrm{R})\int_I f\chi_E \quad \text{ja} \quad \int_E f = \int f\chi_E = \int_I f\chi_E,$$

voidaan (korvaamalla f funktiolla $f\chi_E$) olettaa, että $E = I$.

Koska f on Riemann-integroituva, niin kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on olemassa I:n jako $D^m = \{I_1, \ldots, I_k\}$ ("puoliavoimiin") erillisiin osaväleihin siten, että vastaavat ylä- ja ala-summat ovat $1/m$ "päässä toisistaan":

$$\sum_{i=1}^k G_i \ell(I_i) - \sum_{i=1}^k g_i \ell(I_i) \leq \frac{1}{m}, \tag{3.43}$$

missä $G_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$ ja $g_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$.

Nyt oleellinen huomio: Ylä- ja ala-summat vastaavat yksinkertaisten funktioiden integraaleja:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k G_i \ell(I_i) &= \int \underbrace{\sum_{i=1}^k G_i \chi_{I_i}}_{\phi_m} = \int \phi_m \\ \sum_{i=1}^k g_i \ell(I_i) &= \int \underbrace{\sum_{i=1}^k g_i \chi_{I_i}}_{\psi_m} = \int \psi_m. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Selvästi $\psi_m \leq f \leq \phi_m$ kaikilla m. Täytyy siis päteä "$\int \psi_m \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq \int \phi_m$" kaikilla m, joten arvion (3.43) mukaan $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. Jos olisimme määritelleen myös Lebesgue integroituvuuden ylä-ja ala-integraaleilla, todistus olisi valmis. Virallisesti meidän pitää kuitenkin vielä osoittaa, että f on mitallinen (eli Lebesgue-integroituva).

Sen voi tehdä vaikka näin: määritellään funktiot $g := \sup_m \psi_m \leq f$ ja $G := \inf_m \phi_m \geq f$. Myöhemmin nähdään, että funktion mitallisuus säilyy raja-arvoissa (L. 4.13), joten g ja G ovat mitallisia. Lisäksi on helppo nähdä, että

$$\int (G - g) \leq \lim_{m \to \infty} \int (\phi_m - \psi_m) = 0. \tag{3.45}$$

Lauseen 3.40 perusteella $g = f = G$ melkein kaikkialla, eli $m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Täten Lauseen 4.16 mukaan myös f on mitallinen.

□

Olemme osoittaneet, että Lebesguen integraali on *vähintään* yhtä yleinen kuin Riemann-integraali. Itseasiassa, Lebesguen integraali on aidosti yleisempi kuin Riemann-integraali:

Esimerkki 3.46. Olkoon $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$ = rationaaliluvut. f yksinkertainen, sillä $f^{-1}(1) = \mathbb{Q}$ ja $f^{-1}(0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mitallisia.

$$\int_E f = m(E \cap \mathbb{Q}) = 0 \quad \forall \text{ mitallisilla } E \subset \mathbb{R}.$$

Toisaalta f ei ole Riemann-integroituva minkään välin $[a, b]$, $a < b$, yli: Olkoon $D = \{I_1, \ldots, I_k\}$ välin $[a, b]$ jako osaväleihin. Jokainen I_i sisältää sekä rationaali- että irrationaalilukuja

$$\Rightarrow \; m_D = \sum_i 0 \cdot \ell(I_i) = 0 \text{ ja } M_D = \sum_i 1 \cdot \ell(I_i) = b - a.$$

Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että Riemann-integraali käy hyödyttömäksi. Käytännön laskut hoidetaan useimmiten Analyysin Peruslauseella, joka "virallisesti" on todistettu Riemann-integraalille. Itseasiassa kyseisen peruslauseen luonne ja todistus ovat paremmin "yhteensopivia" Riemann-integraalin määritelmän kanssa. Joka tapauksessa meille on suurta hyötyä kun meidän ei tarvitse todistaa aikaisempien kurssien tuloksia uudestaan.

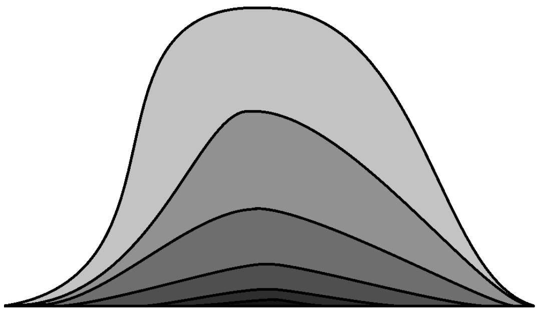
4 Konvergenssilauseet

Lebesgue-integraali pääsee oikeuksiinsa konvergenssilauseissa. Historiallisesti konvergenssikysymykset olivat tärkeimpiä motivaatioita uuden integrointiteorian muodostamiseksi. Klassisella integrointiteorialla nimittäin oli ongelma: "Se ei osannut todistaa jotakin mikä oli totta". Nolon ongelman selkein ilmentymä on laskevan funktiojonon integraalien raja-arvo.

Kuvittele, että meillä on jono Riemann-integroituvia positiivisia funktioita $f_n : [a, b] \to [0, \infty)$ siten, että $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \searrow 0$ (pisteittäin). Silloin vastaavat Riemann integraalit $(R) \int_a^b f_n$ muodostavat vähenevän jonon jolla on jokin raja-arvo. Kohtalokas kysymys kuuluu: Suppenevatko integraalit nollaan?

$$(R) \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = 0? \tag{4.1}$$

Katso kuvaa ja kuuntele mitä intuitiosi sanoo.



Integraalit vastaavat väritettyjen alueiden aloja, jotka vähenevät ja vähenevät, lopulta selvästi "tyhjenevät" kokonaan. Jokainen piste x-akselin yläpuolella jää lopulta laskevien graafien ylläpuolelle. Miten raja-arvo 4.1 voisi olla olematta nolla?

Kenties haluat yrittää vastaesimerkkiä. Käy ilmi, että jokainen konkreettinen tapaus, jossa osaat laskea integraalit $\int_a^b f_n$, toteuttaa väitteen (4.1).

Kaikki merkit siis viittaavat siihen, että lause on totta. Kuitenkin sen todistus on suhteettoman monimutkainen [Todistus on kuitenkin mahdollinen, lopulta.] [14]. Loogisesti tämä ei tietenkään ole tuomittavaa, mutta esteettisesti tilanne on katastrofi. Ja kauneusvirheet matematiikassa viittaavat usein siihen, että teoriassa on parannettavaa perustavalla tasolla.

Lebesgue-integraalille tulos ei tuota ongelmia. Oikeasta näkökulmasta katsottuna se on jopa triviaali – niinkuin intuition puolesta pitääkin! Lisäksi se pätee paljon yleisemmille (mitallisille) funktioille, ja lopulta voimme jopa päästää irti monotonisuusvaatimuksesta. Silloin olemme astuneet jo reippaasti intuitiomme ulkopuolelle ja moderni integrointiteoria viimeistään perii kruununsa Riemann-integraalilta.

Ensimmäiseksi kohennamme perustietojamme luku- ja funktiojonoista.

4.2 Lukujonon $\limsup$ ja $\liminf$

Monotoniset lukujonot ovat siitä mukavia, että niillä on aina raja-arvo (joka voi tulkintamme mukaan olla $\pm\infty$). Yleisellä lukujonolla tätä ominaisuutta ei tietenkään ole, mutta sen ominaisuuksia voi silti tutkia eräiden siitä johdettujen monotonisten lukujonojen avulla.

[14] Jos oletat, että funktiot f_n ovat jatkuvia, niin voit kompaktisuusargumentein osoittaa, että suppeneminen on tasaista. Tällöin Riemann-integraalissakin saa vaihtaa rajankäynnin ja integroinnin järjestystä.

Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ jono $\dot{\mathbb{R}}$:ssä. Voimme muodostaa "yläarviojonon" $b_k = \sup_{i \geq k} a_i$, ja "ala-arviojonon" $c_k = \inf_{i \geq k} a_i$, jolloin pätee $c_k \leq a_k \leq b_k$ kaikilla $k = 1, 2 \ldots$.

Huomaamme, että nämä apujonot ovat monotonisia:

$$\begin{aligned} &b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq b_{k+1} \geq \cdots \quad &&\text{ja} \\ &c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \cdots \quad &&(\sup / \inf \text{ pienemmästä joukosta}) \end{aligned}$$

Täten niillä on olemassa raja-arvot

$$\begin{aligned} \beta &= \limsup_{i \to \infty} a_i \quad \text{tai} \quad \overline{\lim_{i \to \infty}}\, a_i \quad &&\text{"yläraja-arvo" eli "limes superior"} \\ \gamma &= \liminf_{i \to \infty} a_i \quad \text{tai} \quad \underline{\lim_{i \to \infty}}\, a_i \quad &&\text{"alaraja-arvo" eli "limes inferior".} \end{aligned}$$

Nämä rajat ovat niin hyödyllisiä, että annamme niille nimen.

Määritelmä 4.3. Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ jono $\dot{\mathbb{R}}$:ssä.

$$\begin{aligned} \limsup_{i \to \infty} a_i &:= \lim_{k \to \infty} \big(\sup_{i \geq k} a_i\big) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \big(\sup_{i \geq k} a_i\big), \\ \liminf_{i \to \infty} a_i &:= \lim_{k \to \infty} \big(\inf_{i \geq k} a_i\big) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \big(\inf_{i \geq k} a_i\big). \end{aligned}$$

Huomautus 4.4. (a_i) jono $\dot{\mathbb{R}}$:ssä $\Rightarrow$ $\limsup_{i \to \infty} a_i$ ja $\liminf_{i \to \infty} a_i$ <u>aina</u> olemassa ($\in \dot{\mathbb{R}}$) ja 1-käsitteisiä.

Esimerkki 4.5. (1) $\infty, -\infty, \infty, -\infty, \ldots$; $\quad b_k = \infty \ \forall k,\ c_k = -\infty \ \forall k \ \Rightarrow \ \beta = \infty,\ \gamma = -\infty$

(2) $1, 2, 3, 4, \ldots$; $\quad b_k = \infty \ \forall k,\ c_k = k \ \forall k \ \Rightarrow \ \beta = \infty = \gamma$

(3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$; $\quad b_k = 1 \ \forall k,\ c_k = 0 \ \forall k \ \Rightarrow \ \beta = 1,\ \gamma = 0$

(4) $0, -1, 0, -2, 0, -3, \ldots$; $\quad b_k = 0 \ \forall k,\ c_k = -\infty \ \forall k \ \Rightarrow \ \beta = 0,\ \gamma = -\infty$.

Kuten olettaisi, seuraavat järjestysrelaatiot ovat voimassa:

Lause 4.6. *(i)* $\liminf_{i \to \infty} a_i \leq \limsup_{i \to \infty} a_i$,

(ii) $a_i \leq M \ \forall i \geq i_0 \ \Rightarrow \ \limsup_{i \to \infty} a_i \leq M$,

(iii) $a_i \geq m \ \forall i \geq i_0 \ \Rightarrow \ \liminf_{i \to \infty} a_i \geq m$.

Todistus. Kaikki kohdat seuraavast siitä, että vastaavat relaatiot pätevät "jokaisella i".

(i) $c_i = \inf_{i \geq k} a_i \leq \sup_{i \geq k} a_i = b_i \ \Rightarrow \ \gamma = \lim_{i \to \infty} c_i \leq \lim_{i \to \infty} b_i = \beta$,

(ii) $b_i = \sup_{i \geq k} a_i \leq M \ \forall i \geq i_0 \ \Rightarrow \ \beta = \lim_{i \to \infty} b_i \leq M$,

(iii) $c_i = \inf_{i \geq k} a_i \geq m \ \forall i \geq i_0 \ \Rightarrow \ \gamma = \lim_{i \to \infty} c_i \geq m$.

$\square$

Sen lisäksi, että lukujonon lim sup ja lim inf antavat ylä- ja ala-arvioita, niiden avulla voi myös muotoilla erittäin käyttökelpoisen kriteerin raja-arvon olemassaololle.

Lause 4.7 (Karakterisaatio Raja-arvon Olemassaololle)**.** *Olkoon* (a_i) *jono* $\dot{\mathbb{R}}$*:ssä. Tällöin*

$$\exists \lim_{i\to\infty} a_i \ (\in \dot{\mathbb{R}}) \iff \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad (\in \dot{\mathbb{R}}).$$

Tässä tapauksessa

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \liminf_{i\to\infty} a_i = \limsup_{i\to\infty} a_i \quad (\pm\infty \quad \textit{sallitaan}).$$

Todistuksen idea:

$\boxed{\Leftarrow}$ Oletetaan, että $\beta = \gamma \overset{\text{merk.}}{=} \alpha$. Jokaisella $k = 0, 1, \dots$ pätee $c_k \leq a_k \leq b_k$. Toisaalta jonot (c_k) ja (b_k) suppenevat kohti samaa arvoa $\gamma = \beta$. Jonolla (a_k) ei ole muuta vaihtoehtoa kuin supeta samaan arvoon $\alpha = \gamma = \beta$. Yksityiskohtainen todistus jätetään lukijalle. (Kannattaa jakaa virallinen todistus tapauksiin $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\alpha = \pm\infty$)

$\boxed{\Rightarrow}$ Oletetaan, että $\exists \alpha = \lim_{i\to\infty} a_i$. Jaetaan todistus "äärelliseen ja äärettömään" tapaukseen.

(a1) $\underline{\alpha \in \mathbb{R}}$: Raja-arvon määritelmän mukaan kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\alpha - \varepsilon \leq a_k \leq \alpha + \varepsilon$, kun $k \geq N$. Täten edellisen Lauseen 4.6 nojalla pätee $\alpha - \varepsilon \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha + \varepsilon$. Koska ε on mielivaltainen, niin täytyy olla $\gamma = \alpha = \beta$.

(a2) $\underline{\alpha = \infty}$: Määritelmän mukaan kaikilla $M > 0$ löytyy $N \in \mathbb{N}$ siten, että $M \leq a_k$, kun $k \geq N$. Siten myös $M \leq \gamma \leq \beta$, ja koska M on mielivaltainen, niin $\infty \leq \gamma \leq \beta$.

(a3) Tapaus $\alpha = -\infty$ todistetaan samoin.

$\square$

Tulkinta: $x < \limsup_i a_i$ jos ja vain jos $x < a_i$ *äärettömän monella indeksillä* i.

$x < \liminf_i a_i$ jos ja vain jos $x < a_i$ *jostakin indeksistä* i_0 *lähtien*, eli kun $i \geq i_0$.

