MITTA JA INTEGRAALI, KEVÄT 2016: ERILLISKOE KESÄTENTISSÄ 11.8.2016: ESIMERKKIRATKAISUT, VERSIO 2

Keväällä 2016 kurssin luennoi Tuomas Hytönen ja laskuharjoituksia piti Timo Hänninen. Erilliskokeen on laatinut Tuomas Hytönen, ja sen on arvostellut ja esimerkkiratkaisut laatinut Timo Hänninen.
Huomaa: Nämä ratkaisut eivät ole kokeen pisteytysperuste! Nämä ratkaisut on laadittu vain ja ainoastaan oppimisen tueksi.

Tehtävä 1. Olkoon $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ mitta-avaruus ja $f_n : \Omega \to \mathbf{R}$ mitallinen funktio kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ Osoita, että joukko

$$\left\{x \in \Omega : \text{ jono } \left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} \text{ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu}\right\}$$

on mitallinen.

Ratkaisu. Ratkaisun idea: Muistetaan, että mitallisuus säilyy numeroituvissa joukko-operaatioissa (leikkaus, yhdiste, komplementti). Pyritään siis kirjoittamaan tarkasteltava joukko numeroituvien joukko-operaatioiden avulla joukoista, joiden mitallisuus on oletusten nojalla selvää.

Olkoon $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ mitta-avaruus ja $f_n : \Omega \to \mathbf{R}$ mitallinen funktio kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Olkoon $x \in \Omega$.

Huomataan, että jono $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ on kasvava täsmälleen silloin, kun $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Joukkomerkinnöillä tämä ilmaistaan kirjoittamalla

$$\left\{x \in \Omega : \text{ jono } \left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} \text{ on kasvava}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\}.$$

Huomataan, että jono $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu täsmälleen silloin, kun jollakin $k = 1, 2, \ldots$ pätee $f_n(x) \leq k$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Joukkomerkinnöillä tämä ilmaistaan kirjoittamalla

$$\left\{x \in \Omega : \text{ jono } \left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} \text{ on rajoitettu}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) \leq k\}.$$

Kaikkiaan ollaan saatu, että

$$\begin{aligned} &\left\{x \in \Omega : \text{ jono } \left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} \text{ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu}\right\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) \leq k\}. \end{aligned}$$

Muistetaan mitallisen reaaliarvoisen funktion määritelmä:

Määritelmä. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on *mitallinen*, jos ja vain jos joukko $\{x \in \Omega : f(x) > a\}$ on mitallinen kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

Huomataan, että

- Koska mitallisen funktion määritelmästä seuraa, että mitallisten funktioiden erotus on mitallinen, niin erotusfunktio $f_n - f_{n+1}$ on mitallinen. Mitallisen funktion määritelmän nojalla joukko $\{x \in \Omega : f_n(x) - f_{n+1} > 0\}$ on mitallinen. Koska mitallisuus säilyy numeroituvissa joukko-operaatioissa (leikkaus, yhdiste, komplementti), niin myös joukko $\{x \in \Omega : f_n(x) - f_{n+1} \leq 0\} = \{x \in \Omega : f_n(x) - f_{n+1} > 0\}^c$ on mitallinen.
- Mitallisen funktion määritelmän nojalla joukko $\{x \in \Omega : f_n(x) > k\}$ on mitallinen. Koska mitallisuus säilyy numeroituvissa joukko-operaatioissa (leikkaus, yhdiste, komplementti), niin joukko $\{x \in \Omega : f_n(x) \leq k\} = \{x \in \Omega : f_n(x) > k\}^c$ on myös mitallinen.
- Edellisten kohtien nojalla myös joukko

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega : f_n(x) \leq k\}$$

  on mitallinen, koska se saadaan mitallisista joukoista numeroituvilla joukko-operaatioilla.

Huomautus. Olkoon $\in \Omega$. Analyysin peruskurssien nojalla tiedetään, että jos lukujono $f_n(x)$ on kasvava ja rajoitettu, niin on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Täten

$$\begin{aligned}&\left\{x \in \Omega : \text{ jono } \left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} \text{ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu}\right\} \\ &\subseteq \left\{x \in \Omega : \text{on olemassa raja-arvo } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}\end{aligned}$$

Huomaa, että sisältyvyys voi kuitenkin olla aito, joilloin joukot ovat eri joukkoja ja siksi niiden mitallisuuskin voi olla eri. Esimerkiksi funktioiden $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, joille $f_n(\omega) := (-1)^n \frac{1}{n}$ kaikilla $\omega \in \Omega$, tapauksessa joukot ovat erit:

$$\begin{aligned}\varnothing &= \left\{x \in \Omega : \text{ jono } \left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} \text{ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu}\right\} \\ &\subsetneq \Omega = \left\{x \in \Omega : \text{on olemassa raja-arvo } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}.\end{aligned}$$

Huomautus. Joukon

$$A := \left\{x \in \Omega : \text{on olemassa raja-arvo } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\}$$

osoittamisessa mitalliseksi (mikä ei siis edellisen huomautuksen nojalla riitä tehtävän ratkaisuksi) on oltava tarkkana, mikäli halutaan vedota mitallisuuden säilymiseen rajankäynnissä - tästä lisää ratkaisujen lopussa.

Tehtävä 2. Vertaile lausekkeita

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n \,\mathrm{d}x \qquad \text{ja} \qquad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^n \,\mathrm{d}x.$$

Selitä, miksi niiden ero ei ole ristiriidassa kolmen suppenemislauseen (monotoninen, dominoitu ja Fatou) kanssa.

Ratkaisu. Lasketaan ensin lausekkeiden arvo. Differentiaalilaskennan peruslauseen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n\Big|_{x=0}^{x=1} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Olkoon $x \in (0,1)$. Huomaa, että tällöin $\ln x < 0$. Eksponenttifunktion Taylorin kehitelmän nojalla

$$nx^n = ne^{\ln x n} = \frac{n}{e^{|\ln x| n}} \le \frac{n}{1 + |\ln x| n + \frac{1}{2}|\ln x|^2 \cdot n^2 + \dots} \le \frac{1}{\frac{1}{n} + |\ln x| n + \frac{1}{2}|\ln x|^2 n}.$$

Siten

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = \begin{cases} 0 & \text{jos } 0 \le x < 1, \\ \infty & \text{jos } x = 1, \end{cases}$$

joten

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} nx^n \,\mathrm{d}x = 0.$$

Siis vertailtavat lausekkeet ovat erisuuret. Todetaan seuraavaksi, että tämä ei ole ristiriidassa kolmen suppenemislauseen kanssa.

"Ristiriidaton monotonisen konvergenssin lauseen kanssa". Kerrataan monotonisen konvergenssin lause:

Lause (Monotonisen suppenemisen lause). *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoot $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ mitallisia funktioita. Oletetaan, että jono f_n on kasvava. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Huomautus. Soveltamalla monotonisen suppenemisen lausetta apufunktioihin $g_n := f_1 - f_n$ saadaan monotonisen lauseen laskeva versio: Oletetaan, että jono f_n on laskeva ja f_1 on integroituva. Tällöin $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Edellä todettiin, että lauseen seuraus ei päde funktioille $f_n(x) := nx^n$, joten ristiriidattomuuden toteamiseksi on osoitettava, että lauseen oletus ei myöskään päde. Osoitetaan, että funktiojono f_n ei ole monotoninen (ei laskeva eikä nouseva).

Olkoon $n = 1, 2, \dots$. Tarkastellaan, missä pisteissä $x \in [0,1]$ aidon kasvavuuden vaatima epäyhtälö

$$f_n(x) < f_{n+1}(x)$$

pätee. Nähdään, että se pätee täsmälleen silloin, kun $x > \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n}$. Vastaavasti, käänteinen epäyhtälö

$$f_n(x) > f_{n+1}(x)$$

pätee täsmälleen silloin, kun $x < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n}$. Näin ollen millään $n = 1, 2, \dots$ ei päde, että

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \quad \text{kaikilla } x \in [0,1]$$

eikä

$$f_n(x) \ge f_{n+1}(x) \quad \text{kaikilla } x \in [0,1],$$

joten funktiojono f_n ei ole monotoninen.