Perustelu: $x < \limsup_i a_i = \inf_{i\in\mathbb{N}}\big(\sup_{j\geq i} a_j\big)$ jos ja vain jos kaikilla $i \in \mathbb{N}$ pätee $x < \sup_{j\geq i} a_j$. Tämä taas pätee jos ja vain jos kaikilla $i \in \mathbb{N}$ löytyy $j \geq i$ siten että $x < a_j$. Viimeinen ominaisuus puolestaan pätee selvästi jos ja vain jos $x < a_j$ äärettömän monella j (tee vaikka vastaoletus).

$x < \liminf_i a_i \sup_{i\in\mathbb{N}}\big(\inf_{j\geq i} a_j\big)$ jos ja vain jos löytyy i_0 siten että $x < \inf_{j\geq i_0} a_j$. Tämä taas pätee jos ja vain jos $x < a_j$ kaikilla $j \geq i_0$, mikä oli osoitettava.

4.8 Joukkojonon $\limsup$ ja $\liminf$

Myös joukkojonoille on hyödyllistä määritellä $\limsup$ ja $\liminf$ käsitteet.

Määritelmä 4.9. Olkoon $A_1, A_2, A_3, \dots$ jono joukkoja. Tällöin

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \tag{4.10}$$

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k. \tag{4.11}$$

Aina pätee sisältyvyys $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$ (HT). Jos pätee yhtäsuuruus $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$, niin silloin sanomme että joukkojonolla on *rajajoukko* $\lim_{n\to\infty} A_n := \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$.

Tulkinta: $x \in \limsup_n A_n$ jos ja vain jos $x \in A_n$ *äärettömän monella indeksillä* n.

$x \in \liminf_n A_n$ jos ja vain jos $x \in A_n$ *jostakin indeksistä* n_0 *lähtien*, eli kun $n \geq n_0$.

Perustelu: $x \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$ jos ja vain jos kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $x \in \bigcup_{k\geq n} A_k$. Tämä taas pätee jos ja vain jos kaikilla $n \in \mathbb{N}$ löytyy $k \geq n$ siten että $x \in A_k$. Viimeinen ominaisuus puolestaan pätee selvästi jos ja vain jos $x \in A_k$ äärettömän monella k (tee vaikka vastaoletus).

$x \in \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$ jos ja vain jos löytyy n_0 siten että $x \in \bigcap_{k\geq n} A_k$. Tämä taas pätee jos ja vain jos $x \in A_k$ kaikilla $k \geq n_0$, mikä oli osoitettava.

4.12 Rajafunktion mitallisuus

Riemann-integroituvilla funktioilla on myös luokkana eräs häiritsevä ongelma: se ei ole "suljettu pisteittäisen suppenemisen suhteen". Siis, jos f_j on jono Riemann-integroituvia funktioita siten, että $\exists \lim_{j\to\infty} f_j(x) =: f(x)$ kaikilla x, niin raja-funktion f ei tarvitse olla enää Riemann-integroituva[15]. Tämä vihkiytymättömille tässä vaiheessa kenties harmittomalta vaikuttava puute estää hedelmällisen funktioavaruuksien teorian luomisen.

Lebesgue-integroituville, eli mitallisille, funktioilla vastaavaa ongelmaa ei esiinny, ja tämän todistuskin seuraa lyhyesti lähes määritelmästä.

Lause 4.13. *Olkoot $f_j\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, mitallisia. Silloin funktiot*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j$$

ovat mitallisia. Jos on olemassa pisteittäinen raja-funktio $f = \lim_{j\to\infty} f_j$, niin f on mitallinen.

Huomautus 4.14. Yo. funktiot on siis määritelty *pisteittäin.* Esimerkiksi funktion $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ arvo pisteessä $x \in A$ on $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \in \dot{\mathbb{R}}$.

Tod. Mielenkiintoisesti riittää todistaa vain supremumin $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ mitallisuus, sillä sen jälkeen muiden mitallisuudet seuraavat yksitellen huomioista

$$\begin{aligned}
&\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j = -\sup_{j\in\mathbb{N}}(-f_j) \quad \text{on mitallinen,}\\
&\limsup_{j\to\infty} f_j = \inf_{k\in\mathbb{N}}\big(\sup_{j\ge k} f_j\big) \quad \text{on mitallinen}\\
&\liminf_{j\to\infty} f_j = \sup_{k\in\mathbb{N}}\big(\inf_{j\ge k} f_j\big) \quad \text{on mitallinen}\\
&\text{Jos } \exists f = \lim_{j\to\infty} f_j, \text{ niin } \lim_{j\to\infty} f_j \overset{\text{L. 4.7}}{=} \limsup_{j\to\infty} f_j \quad \text{on mitallinen.}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Käytämme Karakterisaatiota 2.2 ja tutkimme esimerkiksi puolivälien $[-\infty, a]$ alkukuvia

$$(\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)^{-1}[-\infty, a] = \{x \in A : \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \le a\}.$$

Mutta, $\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j(x) \le a$, jos ja vain jos $f_j(x) \le a$ *kaikilla* j, mikä tarkoittaa, että x kuuluu alkukuvaan $f_j^{-1}[-\infty, a]$ kaikilla j; eli $x \in \bigcap_j f_j^{-1}[-\infty, a]$. Täten

$$(\sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)^{-1}[-\infty, a] = \bigcap_j f_j^{-1}[-\infty, a],$$

on mitallinen, koska alkukuvat $f_j^{-1}[-\infty, a]$ ovat mitallisia kaikilla j. □

Analyysi on täynnä konstruktioita ja prosesseja jotka tuottavat funktioita/joukkoja "raja-arvoina". Usein kuitenkin joudumme hyväksymään, että on olemassa muutamia "poikkeuksellisia" pisteitä, joissa raja-arvo ei ole määritelty tai joissa emme tunne sitä. Otamme käyttöön uuden joustavan termin: **Melkein kaikkialla** (lyhyemmin m.k.) = lukuunottamatta 0-mittaista joukkoa. (Samoin "melkein jokainen" (lyhyemmin m.j.)).

Esim.

[15] Esimerkiksi, numeroi rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, aseta $f_j := \chi_{\{q_n : n=1,\dots,j\}}$. Tällöin $f_j \to \chi_{\mathbb{Q}}$ pisteittäin.

(a) m.j. reaaliluku on irrationaalinen, sillä $m(\mathbb{Q}) = 0$.

(b) $e^{-jx^2} \xrightarrow{j\to\infty} 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$, sillä $m(\{0\}) = 0$.

On erityisen mukavaa, että funktion mitallisuus, ja sitä myötä integroituvuus, ei riipu sen arvoista aivan joka ikisessä pisteessä. Näin ollen voimme puhua myös sellaisten funktioiden mitallisuudesta, jotka ovat määriteltyjä vain melkein kaikkialla.

Lause 4.16. *(0-mittaiset joukot eivät vaikuta mitallisuuteen) Olkoot $f, g\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$. Oletetaan, että f on mitallinen ja $g = f$ m.k. Silloin g on mitallinen.*

Tod. Kirjoitetaan ensin $g = (g - f) + f$, jossa erotus $g - f = 0$ melkein kaikkialla. Koska funktio f on mitallinen ja mitallisten summa on mitallinen, meidän riittää osoittaa, että funktio joka on nolla m.k. on mitallinen.

Oletetaan siis, että $h = 0$ melkein kaikkialla. Jos $a > 0$, niin alkukuva $h^{-1}[a, \infty] = \{x \in A : h(x) \geq a\}$ on nollamittainen ja siten mitallinen. Jos taas $a \leq 0$, niin $h^{-1}[a, \infty]$ on mitallinen, koska sen komplementti $h^{-1}[-\infty, a)$ on nollamittainen. □

Raja-funktionkin tarvitsee olla olemassa vain melkein kaikkialla ollakseen mitallinen [Tämä tulkitaan tarvittaessa niin, että pisteissä joissa raja-arvo ei ole olemassa, arvot $f(x)$ määrätään mielivaltaisesti, esim nollaksi; valinta ei vaikuta mitallisuuteen].

Lause 4.17. *Olkoot $f_j\colon A \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, mitallisia ja $f_j \to f$ m.k. $\Rightarrow$ f mitallinen.*

Tod. Ideana on käyttää tietoa, että lim sup on olemassa myös niissä pisteissä missä raja-arvo ei ole: Funktio $\limsup_{j\to\infty} f_j$ on mitallinen (L. 4.13), ja niissä pisteissä missä raja-arvo on olemassa, eli m.k., pätee $\limsup_{j\to\infty} f_j = f(x)$. Näin ollen edellisen lauseen mukaan myös f on mitallinen. □

Esimerkki 4.18. Olet. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $\exists f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Väite: f' on mitallinen.

Tod. Merkitään

$$g_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}, \quad \text{jolloin} \quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

$\exists\, f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ f$ jatkuva ja siis mitallinen $\Rightarrow\ g_n$ mitallinen (L. 2.11) $\overset{\text{L. 4.13}}{\Longrightarrow}$ f' mitallinen.

□

Lisätieto I *Littlewoodin kolme periaatetta* (Kts. esim. Royden):

(I) Jokainen mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, jolle $m(A) < \infty$, on "melkein" äärellinen yhdiste $F = \bigcup_{j=1}^m I_j$, missä $I_1, \ldots, I_m$ ovat n-välejä: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ F = \bigcup_{j=1}^m I_j \subset A$ s.e. $m(A \triangle F) < \varepsilon$, missä $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ ("symmetrinen erotus").

(II) Jokainen mitallinen kuvaus on "melkein jatkuva": Lusinin lause (Reaalianalyysi I): Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, $f\colon A \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $\varepsilon > 0$, niin $\exists$ kompakti $C \subset A$ s.e. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ ja $f|C$ on jatkuva.

(III) Jokainen suppeneva jono mitallisia funktioita $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ on "melkein tasaisesti suppeneva": Egorovin lause (Reaalianalyysi I): Jos $A \subset \mathbb{R}^n$, $m(A) < \infty$, $f_j\colon A \to \mathbb{R}$ ovat mitallisia ja $f_j \to f\colon A \to \mathbb{R}$ m.k. Silloin $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ kompakti $C \subset A$ s.e. $m(A \setminus C) < \varepsilon$ ja $f_j|C \to f|C$ tasaisesti (t.s. $\sup_{x\in C} |f_j(x) - f(x)| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

Lisätieto II Olkoon (Ω, Γ, μ) tn-avaruus. Kurssilla TN I (tai TN-teoria) sanotaan, että funktio $X: \Omega \to \mathbb{R}$ on *satunnaismuuttuja*, jos

$$\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \le x\} = X^{-1}(-\infty, x] \in \Gamma \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Voidaan osoittaa: Lause 2.2 pätee myös näille, ja

$$X: \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{satunnaismuuttuja} \iff X \ \Gamma\text{-mitallinen funktio } \Omega \to \mathbb{R}.$$

4.19 Monotonisen Konvergenssin Lause.

On aika esitellä lause joka toimi historiallisesti suurena motivaationa modernille integrointiteorialle. Monotonisen konvergenssin lause ja sen serkut Fatoun Lemma ja Dominoidun konvergenssin lause tekevät Lebesgue-integraalista ylistetyn yhteensopivan raja-arvoprosessien kanssa. Monille analyysin aloille se on elinehto.

Lause 4.20. (MKL) *Olkoot $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia siten, että*

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_j \le f_{j+1} \le \cdots .$$

Tällöin

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j \quad \textit{(voi olla } +\infty\textit{)}.$$

Huomaa, että funktiojono on monotoninen, joten raja-arvo-funktio $f := \lim_{j\to\infty} f_j$ on olemassa, ja se on, Lauseen 4.13 mukaan, automaattisesti mitallinen. Täten väitteessä esiintyvä integraali $\int_E \lim_{j\to\infty} f_j$ on ylipäätään määritelty.

Motivoiva esimerkki. Aina ei saa vaihtaa operaatioiden $\int$ ja lim järjestystä: jos esimerkiki $f_j = \chi_{(j,\infty]}$, niin silloin $\int f_j = \infty$ kaikilla j, mutta toisaalta $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0$ kaikilla x, joten

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j = \infty > 0 = \int \lim_{j\to\infty} f_j. \tag{4.21}$$

Huomaa kuitenkin, että jono (f_j) ei ole nouseva.

MKL:n Todistus graafien avulla. Idea: Lauseen 3.30 mukaan integraali on graafin alle jäävän alueen mitta. Tästä näkökulmasta *MKL on vain Lebesguen m_{n+1}-mitan konvergenssin erikoistapaus.*

Käännetään MKL:n väite ”graafien mittojen kielelle”, jolloin se sanoo

$$\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) \stackrel{?}{=} m_{n+1}(\mathcal{G}(f)), \tag{4.22}$$

missä $f := \lim_j f_j$ ja esimerkiksi $\mathcal{G}(f)$ tarkoittaa mitallista joukkoa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : 0 \le y < f(x)\}$ (katso L. 3.30).

Koska $f_j \le f_{j+1}$, niin $\mathcal{G}(f_j) \subset \mathcal{G}(f_{j+1})$, joten ”graafijono” $\mathcal{G}(f_j)$ on kasvava. Täten mitan konvergenssin (L. 1.65) nojalla pätee

$$\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) = m_{n+1}(\bigcup_j \mathcal{G}(f_j)). \tag{4.23}$$

Mutta nyt joukko $\bigcup_j \mathcal{G}(f_j)$ on täsmälleen joukko $\mathcal{G}(f)$[16]. Tämä todistaa yhtälön (4.22) pitävyyden. $\square$

Kunnioittaaksemme matematiikan traditionaalisia lähestymistapoja esitämme kiinnostuneille myös todistuksen joka käyttää integraalin määritelmää ja yksinkertaisia funktioita. Se on aavistuksen helpompi yleistää abstraktiin integrointiteoriaan, mutta se ei tarjoa niin selkeää intuitiota MKL:n perusteisiin.

MKL:n "standardi" todistus.[17] Triviaali suunta "$\leq$". Ensinnäkin voimme olettaa että $E = \mathbb{R}^n$ (muutoin korvataan f_j, f funktioilla $f_j\chi_E$, $f\chi_E$ (huom. $f_j\chi_E \nearrow f\chi_E$)).

On korostettava, että suunta "$\leq$" on triviaali: koska $f_j \leq f$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$, pätee

$$\int f_j \leq \int f, \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Täten pätee myös $\lim_{j\to\infty} \int f_j \leq \int f$.