"Ristiriidaton dominoidun konvergenssin lauseen kanssa". Kerrataan dominoidun konvergenssin lause:

Lause (Dominoidun suppenemisen lause). *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoot $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ mitallisia funktioita, joille on olemassa pisteittäinen rajafunktio $\lim_{n\to\infty} f_n : \Omega \to [0,\infty]$. Oletetaan, että on olemassa mitallinen funktio $g : \Omega \to [0,\infty]$, joka dominoi funktioita (eli $f_n \le g$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$) ja on integroituva (eli $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$). Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Huomautus. Huomaa, että integroituvakin funktio voi saada nollamittaisessa joukossa arvon ∞, kuten funktio $f : [0,1] \to [0,\infty]$, $f(x) = \infty$ kun $x = 1$ ja $f(x) = 0$ kun $x \in [0,1)$, tai olla rajoittumaton, kuten funktio $f : [0,1] \to [0,\infty]$, $f(x) := \frac{1}{x^{1/2}}$.

Edellä todettiin, että lauseen seuraus ei päde funktioille $f_n(x) := nx^n$, joten ristiriidattomuuden toteamiseksi on osoitettava, että lauseen oletus ei myöskään päde. Osoitetaan, että jokainen dominoiva funktio on integroitumaton. Olkoon $g : [0,1] \to [0,\infty]$ mitallinen funktio, jolle pätee

$$f_n \le g \quad \text{kaikilla } n = 1,2,\ldots.$$

Havaitaan, että funktioiden $f_n(x) := nx^n$ suuret arvot pakkautuvat lähemmäksi ja lähemmäksi kohtaa $x = 1$. Ideana on käyttää tätä hyväksi. Ositetaan väli $[0,1)$ väleihin $[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1})$, missä $n = 1,1,2,\ldots$. Huomaa, että kun n kasvaa, väli $[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1})$ on yhä lähempänä kohtaa $x = 1$. Lasketaan

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1)} g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})} g(x)\,\mathrm{d}x && \text{ositus}\\
&\ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})} f_n(x)\,\mathrm{d}x && \text{dominointi}\\
&\ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})} f_n(1-\frac{1}{n})\,\mathrm{d}x && f_n \text{ kasvava}\\
&\ge \sum_{n=1}^{\infty} f_n(1-\frac{1}{n}) \int_{[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})} \mathrm{d}x && \text{vakion ulosvetäminen integraalista}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\frac{1}{n})^n \frac{1}{n(n+1)} && \int_{[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n+1})} \mathrm{d}x = \frac{1}{n(n+1)}\\
&\ge (1-\frac{1}{2})^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} && \text{lukujono } (1-\frac{1}{n})^n \text{ on alhaalta rajoitettu, koska se on kasvava}\\
&= \infty && \text{harmoninen sarja hajaantuu.}
\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$, mikäli $f_n \le g$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$; toisin sanoen: funktioille f_n ei ole olemassa dominoivaa integroituvaa funktiota.

Huomautus. Bernoullin epäyhtälö toteaa, että kaikilla reaaliluvuilla $x \ge -1$ ja $r \ge 1$ pätee $(1+x)^r \ge 1 + rx$. Tämä epäyhtälö seuraa havainnosta, että mielivaltaisella kiinnitetyllä $r \ge 1$ funktio $x \mapsto (1+x)^r - (1+rx)$ on kasvava (koska sen derivaatta on positiivinen) ja saa arvon $r-1$ kohdassa $x = -1$, joten $(1+x)^r - (1+rx) \ge r - 1 \ge 0$ kaikilla $x \ge -1$. Bernoullin epäyhtälön ja potenssien laskusääntöjen avulla voidaan todeta lukujonon $(1-\frac{1}{n})^n$ (tai yleisemmin lukujonon $(1-\frac{x}{n})^n$) kasvavuus:

$$(1-\frac{1}{n+1})^{n+1} = \big((1-\frac{1}{n+1})^{\frac{n+1}{n}}\big)^n \ge \big(1 - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\big)^n = (1-\frac{1}{n})^n.$$

"Ristiriidaton Fatoun lemman kanssa". Kerrataan Fatoun lemma:

Lause (Fatoun lemma)**.** *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoot $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Funktiot $f_n := nx^n$ toteuttavat Fatoun lemman oletukset. Todetaan, että ne toteuttavat myös lemman seuraukset.

Muistetaan, että lim = lim inf, mikäli raja-arvo on olemassa. Lisäksi niille pätee, että

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = 0$$

ja

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = 1,$$

mikä on sopusoinnussa Fatoun lemman seurauksen kanssa.

Tehtävä 3. Joukko $F \subset \mathbf{R}$ toteuttaa *Carathéodoryn ehdon* (Lebesguen ulkomitan m^* suhteen), mikäli eräs ulkomittaan m^* liittyvä yhtälö on voimassa kaikilla joukoilla $A \subset \mathbf{R}$. Kirjoita kyseinen yhtälö. Sanotaan, että F toteuttaa *Carathéodoryn väliehdon*, mikäli sama yhtälö on voimassa kaikilla *väleillä* $A \subset \mathbf{R}$ yleisten joukkojen sijaan. Osoita, että Carathéodoryn ehto ja Carathéodoryn väliehto ovat keskenään yhtäpitäviä.

Ratkaisu. Muistetaan, että joukko F toteuttaa Carathéodoryn ehdon, mikäli kaikille $A \subseteq \mathbb{R}$ pätee yhtäsuuruus

$$m^*(A) = m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c).$$

Mainitaan, että jos yhtäsuuruus pätee kaikille joukoille $A \subseteq \mathbb{R}$, niin erityisesti se pätee väleille $I \subseteq \mathbb{R}$. Osoitetaan seuraavaksi käänteinen tulos: Mikäli yhtäsuuruus pätee väleille $I \subseteq \mathbb{R}$, niin se pätee kaikille joukoille $A \subseteq \mathbb{R}$. Ideana on, että koska joukon A ulkomitta lasketaan arvioimalla joukkoa välien avulla, niin riittää osoittaa yhtälö näille arvioiville joukoille eli väleille.

Huomataan, että ulkomitan (määritelmän takaamasta) subadditiivisuudesta johtuen yhtäsuuruuden suunta $\le$ on aina totta, joten suunta $\ge$ on se varsinainen ehto. Olkoot I_k, missä $k = 1, 2, \ldots$, välejä, jotka peittävät joukon A eli $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A$. Tarkastellaan suuretta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|.$$

(Muistetaan, että joukon A ulkomitta on näiden suureiden infimum laskettuna yli kaikkien mahdollisten väleistä koostuvien joukon A peitteiden, eli $m^*(A) := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : I_k$ ovat välejä, joille $\bigcup_k I_k \supseteq A\}$.)

Muistetaan, että geometrinen mitta ja Lebesguen ulkomitta yhtyvät väleille eli $|I_k| = m^*(I_k)$.

Lasketaan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) && |I_k| = m^*(I_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \big(m^*(I_k \cap F) + m^*(I_k \cap F^c) \big) && \text{yhtäsuuruus väleille} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k \cap F) + \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k \cap F^c) && \text{summan additiivisuus} \\
&\ge m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cap F) + m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cap F^c) && \text{ulkomitan subadditiivisuus} \\
&\ge m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c) && \text{ulkomitan monotonisuus sovellettuna joukkoihin } \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A.
\end{aligned}$$

Siis luku $m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c)$ on lukujen $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$, missä I_k ovat välejä, joille $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq A$, alaraja, joten suurimmalle alarajalle eli infimumille (joka on joukon A Lebesguen ulkomitta määritelmän nojalla) pätee

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c).$$

Tehtävä 4. Olkoon $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ mitallinen funktio. Osoita, että

$$\int_{\mathbf{R}} f \, \mathrm{d}m_1 = m_2\Big(\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y < f(x)\}\Big).$$

Voit pitää tunnettuna, että jos $E \subset \mathbf{R}$ on mitallinen ja $I \subset \mathbf{R}$ on väli, niin $E \times I \subset \mathbf{R}^2$ on mitallinen. (Vihje: Tarkastele ensin yksinkertaista funktiota f. Miten tätä tapausta voi hyödyntää yleisessä tilanteessa?)