Epätriviaali suunta "$\geq$": Ensimmäinen askel: *"Skaalaus":* Riittää osoittaa, että epäyhtälö $\lim_{j\to\infty} \int f_j \geq b \int f$ pätee kaikilla $0 < b < 1$. (Voimme siis hieman helpottaa tehtäväämme ja "laskea rajafunktion f graafia".)

Toinen askel: *Integraalin määritelmä.* Lebesgue integraalin määritelmän mukaan riittää osoittaa, että

$$\lim_{j\to\infty} \int f_j \geq b \int \varphi,$$

kaikilla yksinkertaisilla $\varphi \leq f$.

Kolmas askel: *Graafien kirjanpito.* Joten olkoon φ mielivaltainen. Merkitään

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq b\varphi(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \big(f_k - b\varphi\big)(x) \geq 0\} \quad \text{(mitallinen joukko).}$$

Koska $f_k \leq f_{k+1}, k = 1, 2, \ldots$ pätee sisältyvyys $E_k \subset E_{k+1}, , k = 1, 2, \ldots$. Ja nyt seuraa tärkeä huomio: jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ löytyy k_x siten, että $f_{k_x}(x) \geq b\varphi(x)$. Perustelu: jos $f(x) = 0$, niin myös $\varphi(x) = 0$; jos taas $f(x) > 0$, niin väite seuraa tiedosta $\lim_{j\to\infty} f_j(x) > b\varphi(x)$. Huomio voidaan ilmaista joukkojen kielellä seuraavasti:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

(Tämä on matemaattinen ilmaisu ajatukselle "joka pisteessä funktioiden f_k graafit kipuavat ennemmin tai myöhemmin rajagraafin $b\varphi$ yläpuolelle".)

Voimme nyt tehdä sarjan alkeellisia arviointeja: Joukon E_k määritelmästä seuraa, että $f_k\chi_{E_k} \geq b\varphi\chi_{E_k}$. Joten integroitaessa yli joukon E_k on voimassa lupaava epäyhtälö $\int_{E_k} f_k \geq b \int_{E_k} \varphi$. Yhdistetään se triviaalin arvioon $\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \geq \int_{E_k} f_k$, jolloin saamme

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j \geq b \int_{E_k} \varphi, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.24}$$

Vasen puoli on kiinnitetty luku (ei riipu k:sta), kun taas oikean puolen integraalit suppenevat (monotonisuuden nojalla) raja-arvoonsa $b \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} \varphi$, kun päästämme $k \to \infty$. Näin ollen

[16] Kuten kerran aikaisemmin: jos $y < f(x) = \lim_j f_j(x)$, niin $y < f_j(x)$ jollakin j.

[17] Tämä todistus on vapaaehtoista kurssimateriaalia.

epäyhtälö (4.24) säilyy myös rajalla ja pätee

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_j \geq b \lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi.$$

Viimeinen askel: *Integraali mittana.* Todistus on valmis jos $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi \geq \int\varphi$. Itse asiassa olemme jo todistaneet tämän kriittisen viimeisen askeleen Korollaarissa 3.21)! Yhteenveto: kaikilla $0 < b < 1$ ja kaikilla yksinkertaisilla $\varphi \leq f$ pätee

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f \geq b\int\varphi.$$

□

Huomautus 4.25. Todistuksen viimeinen askel on tärkein. Muut askeleet ovat teknisesti suhteellisen alkeellisia. (Ei ehkä ensikertalaiselle, mutta on hyvää harjoitusta opetella erottamaan kriittiset elementit tusinayksityiskohdista.)

MKL saa siis voimansa Korollaarista 3.21. Korollaari puolestaan johdetaan suoraan mittateorian perusteista, nimittäin mitan konvergenssi Lauseesta 1.65. Mitan konvergenssi puolestaan seuraa suoraan abstraktin mitan *aksioomista.* (Itseasiassa mitan konvergenssia kannattaa ajatella aksioomana joka on ekvivalentti numeroituvan täysadditiivisuuden kanssa.) Tämä pieni salapoliisityö paljastaa, miten mittateorian tärkein aksiooma, numeroituva additiivisuus, on suoraan vastuussa integrointiteorian tärkeimmästä lauseesta, MKL:stä. Kaikkein selkeimmin yhteys näkyy tietenkin graafi-todistuksessa.

Esimerkki 4.26. (Loppukoe menneiltä vuosilta) Laske raja-arvo

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

<u>Ratk.</u> Analyysi I $\Rightarrow$ riittää tutkia raja-arvoa

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}\,dt$$

<u>kaikilla</u> jonoilla (x_n), s.e. $x_n \geq x_{n+1} > 0$ ja $x_n \searrow 0$. Merkitään

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2}, \quad t\in[0,\infty) \text{ ja } n = 1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned} x_n \geq x_{n+1} > 0 \text{ ja } t\in[0,\infty) \;&\Rightarrow\; e^{-x_n t} \leq e^{-x_{n+1}t} \\ \Rightarrow\; 0 \leq f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} &\leq \frac{e^{-x_{n+1}t}}{1+t^2} = f_{n+1}(t) \end{aligned}$$

eli (f_n) kasvava jono. Lisäksi

$$f_n(t) = \frac{e^{-x_n t}}{1+t^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{0\cdot t}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \quad \forall\, t\in[0,\infty).$$

MKL $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(t)\,dt &= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{j\to\infty}\int_0^j \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &\overset{3.42}{=} \lim_{j\to\infty} \Big/_0^j \arctan t = \lim_{j\to\infty}\big(\arctan j - \arctan 0\big) = \pi/2. \end{aligned}$$

$(*)$:n perustelu: MKL sovellettuna kasvavaan jonoon (g_j),

$$g_j(t) = \frac{\chi_{[0,j]}(t)}{1+t^2}.$$

(Huom. Lauseessa 3.42 oletettiin, että E on rajoitettu.)

Seuraava perusominaisuus lienee tuttu Riemann-integroinnista:

Lause 4.27. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_1, \ldots, f_k \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia s.e. $f_j \geq 0$. Silloin*

$$\int_E \sum_{j=1}^{k} f_k = \sum_{j=1}^{k} \int_E f_k.$$

Tod. Voi olettaa: $E = \mathbb{R}^n$ ja $k = 2$ (yleinen k induktiolla). Approksimointilause 3.26 $\Rightarrow$ $\exists$ kasvavat jonot (φ_j), (ψ_j) 1-kertaisia funktioita s.e.

$$\varphi_j \nearrow f_1 \quad \text{ja} \quad \psi_j \nearrow f_2\,, \quad \text{kun } j \to \infty.$$

$$\left.\begin{array}{c} 3.22 \;\Rightarrow\; I(\varphi_j + \psi_j) = I(\varphi_j) + I(\psi_j) \\[2ex] \text{MKL} \;\Rightarrow\; I(\varphi_j) = \int \varphi_j \to \int f_1 \;\text{ ja }\; I(\psi_j) \to \int f_2 \\[2ex] \text{samoin } \varphi_j + \psi_j \nearrow f_1 + f_2 \text{ ja MKL } \;\Rightarrow \\[2ex] I(\varphi_j + \psi_j) \to \int (f_1 + f_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2\,.$$

□

Kuten tyypillistä, Lebesgue-integroinnissa pätee vastaava tulos myös numeroituvalle summalle:

Lause 4.28 (Beppo Levin lause)**.** *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia s.e. $f_j \geq 0$. Tällöin*

$$\int_E \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_E f_j.$$

Toisin sanoen, positiivitermisen sarjan saa integroida termeittäin.

Tod. Merkitään $u_k = \sum_{j=1}^{k} f_j$. Silloin

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \quad \text{ja} \quad u_k \to \sum_{j=1}^{\infty} f_j \overset{\text{merk.}}{=} u.$$

MKL ja L. 4.27 $\Rightarrow$

$$\int_E u = \int_E \lim_{k\to\infty} u_k \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_E u_k \overset{4.27}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_E f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j.$$

□

Olemme aikaisemmin osoittaneet, että yksinkertaisen funktion integraali joukkofunktiona määrittelee mitan (Korollaari 3.21). Vastaava tulos pätee yleisen mitallisen funktion integraalille.

Lause 4.29 (Integraali mittana). *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $f \geq 0$. Silloin kuvaus*

$$\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty], \quad E \mapsto \int_E f$$

on mitta. Toisin sanoen, se toteuttaa mitan aksioomat (Määritelmä 1.53):

(i)

$$\int_\emptyset f = 0\,,$$

(ii) ja jos $E_j \subset \mathbb{R}^n$ ovat mitallisia ja erillisiä, niin

$$\int_{\bigcup_{j=1}^\infty E_j} f = \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} f\,.$$

Tiedosta, että integraali määrittelee mitan, seuraa perustulokset

(iii) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia $\Rightarrow$

$$\int_{\bigcup_{j=1}^\infty E_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} f\,,$$

ja

(iv) $\mathbb{R}^n \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ mitallisia ja $\int_{E_1} f < \infty \;\Rightarrow$

$$\int_{\bigcap_{j=1}^\infty E_j} f = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} f\,,$$

Tod. Kohta (i) seuraa integraalin perusominaisuuksista (Lause 3.37 (4)). Kohta (ii) jätetään harjoitustehtäväksi (Voit esimerkiksi tulkita integraalin "graafi-mittana" jolloin väite seuraa mitan täysadditiivisuudesta.). Kohdat (iii) ja (iv) seuraavat heti yleisen mitan konvergenssilauseista 1.65 ja 1.66. □

Seuraavat pari peruspäätelmää osoittautuvat hyödyllisiksi moneen otteeseen. Ensimmäinen kohta korostaa, että integroinnin kannalta "funktioiden arvoilla on merkitystä vain melkein kaikkialla". Tämä tarjoaa aivan uuden, voimakkaan, näkökulman itse funktioihin, missä kiinnitetään huomiota "keskimääräiseen käyttäytymiseen". Moniin käyttötarkoituksiin funktioita ei ole pakko edes määritellä joka pisteessä. Tästä lisää kurssilla Reaalianalyysi I. Toinen kohta korostaa periaatetta, että integraaleista voi vetää integroitavia funktioita koskevia johtopäätöksiä vain melkein kaikkialla.

Lause 4.30. *(i) Olkoot $f, g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia ja $f \geq 0$, $g \geq 0$. Jos $f = g$ m.k. E:ssä, niin*

$$\int_E f = \int_E g\,.$$

Erityisesti: $f \geq 0$ mitallinen ja määritelty m.k. E:ssä $\Rightarrow$ $\int_E f$ hyvin määritelty.

(ii) Olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $f \geq 0$. Jos $\int_E f = 0$, niin $f = 0$ m.k. E:ssä.

Tod. (i): Merkitään $A = \{x \in E \colon f(x) \neq g(x)\}$. Oletus $\Rightarrow$ $m(A) = 0$.

$$\int_E f \overset{4.29}{=} \int_{\underbrace{E \setminus A}_{f=g}} f + \int_{\underbrace{A}_{=0}} f = \int_{E\setminus A} g + \int_A g = \int_E g.$$

(ii): Vastaoletus: $m\big(\{x \in E \colon f(x) > 0\}\big) > 0$. HT 5/4 $\Rightarrow$ $\exists\, r > 0$ s.e.

$$m\big(\underbrace{\{x \in E \colon f(x) > r\}}_{\text{merk. } =A}\big) > 0$$

$$\Rightarrow \int_E f \overset{(*)}{\geq} \int_A f \overset{(**)}{\geq} r \int_A \chi_A = rm(A) > 0. \quad \underline{\text{RR}} \quad \square$$

$$[(*) : A \subset E, \qquad (**) : f\chi_A \geq r\chi_A]$$

Lisätieto: Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus, f Γ-mitallinen funktio $X \to [0, \infty]$. Määritellään f:n integraali

$$\int_X f = \sup\{I(\varphi) \colon \varphi \colon X \to \mathbb{R} \text{ 1-kert.}, \ \varphi \leq f\},$$

$$\int_E f = \int_X f\chi_E, \quad \text{kun } E \in \Gamma.$$

Luvun 3.25 tulokset (paitsi Lause 3.42 (Riemann-int.)) voimassa. Todistuksissa korvataan $\mathbb{R}^n$ X:llä ja $\operatorname{Leb} \mathbb{R}^n$ σ-algebralla $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Usein oletetaan, että X:llä on ns. σ-äärellinen mitta, ts.

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad \text{missä } \Omega_j \in \Gamma, \ \mu(\Omega_j) < \infty.$$

MKL:n heikkous on ennen kaikkea sen rajoittuneisuus monotonisiin funktiojonoihin. Ensimmäinen askel yleisempään suuntaan on seuraava tärkeä epäyhtälö.

Lause 4.31. (**Fatoun lemma**). *Olkoon funktiot* $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallisia ja* $f_j \geq 0 \ \forall\, j \in \mathbb{N}$. *Silloin*

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \leq \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \qquad (\textit{voi olla } +\infty). \tag{4.32}$$

Esitämme kaksi todistusta. "Graafitodistus" valaisee tuloksen ydintä intuitiivisemmin. Lisäksi se korostaa, kuten MKL:n todistuksessa, mitan konvergenssin roolia. Jälkimmäinen integraalitodistus puolestaan tarjoaa tekniikkaharjoitusta MKL:n soveltamiseen.

Todistus graafien avulla. Lauseen 3.30 mukaan väitteen voi tulkita seuraavasti (vrt. MKL:n todistus):

$$m_{n+1}(\mathcal{G}(\liminf_{j\to\infty} f_j)) \overset{?}{\leq} \liminf_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)). \tag{4.33}$$

On helppoa tarkistaa sisältyvyys $\mathcal{G}(\liminf_{j\to\infty} f_j) \subset \liminf_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j)$[18], missä joukkojonon lim inf määritellään kaavalla $\bigcup_{j\geq 1} \bigcap_{i\geq j} \mathcal{G}(f_i)$. Täten voimme arvioida vasenta yhtälön puolta ylöspäin

$$m_{n+1}(\mathcal{G}(\liminf_{j\to\infty} f_j)) \leq m_{n+1}(\liminf_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j)). \tag{4.34}$$

Tämän jälkeen epäyhtälö (4.33) on erikoistapaus seuraavasta (puhtaasti mittateoreettisesta) perustuloksesta valinnoilla $A_n := \mathcal{G}(f_n)$. $\square$

[18]Jos $y < \liminf_j f_j(x)$, niin $y < f_j(x)$ jostakin j_0 lähtien, eli $y \in \bigcap_{i\geq j_0} \mathcal{G}(f_i)$.