Ratkaisu. Todetaan seuraava aputulos, joka on todistettu esimerkkiratkaisujen lopussa:

Lemma 1 (Lebesguen ulkomitan tulosääntö)**.** Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ ja $B \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin

$$m_1^*(A) m_1^*(B) = m_2^*(A \times B).$$

Tästä seuraa erityisesti se, että jos A ja B ovat Lebesguen mitallisia, niin myös joukko $A \times B$ on Lebesguen mitallinen.

Huomautus. Tehtävän ratkaisussa käytetään vain tulosäännön seuraavaa erityistapausta:

- Jos $E \subseteq \mathbb{R}$ on Lebesguen mitallinen ja $J \subseteq \mathbb{R}$ on väli (ja siten Lebesguen mitallinen), niin tulojoukko $E \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ on myös Lebesguen mitallinen. Tämä tulos annettiin tehtävänannossa.
- Lisäksi tällöin pätee

  $$m_2(E \times J) = m_1(E) \cdot m_1(J).$$

  Tämä tulos seuraa esimerkiksi Fubinin lauseesta integroimalla mitallista ei-negatiivista funktiota $1_E(x) 1_J(y) = 1_{E \times J}(x, y)$.

"Ratkaisutapa I: Fubinin lause" Huomataan, että jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$ funktion f arvo $f(x)$ voidaan kirjoittaa integraalina

$$f(x) = \int_0^{f(x)} \mathrm{d}m_1(y) = \int 1_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < f(x)\}}(x, y) \, \mathrm{d}m_1(y).$$

Osoitetaan seuraavaksi, että joukko $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < f(x)\}$ on Lebesguen mitallinen. Huomataan, että

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < f(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < f(x) - y\}.$$

Riittää siis osoittaa, että funktiot $(x, y) \mapsto y$ ja $(x, y) \mapsto f(x) - y$ ovat mitallisia. Tämä seuraa seuraavasta aputuloksesta:

Lemma 2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ mitallinen funktio. Tälläin funktio $(x, y) \mapsto f(x) \in [0, \infty]$ on myös mitallinen.

Todistus. Olkoon $a \in [0, \infty]$. On osoitettava, että joukko $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) > a\}$ on mitallinen. Huomataan, että

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) > a\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} \times \mathbb{R}.$$

Koska $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ on oletuksen nojalla mitallinen, niin mitallisuuden määritelmän perusteella joukko $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$ on mitallinen. Ääretön väli $\mathbb{R}$ on myös mitallinen. Siten Lemman 1 perusteella tulojoukko $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} \times \mathbb{R}$ on myös mitallinen. □

Nyt on siis todettu, että joukko $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y < f(x)\}$ on Lebesguen mitallinen. Muistetaan, että joukko on mitallinen täsmälleen silloin, kun sen indikaattorifunktio on mitallinen. Siis indikaattorifunktio

$$1_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le y<f(x)\}} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty]$$

on Lebesguen mitallinen ja näin se täyttää Fubinin lauseen mitallisuusoletuksen.

Soveltamalla Fubinin lausetta tähän funktioon saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}m_1(x) &= \int_{\mathbf{R}} \Big(\int 1_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le y<f(x)\}}(x,y)\,\mathrm{d}m_1(y) \Big)\,\mathrm{d}m_1(x) && \text{havainto} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le y<f(x)\}}(x,y)\,\mathrm{d}m_2(x,y) && \text{Fubinin lause} \\
&= m_2(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y< f(x)\}) && \text{integraalin määritelmä.}
\end{aligned}$$

"Ratkaisutapa I: Erittäin yksinkertaisista funktioista mitallisiin funktioihin." Todistetaan yhtäsuuruus etenemällä erityisistä funktioista yleisiin funktioihin.