Lemma 4.35. *Olkoon* (A_n) *jono mitallisia joukkoja. Tällöin pätee*

$$m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \le \liminf_{n\to\infty} m(A_n). \tag{4.36}$$

Todistus. Käytämme vain lim inf:n määritelmää, mitan konvergenssia (L. 1.65) ja monotonisuutta:

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{n\ge 1}\bigcap_{k\ge n} A_k) &= \lim_{n\to\infty} m(\bigcap_{k\ge n} A_k) \\ &\le \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} m(A_k), \end{aligned} \tag{4.37}$$

missä viimeinen arvio nojaa yksinkertaiseen huomioon $m\big(\bigcap_{k\ge n} A_k\big) \le m(A_\ell)$ kaikilla $\ell \ge n$. □

Standarditodistus MKL:n avulla. Tämänkin idea on suoraviivainen. Meidän riittää kirjoittaa auki määritelmiä ja käyttää MKL:ää.

Määritelmän mukaan $\liminf_j f_j := \lim_{j\to\infty}\inf_{k\ge j} f_k$. Sen jälkeen riittää huomata, että jono $(\inf_{k\ge j} f_k)_j$ on nouseva, ei-negatiivinen (mitallinen) funktiojono. Täten voimme soveltaa Monotonista konvergenssia

$$\int_E \lim_{j\to\infty}\inf_{k\ge j} f_k \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{j\to\infty}\int_E \inf_{k\ge j} f_k.$$

Nyt väite (4.59) saa muodon

$$\lim_{j\to\infty}\int_E \inf_{k\ge j} f_k \le \lim_{j\to\infty}\inf_{k\ge j}\int_E f_k.$$

Riittää siis osoittaa $\int_E \inf_{k\ge j} f_k \le \inf_{k\ge j}\int_E f_k$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$[19]. Huomaamme, että koska $\inf_{k\ge j} f_k \le f_i$ kaikilla $i \ge j$, pätee myös $\int_E \inf_{k\ge j} f_k \le \int_E f_i$ kaikilla $i \ge j$. Ottamalla infimum yli kaikkien $i \ge j$, saamme halutun arvion

$$\int_E \inf_{k\ge j} f_k \le \inf_{i\ge j}\int_E f_i.$$

□

Esimerkki 4.38 (Kaksi periaatetta aitoon epäyhtälöön)**.** Tietyssä mielessä on olemassa vain kaksi perusmekanismia, jotka saavat aikaan *aidon* epäyhtälön Fatoun lemmassa. Ensimmäinen on, väljästi ilmaistuna, **"massan karkaus äärettömyyteen"**. Tämä voi tapahtua puolestaan oleellisesti vain kolmella eri tavalla.

(1) Olkoon $f_j = \chi_{[j,j+1]}$. Näin valituille funktioille pätee

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0 \;\forall\, x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; \liminf_{j\to\infty} f_j = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_j = m([j, j+1]) = 1 \to 1 \;\text{ kun } j\to\infty$$

Fatou pätee muodossa $0 < 1$. Tässä tilanteessa "massa karkaa kaukaisuuteen".

(2) Olkoon $f_j = j\chi_{(0,1/j]}$. Näin valituille funktioille pätee

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = 0 \;\forall\, x\in\mathbb{R} \;\Rightarrow\; \liminf_{j\to\infty} f_j = 0$$
$$\int_{\mathbb{R}} f_j = 1 \;\forall\, j.$$

Fatou pätee muodossa $0 < 1$. Tässä tilanteessa "massa karkaa korkealle".

[19] Tämä on intuitiivisesti varsin selvää kun sitä hetken meditoi.

(3) Olkoon $f_j := \frac{1}{j}\chi_{(0,j]}$. Kuten edellä, Fatou pätee nyt muodossa $0 < 1$. Tässä massa karkaa jälleen horisontaaliin äärettömyyteen mutta hieman eri tavalla kuin ensimmäisessä esimerkissä.

Toinen perusmekanismi on **"funktiojonon loputon heilahtelu"** (näin käy aina jos raja-arvo $\lim_j f_j$ ei ole olemassa): Olkoon E mitallinen joukko siten, että $m(E) > 0$ ja $m(E^c) > 0$. Määritellään nyt funktiot $f_j = \chi_E$, kun j on parillinen, ja $f_j = \chi_{E^c}$, kun j on pariton. On helppoa tarkistaa, että näillä oletuksilla Fatoussa esiintyy aito epäyhtälö "$0 < \min\{m(E), m(E^c)\}$".

Viimeiseksi korostamme, että funktioiden positiivisuusoletusta ei voi jättää kokonaan pois (myöhemmin tosin lievennämme sitä):

(4) Olkoon $f_j = -j\chi_{(0,1/j]}$ (eli esimerkin 1. funktiot miinusmerkeillä). Nyt Fatou ei päde koska

$$\int_{\mathbb{R}} f_j = -1 \;\forall\; j.$$

Yleisemmin, mitä tahansa ei-negatiivista funktiojonoa (f_j), joka tuottaa aidon epäyhtälön Fatoun lemmassa, voidaan käyttää rakentamaan ei-positiivinen funktiojono, $(-f_j)$, jolla "Fatoun epäyhtälö ei päde".

4.39 Lebesguen integraali: vaihtuvamerkkiset funktiot

Riemann-integraalin määritelmä pätee saman tien funktioille, jotka saavat sekä positiivisia, että negatiivisia arvoja. Lebesgue-integraali sitä vastoin määritellään ensin vain ei-negatiivisille funktioille. On aika korjata tilanne.

Meillä ei ole paljon vaihtoehtoja miten edetä. Ensinnäkin, kuvittele että mitallinen funktio f on negatiivinen. Silloin on täysin luontevaa vaatia/määritellä, että sen integraali on $-\int -f$. (Koska $-f \geq 0$, integraali on jo määritelty.) "Osaamme" siis integroita sekä positiivisia, että negatiivisia funktioita. Mutta mikä tahansa funktio f voidaan helposti esittää summana näistä kahdesta funktiotyypistä: Olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen, $E \subset \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad \left(= \frac{1}{2}\big(|f| + f\big) \text{ mitallinen}\right)$$
$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} \qquad \left(= \frac{1}{2}\big(|f| - f\big) \text{ mitallinen}\right).$$

Tällöin

$$f^+(x) \geq 0, \qquad f^-(x) \geq 0$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \qquad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

(Huom. yllä ei synny tapausta $\infty - \infty$, sillä aina joko $f^+(x) = 0$ tai $f^-(x) = 0$.)

Nyt siis positiivisten funktioiden f^+ ja f^- integraalit

$$\int_E f^+ \quad \text{ja} \quad \int_E f^-,$$

ovat määriteltyjä. Näin ollen on mitä luontevinta yrittää *määritellä* funktion f integraali kyseisten integraalien erotuksena. Tässä on vain yksi ongelma: Tuloksena voi olla huonosti määriteltyjä äärettömyyksiä: esimerkiksi, jos $f = \chi_{(-\infty,0)} - \chi_{[0,\infty)}$, niin emme voi määritellä integraalia $\int f$ periaatteella

$$\int \chi_{(-\infty,0)} - \int \chi_{[0,\infty)} = \infty - \infty = ???.$$

Tällaisten tapausten välttämiseksi päätämmekin yksinkertaisesti keskittyä äärellisiin tapauksiin:

Määritelmä 4.40. Funktio $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva E:ssä (tai lyh. integroituva), jos f mitallinen ja jos $\int_E f^+ < \infty$ ja $\int_E f^- < \infty$. Tällöin f:n integraali yli E:n on

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}).$$

Lisätieto: Joskus integraali määritellään silloinkin kun vain toinen integraaleista $\int_E f^+$, $\int_E f^-$ on äärellinen (jolloin edelleen vältetään tilanne $\infty - \infty$). Miksi me siis rajoitumme pienempään kokoelmaan? Vastaus: Haluamme, että integroituvien funktioiden summa on integroituva (Lause 4.49 (i)), jolloin integroituvien funktioiden joukko muodostaa normiavaruuden (normina $\int_E |f|$). Tästä päästään funktioavaruuksien teoriaan mistä lisää muilla kursseilla.

Integroituvuudella on seuraava vaihtoehtoinen karakterisaatio. Lisäksi integraalia voi arvioida siirtämällä itseisarvot integraalin sisälle.

Lause 4.41. *Olkoon $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen. Funktio f on integroituva E:ssä jos ja vain jos sen itseisarvon $|f|$ integraali on äärellinen:*

$$\int_E |f| < \infty.$$

Lisäksi pätee arvio

$$\Big|\int_E f\Big| \leq \int_E |f|.$$

Tod. Meidän tarvitsee vain muistaa esitys $|f| = f^+ + f^-$, missä f^+ ja f^- ovat positiivisia funktioita. Täten, positiivisen integraalin additiivisuuden mukaan (L. 4.27), itseisarvon integraali

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^- \tag{4.42}$$

on äärellinen jos ja vain jos integraalit $\int_E f^+$ ja $\int_E f^-$ ovat äärellisiä, mikä tarkoittaa funktion f integroituvuutta määritelmän mukaan.

Lisäksi:

$$\Big|\int_E f\Big| = \Big|\int_E f^+ - \int_E f^-\Big| \leq \underbrace{\Big|\int_E f^+\Big|}_{\geq 0} + \underbrace{\Big|\int_E f^-\Big|}_{\geq 0} = \int_E f^+ + \int_E f^-$$
$$\overset{4.27}{=} \int_E (f^+ + f^-) = \int_E |f|. \quad \square$$

Huomautus 4.43. f integroituva E:ssä $\overset{3.38,\ 4.41}{\Longrightarrow}$ $|f(x)| < \infty$ m.k. $x \in E$.

Lause 4.44. (**Majoranttiperiaate**) *Jos $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on mitallinen, $|f| \leq g$ ja g integroituva E:ssä, niin silloin f on integroituva E:ssä.*

Tod.

$$\int_E |f| \le \int_E g < \infty \quad \square$$

Huomautus 4.45. Riittää, että $|f| \le g$ m.k. E:ssä, eli

$$m\big(\underbrace{\{x \in E\colon |f(x)| > g(x)\}}_{=A}\big) = 0, \quad \text{jolloin} \quad \int_E |f| = \underbrace{\int_{E\setminus A} |f|}_{<\infty} + \underbrace{\int_A |f|}_{=0} < \infty.$$

Lause 4.46. *Jos $f\colon E \to \mathbb{R}$ mitallinen ja Riemann-integroituva, niin silloin f on Lebesgue-integroituva E:ssä ja*

$$\int_E f = (\mathrm{R}) \int_E f\,.$$

Tod.

$$f^+ = \frac{1}{2}\big(|f| + f\big), \quad f^- = \frac{1}{2}\big(|f| - f\big) \quad \text{Riem.-integroituvia}$$

$$\overset{3.42}{\Longrightarrow} f^+ \text{ ja } f^+ \text{ Leb.-integroituvia ja Riem./Leb.-integraalit samat}$$

$$\Rightarrow \int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = (\mathrm{R}) \int_E f^+ - (\mathrm{R}) \int_E f^- = (\mathrm{R}) \int_E f\,. \quad \square$$

Esimerkki 4.47. Olkoon $E = [1, \infty)$, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-2} \sin x$. f jatkuva $\Rightarrow$ f mitallinen.

$$|f(x)| \le x^{-2} \underset{\text{merk.}}{=} g(x),$$

$$g \text{ integroituva } E\text{:ssä} \overset{4.44}{\Longrightarrow} f \text{ integroituva } E\text{:ssä.}$$

<u>Huom.</u> g integroituva, koska MKL sovellettuna kasvavaan jonoon (g_j), $g_j(x) = \begin{cases} g(x), & \text{kun } 1 \le x \le j \\ 0, & \text{kun } x > j, \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_E g \overset{\text{MKL}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_E g_j \overset{3.42}{=} \lim_{j\to\infty} \int_1^j x^{-2}\, dx = -\lim_{j\to\infty} \Big/_1^j x^{-1} = \lim_{j\to\infty} (1 - 1/j) = 1.$$

Esimerkki 4.48 (Epäoleellinen Riemann vs Lebesgue)**.** Olkoon $E = [1, \infty)$, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1} \sin x$. f jatkuva $\Rightarrow$ f mitallinen.

<u>Väite:</u> f ei ole Leb.-integroituva E:ssä.

$$\int_E |f| = \int_1^\pi |f| + \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\, dx \ge \int_1^\pi |f| + \frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1}}_{\text{harm. sarja}} = \infty,$$

sillä

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\, dx \ge \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx \overset{\text{jaksoll.}}{=} \frac{1}{(k+1)\pi} \underbrace{\int_0^\pi |\sin x|\, dx}_{=2}.$$

Siis f ei ole integroituva E:ssä.

<u>Kuitenkin</u> $\exists$ epäoleellinen (Riemann-)integraali

$$\lim_{c\to\infty} \underbrace{\int_1^c \frac{\sin x}{x}\, dx}_{=I(c)}.$$

Tod.

$$I(n\pi) = \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{vuorotteleva sarja}},$$

missä

$$\Big| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \Big| \searrow 0\,, \text{ kun } k \to \infty\,.$$

Leibnitzin lause (Diff I) $\Rightarrow$ sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

suppenee, ts.

$$\exists \lim_{n\to\infty} I(n\pi) \overset{\text{merk.}}{=} a.$$

Jos $c \geq \pi$, niin $c \in [n\pi, (n+1)\pi)$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, jolloin

$$|I(c) - I(n\pi)| = \Big| \int_{n\pi}^{c} \frac{\sin x}{x}\,dx \Big| \leq \int_{n\pi}^{c} \frac{1}{n\pi}\,dx \leq \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow I(c) \to a, \quad \text{kun } c \to \infty\,.$$

Siis: Funktion *epäoleellinen* (Riemann-)integraali voi olla olemassa (eli supeta), vaikkei funktio olisi Lebesgue-integroituva. Lebesgue-integroituvuuteen vaaditaan itseinen suppeneminen. Ei kuitenkaan pidä mieltää, että epäoleellinen Riemann-integraali on tämän ilmiön vuoksi jossain syvällisessä mielessä yleisempi. Voisimme aivan hyvin määritellä myös "epäoleellisen Lebesgue-integraalin", joka olisi yleistys vastaavasta Riemann-versiosta. Mutta, kuten mainittu, on hyödyllisempää määritellä integroituvuus niin että integroituvat funktiot muodostavan normiavaruuden. Epäoleellisesti integroituvilla funktioilla ei ole tätä tärkeää ominaisuutta.