"Yhtäsuuruus erittäin yksinkertaisille funktioille." Tarkastellaan "erittäin yksinkertaista" funktiota $a1_A$, missä $A \subseteq \mathbb{R}$ on mitallinen joukko ja $a \ge 0$ reaaliluku. Havaitaan, että toisaalta mitan tulosäännön nojalla pätee

$$\int_{\mathbb{R}} a1_A\,\mathrm{d}m_1 = am_1(A) = m_1(A)m_1([0,a)) = m_2(A\times[0,a))$$

ja toisaalta

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y< a1_A(x)\} = A\times[0,a).$$

Siis "erittäin yksinkertaisille funktiolle" $s = a1_A$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}} s\,\mathrm{d}m_1 = m_2(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y< s(x)\}).$$

"Yhtäsuuruus yksinkertaisille funktioille." Tarkastellaan yksinkertaista funktiota $s = \sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k}$, missä $a_k \ge 0$ ja A_k on $\mathbb{R}$:n ositus. Nyt edellisen kohdan avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k} \Big)\,\mathrm{d}m_1 &= \sum_{k=1}^K \int_{\mathbb{R}} a_k 1_{A_k}\,\mathrm{d}m_1 && \text{integraalin lineaarisuus} \\
&= \sum_{k=1}^K m_2(A_k\times[0,a_k)) && \text{jo todettu yhtäsuuruus} \\
&= m_2\Big(\bigcup_{k=1}^K A_k\times[0,a_k)\Big) && \text{mitan additiivisuus ja joukkojen } A_k \text{ erillisyys.}
\end{aligned}$$

Havaitaan, että

$$\bigcup_{k=1}^K A_k\times[0,a_k) = (\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y< \sum_{k=1} a_k 1_{A_k}(x)\}.$$

Nyt on siis osoitettu, että yksinkertaisille funktioille $s = \sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k}$ pätee

$$\int_{\mathbb{R}} s\,\mathrm{d}m_1 = m_2(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y< s(x)\}).$$

"Yhtäsuuruus mitallisille funktioille." Olkoon $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mitallinen funktio. Muistetaan, että on olemassa kasvava jono yksinkertaisia funktioita $s_n \leq s_{n+1} \leq f$ siten, että $\lim s_n = f$. Huomataan, että koska funktiojono s_n on kasvava, niin joukkojono

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < s_n(x)\}$$

on myös kasvava. Lasketaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n \, \mathrm{d}m_1 && \text{integraalin monotonisen suppenemisen lause} \\
&= \lim_{n\to\infty} m_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < s_n(x)\}) && \text{yhtäsuuruus yksinkertaisille funktioille} \\
&= m_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < s_n(x)\}\} && \text{mitan monotonisen suppenemisen lause.}
\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < s_n(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < f(x)\}.$$

Tarkastetaan kumpikin sisältyvyys. Sisältyvyys $\subseteq$ seuraa oletuksesta $s_n \leq f$. Sisältyvyys $\supseteq$ seuraa konvergenssista: Jos $y < f(x)$, niin tällöin $y < s_n(x)$ riittävän suurilla n, koska $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.

Nyt ollaan siis osoitettu, että mitallisille ei-negatiivisille funktioille f pätee

$$\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m_1 = m_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < f(x)\}).$$

Tulosäännön todistus

Oppimisen tueksi todistetaan Lebesguen ulkomitan tulosääntö, Lemma 1. Tätä varten todistetaan ensin aputulos:

Lemma 3. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$. Olkoon $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ mitallinen funktio. Oletetaan, että $1_A(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin $m_1^*(A) \leq \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}x$.

Todistus. Oletetaan, että $1_A(x) \leq f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tästä seuraa, että $A \subseteq \{f \geq 1\}$. Täten ulkomitan monotonisuuden nojalla pätee $m_1^*(A) \leq m_1^*(\{f \geq 1\})$. Koska f on mitallinen, niin pätee $m_1^*(\{f \geq 1\}) = m_1(\{f \geq 1\}) = \int_{\{f\geq1\}} 1 \, \mathrm{d}m_1 \leq \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m_1$. Saadut arviot yhdistämällä saadaan haluttu arvio. □

Lemman 1 todistus. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

"Pätee $m_1^*(A)m_1^*(B) \geq m_2^*(A \times B)$." Olkoot välit I_k joukon A peite ja välit J_l joukon B peite. Havaitaan, että suorakaiteet $I_k \times J_l$ ovat tulojoukon $A \times B$ peite. Lisäksi pätee

$$\sum_{k,l} |I_k \times J_l| = \Big(\sum_k |I_k|\Big)\Big(\sum_l |J_l|\Big).$$

Tästä ja Lebesguen ulkomitan määritelmästä seuraa, että $m_2^*(A\times B) \leq m_1^*(A)m_1^*(B)$.