Lause 4.49. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen, $f, g\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituvia E:ssä ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Silloin*

(i) $f + g$ *integroituva E:ssä ja* $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$;

(ii) λf *integroituva E:ssä ja* $\int_E \lambda f = \lambda \int_E f$;

(iii) $f \leq g \;\Rightarrow\; \int_E f \leq \int_E g$;

(iv) $m(E) = 0 \;\Rightarrow\; \int_E f = 0$;

(v) $f = g$ *m.k. E:ssä* $\Rightarrow\; \int_E f = \int_E g$.

Huomautus 4.50. f, g integroituvia E:ssä $\Rightarrow$ $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ m.k. $x \in E$ $\Rightarrow$ $f + g$ määritelty m.k. E:ssä.

Tod. (i): Merkitään $h = f + g$. Silloin h on määritelty m.k. ja mitallinen.

$$|h| \leq |f| + |h| \;\Rightarrow\; \int_E |h| \leq \int_E |f| + \int_E |g| < \infty \;\Rightarrow\; h \text{ integroituva}$$

Yleensä $h^+ \neq f^+ + g^+$, mutta m.k. E:ssä pätee:

$$h^+ - h^- = h = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$\Rightarrow\ h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ \qquad \text{(funktiot } \geq 0\text{, integr. puolittain (L. 4.27))}$$

$$\Rightarrow \int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+ \qquad \text{(integraalit } < \infty\text{)}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_E h = \int_E h^+ - \int_E h^- &= \int_E f^+ - \int_E f^- + \int_E g^+ - \int_E g^- \\ &= \int_E f + \int_E g.\end{aligned}$$

(ii): (a) $\lambda \geq 0$

$$(\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^-$$

$$\Rightarrow \int_E (\lambda f)^+ = \lambda \int_E f^+ \quad \text{ja} \quad \int_E (\lambda f)^- = \lambda \int_E f^-$$

$\Rightarrow$ väitös

(b) $\lambda < 0$

$$(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^- \quad \text{ja} \quad (\lambda f)^- = (-\lambda) f^+, \quad \text{josta väitös kuten edellä}$$

(iii): (i) ja (ii) $\Rightarrow$ $g - f$ integroituva ja

$$\int_E g = \int_E f + \int_E \underbrace{(g - f)}_{\geq 0} \geq \int_E f$$

(iv): $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f^+ = 0$ ja $\int_E f^- = 0 \quad \Rightarrow \int_E f = 0$

(v): $f = g$ m.k. E:ssä $\Rightarrow$ $f^+ = g^+,\ f^- = g^-$ m.k. E:ssä

$$\Rightarrow \int_E f^+ = \int_E g^+ \ \text{ ja } \ \int_E f^- = \int_E g^- \ \Rightarrow \ \text{väitös} \quad \square$$

4.51 Dominoidun Konvergenssin Lause (DKL)

Nyt on vuorossa konvergenssilauseista käyttökelpoisin. Se ei vaadi monotonisuutta kuten MKL, ja ilmaisee yhtäsuuruuden toisin kuin Fatoun lemma.

Lause 4.52. (**Dominoidun konvergenssin lause, DKL**) *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, mitallisia funktioita s.e.*

(4.53) $$f(x) = \lim_{j \to \infty} f_j(x) \quad \text{m.k. } x \in E\,.$$

Jos on olemassa integroituva *funktio* $g \colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ *joka* ”dominoi funktiojonoa”,

(4.54) $$|f_j(x)| \leq g(x),\ \forall\ j \in \mathbb{N},\ \text{ja m.k. } x \in E\,,$$

niin silloin rajafunktio f on integroituva E:ssä ja

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,. \qquad (\textit{Huom.}\ \int_E f \in \mathbb{R})$$

Huomio. Ensinnäkin, määrittelemällä f_j, f ja g uudelleen 0-mittaisessa joukossa, voidaan todistettaessa olettaa, että konvergenssi (4.53) ja arviot (4.54) pätevät *kaikilla* $x \in E$. Teemme tämän yksinkertaistuksen seuraavissa todistuksissa.

DKL:n Graafitodistus. MKL ja Fatoun Lemma ovat intuitiivisesti uskottavia kun niitä ajattelee graafi-tulkinnan valossa. Samaa kannattaa yrittää DKL:n tapauksessa. Ei niin, että sen välttämättä *tarvitsee* mukautua meidän rajalliseen käsityskykyymme – merkittävät teoreemat ovat ainakin vähän yllättäviä – mutta koska DKL on yksi analyysin keskeisimmistä työkaluista, on mukava ymmärtää sen luonne niin hyvin kuin mahdolllista.

Koska joukot $\mathcal{G}(f)$ on määritelty vain positiivisille funktioille, meidän pitää ensin palauttaa DKL erikoispaukseen $f_j \geq 0$, $\forall j$. Tämä on helppoa, sillä $g \geq f_j$ joten $g - f_j \geq 0$ kaikilla j. Lisäksi funktioita $g - f_j$ voi dominoida integroitavalla funktiolla $2g$: $|g - f_j| \leq 2g$. Täten jos DKL pätee positiivisille $g - f_j$, on helppo nähdä, että se pätee myös jonolle f_j.

Nyt DKL on itse asiassa vain erikoistapaus eräästä mittateorian perustuloksesta. Päästäksemme jäljille aloitetaan tulkkaamalla oletus, $\exists \lim_j f_j(x) =: f(x)$ kaikilla x, joukkojen $\mathcal{G}(f_j)$ kielelle. Muistamme, että lukujonon raja-arvo on olemassa jos ja vain jos sen $\liminf$ ja $\limsup$ ovat samat. Täten hypoteesimme voi yhtä hyvin ilmaista näin: $\limsup_j f_j(x) = \liminf_j f_j(x)$ kaikilla x. Tästä puolestaan seuraa, että $\limsup_j \mathcal{G}(f_j) = \liminf_j \mathcal{G}(f_j)$ lukuunottamatta m_{n+1}-nollamittaista joukkoa, joka sisältyy graafiin $\{(x,y) : y = f(x)\}$ (joka on todettu nollamittaiseksi). Jätämme yksityiskohdat lukijalle.

Nyt yleinen kysymys kuuluu: *Mitä joukkojonon (A_n) ulko- ja sisä-arvioiden yhtyminen,* $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$*, tarkoittaa? Ja mitä siitä seuraa?*

Vastaus ensimmäiseen kysymykseen: Muista, että $\limsup_n A_n$ koostuu pisteistä, jotka kuuluvat äärettömän moneen joukoista A_n, kun taas $\liminf_n A_n$ pisteistä, jotka kuuluvat lopulta kaikkiin joukkoihin A_n jostakin N lähtien. Näiden tulkintojen valossa yhtälö $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$ tarkoittaa, että *jokainen piste kuuluu, jostakin N lähtien (joka riippuu pisteestä), joko jokaiseen joukoista A_n, tai sitten jokaiseen niiden komplementeista A_n^c.* Väljemmin ilmaistuna: *"heilahtelu*[20] *loppuu jokaisessa pisteessä äärellisessä ajassa".* [Jos lukija haluaa todella ymmärtää DKL:n perisyitä, hänen on parempi pohtia tätä tulkintaa.]

Viimeisen tulkinnan näkökulmasta seuraavan tuloksen pitäisi tuntua jokseenkin uskottavalta. Sillä jos heilahtelu loppuu ennen pitkää joka pisteessä, niin silloin jokainen piste "selkeästi kasvattaa joko rajajoukon tai sen komplementin mittaa".

Lemma 4.55. *Olkoon (A_n) jono mitallisia joukkoja jotka sisältyvät kaikki johonkin äärellismittaiseen joukkoon: $\bigcup_n A_n \subset X$, $m(X) < \infty$. Jos $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n =: \lim_n A_n$ lukuunottamatta nollamittaista joukkoa*[21]*, niin pätee*

$$m(\lim_n A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

Lemman todistus. Jono $C_n := \bigcup_{k\geq n} A_k$ on *laskeva* ja äärellisyysoletuksen ansiosta $m(C_1) <$

[20] Ääretön heilahtelu pisteessä x tarkoittaa, että x kuuluu sekä joukkoihin A_n, että niiden komplementteihin äärettömän monta kertaa; "x ei osaa valita kuuluako valitako joukot vai komplementit".

[21] Tarkoittaen, että $m(\limsup_n A_n \setminus \liminf_n A_n) = 0$.

∞. Täten voimme arvioida mitan monotonisuuden ja konvergenssituloksen (L. 1.66) avulla

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n} m(A_k) \le \lim_{n\to\infty} m(\underbrace{\bigcup_{k\ge n} A_n}_{C_n}) = m(\bigcap_{n\ge 1} C_n).$$

Määritellään *nouseva* joukkojono $B_n := \bigcap_{k\ge n} A_k$. Nyt hypoteesin $m(\limsup_n A_n \setminus \liminf_n A_n) = 0$ nojalla voimme jatkaa edellistä arviointia seuraavasti

$$m(\bigcap_{n\ge 1} C_n) = m(\bigcup_{n\ge 1} B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) \le \lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n} m(A_k).$$

[Tämä viimeinen päättely on itseasiassa Lemman 5.9 todistus uudelleen.] Toisaalta koska lim inf on aina korkeintaan lim sup, niin edellisissä arviointiketjuissa pätee yhtäsuuruudet. $\square$

Nyt DKL on vain edellisen mittateoreettisen aputuloksen erikoistapaus. Kuten yllä perusteltiin, DKL:n hypoteesit takaavat, että $\liminf_j \mathcal{G}(f_j) = \limsup_j \mathcal{G}(f_j)$ lukuun ottamatta m_{n+1}-nollamittaista joukkoa. Lisäksi dominointioletus $f_j \le g$ takaa, että joukot $\mathcal{G}(f_j)$ sisältyvät äärellismittaiseen joukkoon $\mathcal{G}(g)$. Täten Lemman oletukset täyttyvät ja sen väite sanoo

$$\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) = m_{n+1}(\lim_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j)). \tag{4.56}$$

Viimeinen tarvittava huomio on, että rajajoukko $\lim_{j\to\infty} \mathcal{G}(f_j)$ on $\mathcal{G}(\lim_j f_j)$ lukuunottamatta, jälleen, nollamittaista joukkoa. Tämän avulle päättelemme, että

$$\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) = m_{n+1}(\mathcal{G}(\lim_{j\to\infty} f_j)), \tag{4.57}$$

mikä on DKL:n väite graafien avulla ilmaistuna. $\square$

Todistuksen ydinidea yhdellä lauseella: Koska $\exists \lim_j f_j(x) =: f(x)$, niin "$\liminf_j \mathcal{G}(f_j) = \limsup_j \mathcal{G}(f_j)$", joten $\lim_{j\to\infty} m_{n+1}(\mathcal{G}(f_j)) = m_{n+1}(\mathcal{G}(f))$. Kaikki muu on yksityiskohtia, jotka kypsä matemaatikko kykenee tarvittaessa rekonstruoimaan.

Graafijonot, niiden lim sup- ja lim inf-joukot ovat uusia, teknisesti hankalia konsepteja, ja saattavat aluksi vain sekoittaa todistuksen ideaa. Loppujen lopuksi ne ovat kuitenkin selkein tapa raottaa ymmärryksen ovea DKL:n totuuteen. Alla on klassisempi integraali-todistus; se on näppärä, mutta ymmärryksen tasolla vaikeammin seurattava.

Integraalia käyttävä todistus ei ole muuta kuin *Fatoun lemman kaksinkertainen sovellus*. Tarvitsemme aluksi Fatoun hyödyllisen laajennoksen vaihtuvamerkkisille funktioille:

Lemma 4.58. (**Fatoun yleistys**). *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia. Oletetaan, että löytyy integroituva funktio h siten, että $f_j \ge h \ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Silloin*

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j. \tag{4.59}$$

Eli Fatou pätee vaikka oletuksissa "nollafunktio korvataan integroituvalla ala-rajalla".

Todistus. Koska $f_j \ge h \ \forall\ j \in \mathbb{N}$, niin $f_j - h \ge 0 \ \forall\ j \in \mathbb{N}$, joten tavallisen Fatoun mukaan pätee

$$\int_E \liminf_{j\to\infty}(f_j - h) \le \liminf_{j\to\infty} \int_E (f_j - h).$$

Näin ollen, sillä h on *integroituva*, saamme

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j - \int_E h \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j - \int_E h,$$

mikä viimeistelee todistuksen. □

Samalla vaivalla voimme johtaa Fatoun sisartuloksen. Jos olet miettinyt päteekö vastaava tulos kun lim inf korvataan lim sup:lla, olet oikeilla jäljillä. Tästä lähtien niihin kaikkiin voi viitata Fatoun lemmana.

Korollari 4.60. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f_j\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisia. Oletetaan, että löytyy integroituva funktio h siten, että $f_j \le h\ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Silloin*

$$\int_E \limsup_{j\to\infty} f_j \ge \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j. \tag{4.61}$$

Tod. Koska $f_j \le h\ \forall\ j \in \mathbb{N}$, niin $-f_j \ge -h\ \forall\ j \in \mathbb{N}$, joten edellisen Fatoun mukaan pätee

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} -f_j \le \liminf_{j\to\infty} \int_E -f_j.$$

Nyt esimerkiksi $\liminf_{j\to\infty} -f_j = \lim_{j\to\infty} \inf_{i\ge j} -f_i = -\lim_{j\to\infty} \sup_{i\ge j} f_i = -\limsup_{j\to\infty} f_j$, joten saamme

$$-\int_E \limsup_{j\to\infty} f_j \le -\limsup_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

□

Näillä työkaluilla suuri Dominoidun Konvergenssin Lause on parin rivin päättely:

DKL:n Standarditodistus. Olettamme edelleen, että konvergenssi (4.53) ja arviot (4.54) pätevät *kaikilla* $x \in E$.

Toiseksi, rajafunktion integroituvuus seuraa arvioista $|f| \le \sup_j |f_j| \le g$ ja majoranttiperiaatteesta (L. 4.44).

Lopuksi, pääväite saadaan Fatoun "tandemsovelluksella":

$$\limsup_{j\to\infty} \int_E f_j \overset{Fatou}{\le} \int_E \underbrace{\limsup_{j\to\infty} f_j}_{=f} = \int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \overset{Fatou}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Toisaalta lim sup on aina vähintään lim inf, joten yhtäsuuruus pätee ja väite on todistettu. □

Esimerkki 4.62. (vanha loppukoetehtävä) Laske

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^{-3/2} \sin\frac{x}{n}\, dx\,.$$

Olkoon $f_n(x) = nx^{-3/2} \sin\frac{x}{n} = \big(\underbrace{(n/x)\sin(x/n)}_{\to 1,\text{ kun } n\to\infty}\big) x^{-1/2} \xrightarrow{n\to\infty} x^{-1/2} \overset{\text{merk.}}{=} f(x)$, jolloin

$$\int_0^1 f \overset{(*)}{=} \Big/_0^1 2\sqrt{x} = 2.$$

$$|\sin t| \le t\ \forall\ t \ge 0 \ \Rightarrow\ |(n/x)\sin(x/n)| \le 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in (0,1]$$

$$\Rightarrow\ |f_n(x)| \le x^{-1/2} = g(x)\ \big(= f(x)\big),\ g \text{ integroituva yli välin } [0,1]$$

$$\text{DKL} \ \Rightarrow\ \int_0^1 f_n \to \int_0^1 f = 2.$$

[(∗): Tarkasti ottaen ei saada suoraan Riem.-integraalina, sillä f on rajoittamaton välillä $[0,1]$. Voidaan käyttää MKL:ää kuten Esim. s. 58.]

Erikoistapaus DKL:stä:

Lause 4.63. (**Tasaisesti rajoitetun konvergenssin lause, TRKL**) *Olkoon* $m(E) < \infty$, $f_j\colon E \to \mathbb{R}$ *jono integroituvia funktioita,* $f_j \to f$ *m.k. Jos* $\exists\ M < \infty$ *s.e.* $|f_j(x)| \le M\ \forall\ x \in E,\ j \in \mathbb{N}$, *niin*

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j\,.$$

Tod. Valitaan $g(x) = M$.

$$m(E) < \infty \ \Rightarrow\ \int_E g = Mm(E) < \infty \ \Rightarrow\ g \text{ integroituiva}$$
$$\overset{\text{DKL}}{\Longrightarrow}\ \text{väite} \quad \square$$

Korollaari (3.21) ja sen yleistys, Lause 4.29, ovat muodossa tai toisessa olleet keskeisessä roolissa teoriamme tärkeimpiä avaintuloksia. Ne kertovat meille, että integraalia, kiinnitetyllä funktiolla, voi ajatella mittana. Myöhemmillä kursseilla vastaan tulee myös ”mittoja”, jotka antavat joukoille negatiivisiakin arvoja. Seuraava tulos kertoo, että, lukuun ottamatta tietenkin positiivisuutta, ”mitta”-tulkinta voidaan antaa *integroituvan* funktion integraalille.

Lause 4.64 (Integroituvuus erillisen yhdisteen yli)**.** *Olkoot* E_j, $j \in \mathbb{N}$, *mitallisia ja erillisiä ja* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. *Mitallinen funktio* f *on integroituva* E*:ssä jos ja vain jos* f *on integroituva* E_j*:ssä kaikilla* j *ja pätee*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} |f| < \infty. \tag{4.65}$$

Tällöin on voimassa ”integraalin numeroituva additiivisuus joukkofunktiona”:

$$\int_E f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f\,. \tag{4.66}$$

Tod. Ensinnäkin, Lauseen 4.29 mukaan pätee

$$\int_E |f| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} |f|.$$

Täten $\int_E |f| < \infty$ (mikä tarkoittaa f:n integroituvuutta E:n yli) jos ja vain jos $\int_{E_j} |f| < \infty$ (mikä tarkoittaa f:n integroituvuutta E_j:n yli) kaikilla $j = 1, 2, \dots$ ja summa (4.65) on äärellinen. Väitteen ensimmäinen osa on näin todistettu.

Jälkimmäinen osa on nyt helppo päätellä:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^+ - \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f^-$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\int_{E_j} f^+ - \int_{E_j} f^- \Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{E_j} f\,.$$

[(∗) : suppenevia sarjoja]

□

Yhteenveto konvergenssilauseista: On ainoastaan kaksi tilannetta, jolloin raja-arvon ja integroinnin järjestystä EI saa vaihtaa. Ensimmäinen, triviaali, tilanne esiintyy kun raja-arvo $\lim_{j\to\infty} f_j$ ei ole olemassa (m.k.), mikä tarkoittaa "loputonta heilahtelua". Toinen tilanne esiintyy kun "massa karkaa äärettömyyteen"(katso esimerkit Fatoun Lemman jälkeen). Sekä MKL, että DKL sulkevat pois nämä vaaratilanteet; MKL:ssa "massa kasvaa mutta ei karkaa" kun taas DKL:ssa "massan liike rajoitetaan integroituvalla dominanttifunktiolla". Lisäksi molemmissa funktiojonon raja-arvo on olemassa (m.k.).

Lyhyesti integroinnin ja rajankäynnin järjestyksen saa vaihtaa, eli

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j$$

seuraavissa tilanteissa

MKL: $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$,

DKL: $|f_j| \le g, \; g$ integroituva.

Fatoun lemma sitä vastoin ei oleta raja-arvon olemassaoloa ("heilahtelun loppumista") eikä "massan säilyvyyttä" ja täten se ilmaisee "vain" epäyhtälön:

Jos $f_j \ge h$ integroituvalla h niin pätee

$$\int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \le \liminf_{j\to\infty} \int_E f_j \, .$$

Jos taas $f_j \le h$ integroituvalla h, niin

$$\int_E \limsup_{j\to\infty} f_j \ge \limsup_{j\to\infty} \int_E f_j \, .$$

Syvällisen ymmärryksen tasolla on hyvä pitää mielessä, että kaikki konvergenssitulokset palautuvat graafitulkinnan kautta *mitan konvergenssiin ja sitä kautta suoraan mitan numeroituvaan täysadditiivisuuteen.* Tämä käsitelinkki yhdistää mittateorian ja integrointiteorian tärkeimmät tulokset.

Lisätieto: Olkoon (X, Γ, μ) mitta-avaruus. Sanotaan, että Γ-mitallinen funktio $f\colon E \to \dot{\mathbb{R}}$ on integroituva joukon $E \in \Gamma$ yli, jos

$$\int_E |f| < \infty \quad (\iff \int_E f^+ < \infty \text{ ja } \int_E f^- < \infty) \, .$$

Integraalin arvo on

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \quad (\in \mathbb{R}) \, .$$

Luvun 4.39 tulokset (mm. MKL, DKL, jne.) ovat edelleen voimassa (paitsi yhteydet Riemann-integraaliin). Todistuksissa korvataan $\mathbb{R}^n$ joukolla X, Lebesgue-mitta m mitalla μ, jne.

5 Fubinin lauseet

Fubinin lauseet liittyvät tärkeisiin integroinnin perusoperaatioihin: ”korkeampiulotteisen integraalin” laskemiseen alempiulotteisten integraalien avulla ja iteroidun integraalin järjestyksen vaihtamiseen.

Otetaan esimerkkitapaus: Olkoon $A = [a, b] \times [c, d]$ suljettu 2-väli ja $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Silloin on olemassa vanha kunnon Riemann-integraali

$$(R)\int_A f$$

Mutta mitä teemme jos haluamme oikeasti evaluoida tämän integraalin? Muodostamme integraalin ylä- ja alasummia? Ei, vaan käytännössä integraalit lasketaan aina Analyysin Peruslauseen avulla. Mutta analyysin peruslausetta voi soveltaa vain yksiulotteisiin integraaleihin.

Onneksi Vektorianalyysi -kurssin tiedot takaavat (eikä haittaa vaikket enää muista miksi, koska kohta näet kovemman version), että jatkuvan funktion f integraali yli joukon A voidaan todellakin laskea yksiulotteisina, peräkkäisinä integraaleina:

$$(R)\int_A f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

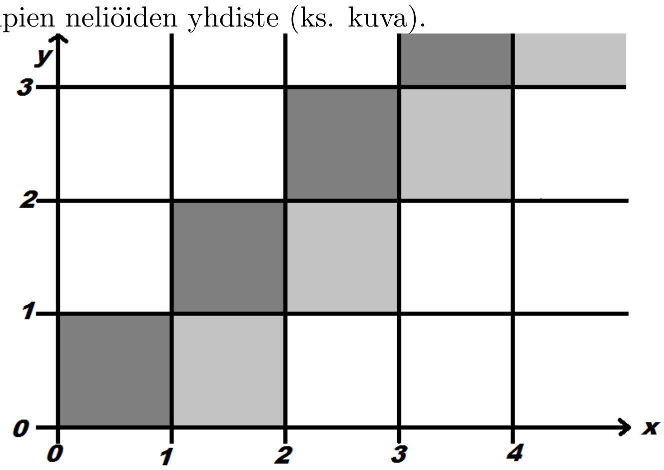
Käytännössä kaikki integraalilaskut lasketaan tällä tavoin, ja olisi kiva tietää milloin voimme menetellä näin. Myös Lebesgue integraalin tapauksessa ja yleisemmillä funktioilla?

Tässä välissä voi huomauttaa, että Fubinin voi tulkita ”jatkuvana versiona summauksen järjestyksen vaihdosta”:

$$\sum_n \sum_k a_{n,k} = \sum_k \sum_n a_{n,k}.$$

Ja aivan kuten järjestyksen vaihto ei ole yleisesti sallittu summilla, ei se myöskään ole yleisesti mahdollista integraaleilla:

Esimerkki 5.1 (Fubini ei päde aina)**.** Rakennamme funktion jonka integraalille ”järjestyksen vaihto” ei päde. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = \chi_A - \chi_B$, missä $A =$ tummempien neliöiden yhdiste ja $B =$ vaaleampien neliöiden yhdiste (ks. kuva).



Nyt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0\ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy = 0\,.$$

Toisaalta

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \chi_{[0,1]}(x) \quad (f(x,y) \equiv 1 \text{ alimmassa "}A\text{-neliössä" } [0,1]\times[0,1])$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Myöhemmin näemme, että konstruoimamme funktio ei toteuta Fubinin lauseiden ehtoja, sillä se on vaihtuvamerkkinen (joten Fubinin ensimmäistä lausetta ei voi käyttää) ja myös

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{A\cup B} = m_2(A\cup B) = \infty$$

eli f ei ole integroituva $\mathbb{R}^2$:ssa (joten Fubinin toistakaan lausetta ei sovi soveltaa).

Milloin sitten saamme "integroida iteroiden missä järjestyksessä huvittaa"?

Varoittavasta esimerkistä huolimatta osoittautuu, että toimenpide on loppujen lopuksi sallittu *hyvin* yleisillä ja helposti muotoiltavilla ehdoilla. Nämä kaksi keskeistä tulosta kulkevat nimellä Fubinin lauseet. Vaikka niiden todistukset saattavat vaikuttaa monimutkaisilta, ideat ovat jopa yllättävän alkeellisia. Myös esiintyvät todistustekniikat ovat opettavaisia. Viimeiseksi, Fubinin lauseet ovat siitä mukavia, että niitä on hyvin helppo käyttää vaikka todistusta ei muistaisikaan.

5.2 Fubinin ensimmäinen lause ($f \geq 0$)

Notaatio: On kätevää identifioida avaruus $\mathbb{R}^{p+q}$ tuloavaruuden $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p,q \in \mathbb{N}$. kanssa:

$$z \in \mathbb{R}^{p+q} \iff z = (\underbrace{x_1,\ldots,x_p}_{=x\in\mathbb{R}^p}, \underbrace{y_1,\ldots,x_q}_{=y\in\mathbb{R}^q}) = (x,y).$$

Fubinin ensimmäinen lause koskee ei-negatiivisia funktioita. Kaikki funktiot voidaan esittää erotuksena kahdesta ei-negatiivisesta, joten tämä ensimmäinen lause sisältää oleellisesti jo molempien Fubinien "syvällisen" informaation.

Lause 5.3. **(Fubinin 1. lause,** $f \geq 0$) *Olkoon* $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallinen ja* $f \geq 0$. *Tällöin*

(1)

$$y \mapsto f(x,y) \textit{ mitallinen m.k. } x \in \mathbb{R}^p\,;$$
$$[\text{siis } m_p\big(\{x\in\mathbb{R}^p\colon y\mapsto f(x,y) \text{ ei-mitallinen}\}\big) = 0]$$

(1')

$$x \mapsto f(x,y) \textit{ mitallinen m.k. } y \in \mathbb{R}^q\,;$$

(2)

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) \quad \textit{mitallinen;}$$

(2')

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x) \quad \textit{mitallinen;}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &\overset{(3a)}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) \\ &\overset{(3b)}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x) \right) dm_q(y)\,. \quad (+\infty \text{ sallittu})\end{aligned}$$

Huomautus 5.4. Lukuun ottamatta "positiivisuus-rajoitusta" oletukset ovat minimaaliset: vaadimme vain funktion $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallisuutta, mikä on väistämätöntä, koska tarkoituksemme on integroida sitä.

Kohta (3), eli integraalin lasku interoiduilla integraaleilla, on Fubinin oleellinen sanoma. Mikä siis on kohtien (1) ja (2) sisältö? Tämä on huolellisen matemaatikon heiniä. Katso ensin sisempää iteroiduista integraaleista kohdassa (3a):

$$\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y).$$

Jotta Fubini "voisi päteä", tämän integraalin täytyy olla hyvin määritelty ainakin melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^p$. Tätä varten *haluamme* kohdan (1). Merkittävää kuitenkin on, *ettei meidän tarvitse olettaa sitä erikseen, vaan se seuraa automaattisesti f:n mitallisuudesta.*

Samoin, jotta iteroitu integraali,

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x),$$

olisi määritelty, "haluamme" funktion

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y)$$

mitallisuuden, eli kohdan (3). Jälleen lause kertoo, ettei meidän tarvitse olettaa sitä erikseen.

Eli tässä mielessä kohta (3) on Fubinin tärkein sisältö; sivutulokset (1)-(2) takaavat sen hyvän muotoilun.

Todistus: Palautus karakteristisiin funktioihin. Ensimmäinen askel on osoittaa, että Fubini riittää todistaa karakteristisille funktioille. Olkoon $f \geq 0$ mitallinen. Silloin se on *monotoninen pisteittäinen raja yksinkertaisia funktioita* $\varphi_j \nearrow f$ (Lause 3.26). Olkoon funktioilla φ_j esitykset $\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\chi_{A_{i,j}}$, $j = 1, 2, \ldots$. Näin ollen MKL sanoo, että pätee

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \lim_{j\to\infty} \varphi_j \\ &\overset{MKL}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \varphi_j \\ &= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_{A_{i,j}}\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Oleta nyt, että Fubini pätee karakteristisille funktiolle χ_A, missä $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on mitallinen joukko. Silloin voimme jatkaa edellistä yhtälöketjua ja päätellä

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_{A_{i,j}}}_{\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\chi_{A_{i,j}}\,dm_q\right)dm_p} &= \lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\chi_{A_{i,j}}\,dm_q\right)dm_p \\
&\overset{MKL}{=} \int_{\mathbb{R}^p}\lim_{j\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\chi_{A_{i,j}}\,dm_q\right)dm_p \\
&\overset{MKL}{=} \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j}\chi_{A_{i,j}}\,dm_q\right)dm_p \\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f\,dm_q\right)dm_p. \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Yhdessä edellisen yhtälöketjun (5.5) kanssa tämä osoittaa, että Fubini pätee tällöin myös yleiselle mitalliselle funktiolle f.

Tämä alkutarkastelu, joka käytti vain tulosta $\varphi_j \nearrow f$, osoittaa, että *Fubinin todistus palautuu näennäisesti paljon yksinkertaisempaan erikoistapaukseen jossa f on karakteristinen funktio.*

Fubinin Todistus karakteristiselle funktiolle.

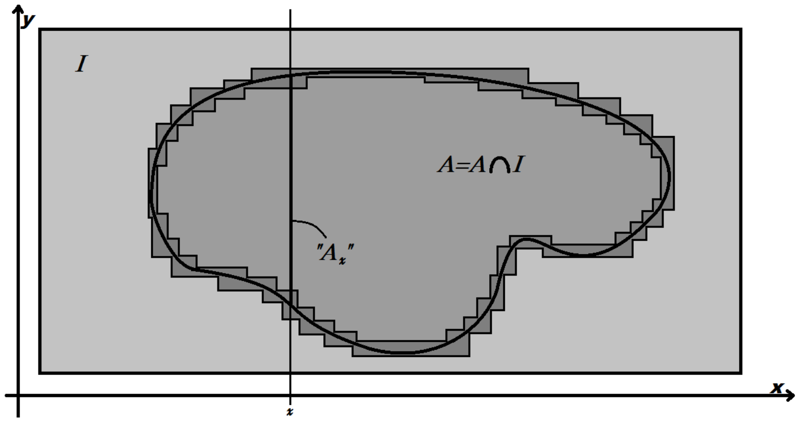
Olkoon siis $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on mitallinen joukko. Määritellään joukon *sektio* $A_x := \{y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^{p+q}\}$. Meidän pitää osoittaa keskimmäinen yhtäsuuruus seuraavassa ketjussa:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_A = m_{p+q}(A) \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \underbrace{m_q(A_x)}_{\int_{\mathbb{R}^q}\chi_{A_x}(y)\;dm_q(y)} dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^q}\chi_A\;dm_q(y)\;dm_p(x). \qquad (5.7)$$

Oikeastaan, ennen kuin meillä on edes "oikeus kirjoittaa näkyviin" edellinen muotoilu, meidän on huolehdittava mitallisuuskysymyksistä! Onko joukko A_x todella mitallinen $\mathbb{R}^q$:ssä? Muuten merkinnässä $m_q(A_x)$ ei ole järkeä. Entä onko funktio $x \mapsto m_q(A_x)$ mitallinen? Muuten sitä ei voi integroida. Viimein, onko funktio $y \mapsto \chi_A(x,y)$ mitallinen y:n suhteen edes melkein kaikilla x? Muuten viimeinen integraali ei ole hyvin määritelty. Paljon kysymyksiä, mutta niiden vastaukset saa kerralla ja helposti kunhan keksii oikean lähestymistavan. "Oikea" reitti on alkeellisuudessaan kenties hieman yllättävä. Palaamme nimittäin mitallisuuden perusteisiin, ulkomitan määritelmään ja Caratheodoryn ehtoon.

Koska $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ on mitallinen joukko, se toteuttaa Carathrodoryn ehdon testi-n-välillä I: $\ell(I) = m^*_{p+q}(I \cap A) + m^*_{p+q}(I \setminus A)$. Vaihtoehtoisesti – ellei jopa ensisijaisesti – tämä kannattaa tulkita ehtona $m^*_{p+q}(I \cap A) = m_{p+q\,*}(I \cap A)$, missä $m_{p+q\,*}(I \cap A)$ määritellään kaavalla $\ell(I) - m^*_{p+q}(I \cap A)$. Kuten muistamme, tämä tarkoittaa, että joukkoa $I \cap A$ "voi arvioida mielivaltaisen hyvin sekä ulkoa että sisältä" (Kuva alla tapauksessa $A \subset I$).

Strategia: Miksi sektiot $(I \cap A)_x = I_x \cap A_x$ ovat m_q-mitallisia, jos joukko $I \cap A$ on m_{p+q}-mitallinen. Keskity nyt joukkoon $I_x \cap A_x$, jonka haluaisimme osoittaa mitalliseksi. Jos $\mathcal{F} = \{J\}$ on koko joukon $I \cap A$ Lebesguen peite, niin silloin siitä johdettu sektioiden perhe $\mathcal{F}_x := \{J_x\}$ on sektion $I_x \cap A_x$ Lebesguen peite. Sama periaate pätee sisäarviolle: jokainen koko joukon $I \cap A$ sisäarvio antaa sektioiden $I_x \cap A_x$ sisäarviot. Ja, kuten kuva voimakkaasti vihjaa, mitä paremmat ulko- ja sisäarviot valitsemme koko joukolle $I \cap A$, sitä paremmat sisä- ja ulkoarviot saamme myös sektiolle $I_x \cap A_x$ jokaisessa pisteessä x. Todistuksen pohjimmainen moraali on, että koska joukon $I \cap A$



arviot yhtyvät, niin silloin – suhteellisen ymmärrettävästi – myös siivujen $I_x \cap A_x$ arviot yhtyvät, ainakin melkein kaikilla x. Se taas tarkoittaa, että siivut $I_x \cap A_x$ ovat mitallisia. Yksinkertaista!

Strategiaa ei ole vaikea tehdä täsmälliseksi. Jokaisella $n = 1, 2, \ldots$ valitaan joukon $I \cap A$ ulko- ja sisäapproksimaatiot "tarkkuudella $1/n$". Eli, ulkomitan määritelmän mukaan on olemassa $I \cap A$:n Lebesguen peite $\mathcal{F}_n$ siten, että $m^*_{p+q}(I \cap A) \geq S(\mathcal{F}_n) - 1/n$. Samoin on olemassa erotuksen $I \setminus A$ Lebesguen peite $\mathcal{G}_n$ siten, että $m^*_{p+q}(I \setminus A) \geq S(\mathcal{G}_n) - 1/n$. Merkitään $\tilde{S}(\mathcal{G}_n) := \ell(I) - S(\mathcal{G}_n)$, jolloin voimme arvioida (käyttämällä mitallisuutta) arvioiden erotusta:

$$0 = m^*_{p+q}(I \cap A) - m_{p+q\,*}(I \cap A) \geq S(\mathcal{F}_n) - \tilde{S}(\mathcal{G}_n) - \frac{2}{n}. \tag{5.8}$$

[Jos haluat verrata yhtälöä kuvaan, niin $S(\mathcal{F}_n)$ edustaa ulkomonikulmion alaa kun taas $\tilde{S}(\mathcal{G}_n)$ edustaa sisämonikulmion alaa.]

On aika pienen väliepisodin, jossa osoitamme, että Fubini pätee triviaalisti n-väleille; tämä sallii meidän esittää summat $S(\mathcal{F}_n)$ integraalina $\int S(\mathcal{F}_{n\,x})\, dm_q(x)$.

Jokainen $\mathbb{R}^{p+q}$:n n-väli J on automaattisesti $\mathbb{R}^p$:n n-välin ja $\mathbb{R}^q$:n n-välin tulo, $J_p \times J_q$, joten $J_x = J_q$ jos $x \in J_p$, ja muuten tyhjä joukko. Eli joka tapauksessa J_x mitallinen, ja pätee identiteetti

$$\ell(J) = \ell(J_p \times J_q) = \underbrace{\ell(J_p)}_{m_p(J_p)}\, \ell(J_q) = \int_{\mathbb{R}^p} \ell(J_x)\, dm_p(x). \tag{5.9}$$

(Oleellisesti kyseessä on Fubini n-väleille, eli yhtälö 5.7.) Sovelletaan tätä Lebesguen peitteen summaan $S(\mathcal{F})$, jolloin saamme

$$\begin{aligned} S(\mathcal{F}) &= \sum_{J \in \mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^p} \ell(J_x) dm_p(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \sum_{J \in \mathcal{F}} \ell(J_x) dm_p(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} S(\mathcal{F}_x) dm_p(x), \end{aligned} \tag{5.10}$$

missä toinen yhtälö nojaa Beppo-Levin lauseeseen (eli MKL:een). Vastaavasti pätee

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}(\mathcal{G}) &:= \ell(I) - S(\mathcal{G}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \ell(I_x)\ dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} S(\mathcal{G}_x)\ dm_p(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \tilde{S}(\mathcal{G}_x)\ dm_p(x). \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

Nyt voimme kirjoittaa arvion (5.8) muotoon

$$
\frac{2}{n} \geq \int_{\mathbb{R}^p} \big(S(\mathcal{F}_x) - \tilde{S}(\mathcal{G}_{n\,x})\big)\ dm_p(x). \qquad (5.12)
$$

Ottamalla infimum yli arvioiden saamme

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \inf_n \int_{\mathbb{R}^p} \big(S(\mathcal{F}_{n\,x}) - \tilde{S}(\mathcal{G}_{n\,x})\big)\ dm_p(x) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^p} \inf_n \big(S(\mathcal{F}_{n\,x}) - \tilde{S}(\mathcal{G}_{n\,x})\big)\ dm_p(x), \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

missä toinen arvio on yleinen selvä periaate (sama, itse asiassa, jota käytimme Fatoun todistuksessa).

Nyt, viimeiseksi, huomaa, että kaikilla n pätee $S(\mathcal{F}_{n\,x}) - \tilde{S}(\mathcal{G}_{n\,x}) \geq m^*_{p+q}(I_x \cap A_x) - m_{p+q\,*}(I_x \cap A_x) \geq 0$, joten viimeinen integrandimme on positiivinen kaikissa pisteissä x. Toisaalta positiivisen funktion integraali on negatiivinen jos ja vain jos funktio on nolla melkein kaikkialla. Eli päättelemme:

$$
0 = \inf_n \big(S(\mathcal{F}_{n\,x}) - \tilde{S}(\mathcal{G}_{n\,x})\big) \geq m^*_q(I_x \cap A_x) - m_{q\,*}(I_x \cap A_x) \geq 0, \quad (m.k.\ x \in \mathbb{R}^p). \qquad (5.14)
$$

Tämä puolestaa tarkoittaa, että siivu $I_x \cap A_x$ todellakin on mitallinen melkein kaikilla x. Täten sama pätee sektiolle A_x. [Saat Caratheodoryn ehdon q-väleille kirjoittamalla $m_{q\,*}(I_x \cap A_x) := \ell(I_x) - m^*_q(I_x \setminus A_x)$.]

Lisäksi yhtälöstä (5.14) seuraa, että $m^*_q(I_x \cap A_x) = \inf_n S(\mathcal{F}_{n\,x})$ m.k. joten funktio $x \mapsto m_q(I_x \cap A_x)$ on mitallinen, koska $x \mapsto \inf_n S(\mathcal{F}_{n\,x})$ on mitallinen funktio. Tämä ratkaisee kriittiset mitallisuushaasteet ja täten todistaa yhtälön (5.7) ja sitä myötä Fubinin. □

Fubinin Moraali: Iteroidut integraalit ylä- ja alaarvioina. Fubinin takana on kuin onkin lopulta hyvin yksinkertainen periaate joka on pelkistyy edellisen todistuksen kuvassa: Jos joukkoa A voi approksimoida mielivaltaisen hyvin, niin silloin myös sen siivuja A_x voi. Jos on valmis joustamaan täsmällisyydestä asiaa voi valaista myös seuraavasti:

Ulkomitta ja sisämitta tarjoavat yhden tavan arvioida joukon A mahdollista mittaa. Iteroidut integraalit tarjotavat uuden, entistä tarkemman arvion. Määritellään "ultraulkomitta"[22]

$$
m^{**}_{p+q}(A) := \int_{\mathbb{R}^p} m^*_q(A_x)\ dm_p(x), \qquad (5.15)
$$

[22]Itseasiassa funktio $x \mapsto m^*_q(A_x)$ ei välttämättä ole mitallinen, joten meidän pitäisi tulkita kaavan integraali Lebesgue *ylä*integraalina. Vastaavasti ultrasisämitassa alaintegraalina. Nyt kuitenkin keskitymme teknisten yksityiskohtien sijasta ideaan.

ja "ultrasisämitta"

$$m_{p+q\,**}(A) := \int_{\mathbb{R}^p} m_{q\,*}(A_x)\ dm_p(x). \tag{5.16}$$

Nimensä mukaisesti ultraulkomitta on aina vähintään yhtä tarkka kuin tavallinen ulkomitta, eli pätee $\underline{m^{**}_{p+q}(A) \le m^*_{p+q}(A)}$. Perustelu:

$$\begin{aligned} m^*_{p+q}(A) &:= \inf_{\mathcal{F}} S(\mathcal{F}) \\ &= \inf_{\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^p} S(\mathcal{F}_x)\ dm_p(x) \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^p} \inf_{\mathcal{F}} S(\mathcal{F}_x)\ dm_p(x) \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^p} m^*_q(A_x)\ dm_p(x). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Identtisesti $\underline{m_{p+q\ **}(A) \ge m_{p+q\ *}(A)}$, joten ultrasisämitta on aina vähintään yhtä tarkka kuin sisämitta.

Ja nyt se yksinkertainen periaate johon Fubini perustuu: Jos *karkeammat* arviot yhtyvät, $m^*_{p+q}(A) = m_{p+q\ *}(A)$, niin toki silloin myös *tarkempien* arvioiden pitää yhtyä, $m^{**}_{p+q}(A) = m_{p+q\ **}(A)$. Tämä puolestaan tarkoittaa

$$\int_{\mathbb{R}^p} m^*_q(A_x)\ dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} m_{q\,*}(A_x)\ dm_p(x).$$

Mutta koska pätee $m^*_q(A_x) - m_{q\,*}(A_x) \ge 0$ kaikilla x, niin täytyy itseasiassa päteä yhtäsuuruus $m^*_q(A_x) = m_{q\,*}(A_x)$ melkein kaikkialla. Eli osoitimme, jälleen, että A_x on mitallinen melkein kaikilla x. Tämä "ratkaisee" mitallisuuskysymyksen ja "todistaa" Fubinin.

Jatkopohdintaa: nyt kun meillä on uudet, entistä tarkemmat ylä ja ala-approksimaatiot, niin emmekö soveltaisi mittauksen filosofiaa niihin? Voisimme määritellä, että joukko A on mitallinen jos $m^{**}_{p+q}(A) = m_{p+q\,**}(A)$. Fubinin lause osoittaa, että näin saadaan ainakin yhtä paljon mitallisia joukkoja kuin Lebesgue mittateorialla. Itse asiassa sillä saadaan jopa enemmän, mutta hyvä kysymys kuuluu, missä mielessä moisia joukkoja kannattaa käyttää, mikäli ne eivät ole Lebesgue-mitallisia.

5.18 Fubinin toinen lause (vaihtuvamerkkiset funktiot)

Entä kun mitallinen funktio saa sekä positiivisia, että negatiivisia arvoja? Koska vaihtuvamerkkisen funktion integraali määritellään ei-negatiivisten funktioiden integraalien erotuksena, on suoraviivaista soveltaa Fubinin ensimmäistä lausetta vaihtuvamerkkisiin funktioihin.

Lause 5.19. (**Fubinin 2. lause**, vaihtuvamerkkiset funktiot) *Olkoon* $f\colon \mathbb{R}^{p+q} \to \dot{\mathbb{R}}$ *mitallinen ja* integroituva*, eli*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f| < \infty.$$

Tällöin

(1) $y \mapsto f(x,y)$ *on integroituva* $\mathbb{R}^q$*:ssa m.k.* $x \in \mathbb{R}^p$;

(1') $x \mapsto f(x,y)$ on integroituva $\mathbb{R}^p$:ssä m.k. $y \in \mathbb{R}^q$;

(2) $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y)$ on integroituva $\mathbb{R}^p$:ssä, t.s.

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Big| \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \Big|\, dm_p(x) < \infty\,;$$

(2') $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x)$ on integroituva $\mathbb{R}^q$:ssa;

(3) f on integroituva $\mathbb{R}^{p+q}$:ssa ja

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x) \right) dm_q(y)\,. \quad (\in \mathbb{R})$$

Huomautus 5.20. Kuten ensimmäisessä Fubinissa, oleellinen sisältö on kohdassa (3). Kohdat (1) ja (2) ovat "vain" huomioita, joita tarvitaan viimeisen kohdan turvalliseen määrittelyyn. Myös alkuhypoteesi f:n integroituvuudesta on "väistämätön", koska muuten koko integraali $\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f$ ei ole määritelty.

Fubinin ensimmäisen lauseen mukaan pätee

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f| = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\, dm_q(y) \right) dm_p(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\, dm_p(x) \right) dm_q(y),$$

joten f:n integroituvuus voidaan tarkistaa iteroidulla integraalilla.

Todistuksen tiivistelmä. Meidän ei tarvitse muuta kuin esittää vaihtuvamerkkisen funktion integraali posiviivisen ja negatiivisen osien integraalien erotuksena, soveltaa niihin Fubinin ensimmäistä, ja lopuksi nitoa osat yhteen Lauseen 4.49 avulla.

Todistus. Todistamme kohdat (1), (2) ja kohdasta (3) ensimmäisen yhtälön. Muut menevät identtisesti.

Lähdetään liikkeelle suoraviivaisesti: kirjoitetaan auki vaihtuvamerkkisen funktion integraalin määritelmä ja sovelletaan Fubinin ensimmäistä lausetta ei-negatiivisiin funktioihin f^+ ja f^-.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ - \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^- \\ &\overset{\text{Fub. 1.}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x). \end{aligned}$$

Näin pitkälle pääsimme ilman mitään ylimääräisiä päättelyjä. Olemme valmiit jos pystymme yhdistämään ensim uloimmat integraalit

$$\begin{aligned} (5.21) \quad & \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) \quad = \\ & \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\, dm_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x). \end{aligned}$$

jonka jälkeen haluaisimme yhdistää myös sisemmät integraalit (ainakin m.k. x):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dm_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dm_q(y) &= \int_{\mathbb{R}^q} \underbrace{\big(f^+(x,y) - f^-(x,y)\big)}_{=f(x,y)} dm_q(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y). \qquad (5.22)\end{aligned}$$

Siispä ainoa tehtävämme on siis oikeuttaa kyseiset operaatiot. Integraalien yhdistämiseen käytämme Lauseen 4.39 kohtaa (i). Sen mukaan meidän pitää ensiksikin osoittaa, että funktiot $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f^\pm(x,y)\,dm_q(y)$ ovat integroituvia. Mutta tämä seuraa suoraan hypoteeseista, sillä

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Big(\Big|\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)\Big| \Big)\,dm_p(x) \le \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\,dm_q(y) \Big)\,dm_p(x) < \infty.$$

Täten ensimmäinen yhdistysoperaatio (5.21) on sallittu (ja samalla väitteen kohta (2) todistettu).

Toista yhdistysoperaatiota (5.22) varten meidän on Lauseen 4.49 mukaan tarkistettava, että funktiot $y \mapsto f^\pm(x,y)$ ovat integroituvia $\mathbb{R}^q$:ssa m.k. $x \in \mathbb{R}^p$;. Tämäkin on helppoa, koska Fubinin ensimmäisen lauseen mukaan

$$\int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{\mathbb{R}^q} f^\pm(x,y)\,dm_q(y) \Big)\,dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^\pm < \infty,$$

joten Lauseen 4.49 mukaan $\int_{\mathbb{R}^q} f^\pm(x,y)\,dm_q(y) < \infty$ m.k. $x \in \mathbb{R}^p$. Täten myös yhdistys (5.22) on sallittu ja todistus on valmis. $\square$

Joitakin sovelluksia (lisää "Reaalianalyysi I" kurssilla).

Esimerkki 5.23. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2$ mitallinen joukko, jolle $m_2(E) = 0$. Väite: Melkein jokainen vaakasuora (vast. pystysuora) leikkaa E:n joukossa, jonka 1-ulotteinen Lebesguen mitta $= 0$.

Ratk. Merkitään

$$\begin{aligned} E_1(b) &= \{x \in \mathbb{R} \colon (x,b) \in E\},\ b \in \mathbb{R}; && \text{(vaakasuoran } y = b \text{ ja } E\text{:n leikkaus)} \\ E_2(a) &= \{y \in \mathbb{R} \colon (a,y) \in E\},\ a \in \mathbb{R}. && \text{(pystysuoran } x = a \text{ ja } E\text{:n leikkaus)} \end{aligned}$$

Väite tarkoittaa:

$$m_1\big(E_1(y)\big) = 0 \quad \text{m.k. } y \in \mathbb{R}, \quad \text{ja vast.} \quad m_1\big(E_2(x)\big) = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}.$$

Fubini 1. funktiolle $f = \chi_E \ \Rightarrow$

$$0 = m_2(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_E \overset{\text{Fub. 1.}}{=} \int_R \Big(\overbrace{\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x,y)}_{\chi_{E_2(x)}(y)}\, dy}^{m_1(E_2(x))} \Big)\,dx$$

$$\overset{4.30\text{ (ii)}}{\Longrightarrow} m_1\big(E_2(x)\big) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbb{R}.$$

Samoin $m_1\big(E_1(y)\big) = 0$ m.k. $y \in \mathbb{R}$.

Kääntäen: Jos $E \subset \mathbb{R}^2$ on mitallinen osajoukko s.e. $m_1\big(E_2(x)\big) = 0$ m.k. $x \in \mathbb{R}$ (tai $m_1\big(E_1(y)\big) = 0$ m.k. $y \in \mathbb{R}$), niin $m_2(E) = 0$. Syy: Fubini 1. ja (mitallinen funktio) $f = \chi_E$ (kuten edellä).

Lisätieto: Edellisessä esimerkissä oletus $E \subset \mathbb{R}^2$ mitallinen on oleellinen: nimittäin $\exists\ E \subset \mathbb{R}^2$ s.e.

- E ei Lebesguen mitallinen (joten $m^*(A) > 0$)
- jokainen vaakasuora leikkaa E:n korkeintaan yhdessä pisteessä
- jokainen pystysuora leikkaa E:n korkeintaan yhdessä pisteessä.

(Sierpinski: Fundamenta Mathematica 1 (1920), s. 114.

Esimerkki 5.24. Laske

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}. \qquad \text{(esim. TN-laskenta)}$$

Ratk. Epäoleellinen Riemann-integraali tasossa

$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy &= \lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_{B(0,n)} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^n\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,drd\varphi \\ &= 2\pi\lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^n re^{-r^2} = \pi\lim_{n\to\infty} \Big/_0^n - e^{-r^2} = -\pi\lim_{n\to\infty}\big(e^{-n^2}-1\big) = \pi\,.\end{aligned}$$

Toisaalta MKL $\overset{(**)}{\Longrightarrow}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = (\mathrm{R})\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy\,.$$

Lisäksi Fubini 1. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\pi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right)dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \\ \Rightarrow &\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.\end{aligned}$$

$(*)$: napakoordinaatit

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad x^2+y^2 = r^2\,, \quad \text{jakobiaani } J(r,\varphi) = r\,.$$

$(**)$: MKL sovell. funktioihin $f_n(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\chi_{B(0,n)}(x,y)$.

Esimerkki 5.25 ("Kaavan (-1.2) todistus" Fubinilla)**.** Olkoon $f \geq 0$ mitallinen. Esipuheessa ja mitallisten kuvausten johdantokappaleessa mainittiin, että Lebesgue integraalin voi halutessaan määritellä Riemann-integraalin avulla. Vaika tällä kurssilla olemme rakentaneet Lebesgue integraalin itsenäiseksi, niin sama kaava pätee toki edelleen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_0^\infty m(f^{-1}(t,\infty])\, dt, \tag{5.26}$$

missä vasemmalla on Lebesgue integraali ja oikealla kumpi vain [koska integrandi on monotoninen, se on Riemann-integroituva]. Kaavan voi todistaa alkeellisesti täsmälleen esipuheen metodilla ja Monotonisella konvergenssilla, mutta harjoituksen vuoksi näytämme Fubiniin nojaavan todistuksen[23].

Tod. Meidän tarvitsee vain esittää luku $f(x)$ yksiulotteisen välin mittana $m_1[0,f(x))$, jonka puolestaan voi esittää integraalina $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x))}(y)\ dm_1(y)$. Käyttämällä tätä triviaalia esitystä saamme iteroidun integraalin

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} m_1[0,f(x))\ dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x))}(y)\ dm_1(y)\ dm_n(x). && (5.27)
\end{aligned}$$

(5.28)

Nyt funktio $(x,y) \mapsto \chi_{[0,f(x))}(y) = \chi_{\mathcal{G}(f)}(x,y)$ on mitallinen (koska joukko $\mathcal{G}(f)$ on m_{n+1}-mitallinen). Täten Fubinin ensimmäisen lauseen nojalla voimme vaihtaa iteraation järjestyksen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x))}(y)\ dm_1(y)\ dm_n(x) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,f(x))}(y)\ dm_n(x)\ dm_1(y) \\
&= \int_0^\infty m_n(f^{-1}(y,\infty])\ dm_1(y), && (5.29)
\end{aligned}$$

sillä $\chi_{[0,f(x))}(y) = 1$ jos ja vain jos $0 \le y < f(x)$ eli $y \ge 0$ ja $x \in f^{-1}(y,\infty]$. $\square$

LOPPU

[23] Jos olet sisäistänyt Lebesgue-integroinnin vaakapalkki-idean kunnolla, "näet" että kaavan täytyy päteä automaattisesti.

Alla luettelo (eräistä) kirjoista, joita voi käyttää lisämateriaalina. Parhaiten kurssin tarpeisiin ja filosofiaan soveltuva englannin kielinen kurssikirja on Taon *An introduction to measure theory.* (Se sopii myös kurssille Reaalianalyysi I). Lisäksi laillisesti ladattavissa ilmaiseksi netistä.

[Bears] ja [Pugh] tarjoavat vaihtoehtoisia (ja lukijaystävällisiä) lähestymistapoja mitta ja integrointiteoriaan. [Bears] esimerkiksi määrittelee Lebesgue integraalin ylä- ja ala-summilla "matkien" Riemann-integraalia. [Pugh] puolestaan *määrittelee* mitallisen funktion f sellaisena jonka graafijoukko $\mathcal{G}(f)$ on mitallinen ja sen integraalin Lauseen 3.30 pinta-ala-kaavalla.

Muut kirjat ovat alan kovia klassikkoja, mutta eivät parhaimpia alkuvaiheen opiskelijalle. Niihin kannattanee tutustua myöhemmin.

References

[Tao] Terrence Tao, *An introduction to measure theory*, AMS, 2010.

[Bears] Bears, *A Primer in Lebesgue integration*, Academic Press, 1997.

[Pugh] Charles Pugh, *Real Mathematical Analysis*, Springer 2002.

[EG] Evans, Lawrence ja Gariepy Ronald. *Measure theory and fine properties of functions,* CRC Press, 1992.

[Fr] Friedman, Avner. *Foundations of modern analysis,* Dover Publications Inc., 1982.

[GZ] Gariepy, Ronald ja Ziemer, William. *Modern real analysis,* PWS Publishing Company, 1994.

[HS] Hewitt, Edwin ja Stromberg, Karl. *Real and abstract analysis,* Springer-Verlag, 1975.

[Jo] Jones, Frank. *Lebesgue integration on Euclidean space,* Jones and Bartlett Publishers, 1993.

[Mat] Mattila, Pertti. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces,* Cambridge University Press, 1995.

[MW] McDonald, John N. ja Weiss, Neil A. *A course in real analysis,* Academic Press Inc., 1999.

[Ro] Royden, H. L. *Real analysis,* Macmillan Publishing Company, 1988.

[Ru] Rudin, Walter. *Real and complex analysis,* McGraw-Hill Book Co., 1987.