"Pätee $m_1^*(A)m_1^*(B) \leq m_2^*(A \times B)$." Olkoot suorakaiteet R_m tulojoukon $A \times B$ peite. Kirjoitetaan suorakaide R_m välien I_m ja J_m tulona $R_m =: I_m \times J_m$. Koska R_m on tulojoukon $A \times B$ peite, niin pätee, että jos $(x, y) \in A \times B$, niin $(x, y) \in R_m = I_m \times J_m$ jollain m. Havaitaan, että tämä voidaan kirjoittaa indikaattorifunktioiden avulla

$$1_A(x)1_B(y) \leq \sum_m 1_{I_m}(x)1_{J_m}(y) \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jokaisella $y \in B$ pätee

$$1_A(x) \le \sum_m 1_{I_m}(x) 1_{J_m}(y) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

josta Lemman 3 perusteella seuraa

$$m_1^*(A) \le \int_{\mathbb{R}} \sum_m 1_{I_m}(x) 1_{J_m}(y)\,\mathrm{d}x = \sum_m |I_m| 1_{J_m}(y).$$

Siis

$$m_1^*(A) 1_B(y) \le \sum_m |I_m| 1_{J_m}(y) \quad \text{kaikilla } y \in \mathbb{R},$$

mistä taas Lemman 3 perusteella seuraa

$$m_1^*(A) m_1^*(B) \le \int_{\mathbb{R}} \sum_m |I_m| 1_{J_m}(y)\,\mathrm{d}y = \sum_m |I_m||J_m| = \sum_m |R_m|.$$

Tästä seuraa Lebesguen ulkomitan määritelmän perusteella, että $m_1^*(A)m_1^*(B) \le m_2^*(A \times B)$.

"Jos A ja B ovat Lebesguen mitallisia, niin $A \times B$ on Lebesguen mitallinen." Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}$ Lebesguen mitallisia. Tarkastetaan Carathéodoryn ehto tulojoukolle $A \times B$. Tehtävän 3 nojalla riittää tarkastaa se suorakaiteille $I \times J$. Huomataan (esimerkiksi kuvasta), että

$$A \times B \cap I \times J = A \cap I \times B \cap J$$

ja

$$(A \times B)^c \cap I \times J = A^c \cap I \times J \cup A \cap I \times B^c \cap J.$$

Hyödynnetään jo todistettua ulkomitan tulosääntöä ja sitä, että Carathéodoryn ehto pätee joukoille A, B, koska ne oletettiin mitalliseksi. Näin lasketaan

$$\begin{aligned}
&m_2^*((A \times B)^c \cap I \times J) + m_2^*(A \times B \cap I \times J) \\
&\le m_2^*(A \cap I \times B \cap J) + m_2^*(A^c \cap I \times J) + m_2^*(A \cap I \times B^c \cap J) \\
&= m_1^*(A \cap I) m_1^*(B \cap J) + m_1^*(A^c \cap I) m_1^*(J) + m_1^*(A \cap I) m_1^*(B^c \cap J) \\
&= m_1^*(A \cap I)(m_1^*(B \cap J) + m_1^*(B^c \cap J)) + m_1^*(A^c \cap I) m_1^*(J) \\
&= m_1^*(A \cap I) m_1^*(J) + m_1^*(A^c \cap I) m_1^*(J) \\
&= (m_1^*(A \cap I) + m_1^*(A^c \cap I)) m_1^*(J) \\
&= m_1^*(I) m_1^*(J) \\
&= m^*(I \times J).
\end{aligned}$$

Siis tulojoukko $A \times B$ toteuttaa Carathéodoryn ehdon:

$$m^*(I \times J) \ge m_2^*((A \times B)^c \cap I \times J) + m_2^*(A \times B \cap I \times J) \quad \text{kaikilla suorakaiteilla } I \times J.$$

□

Mitallisuudessa on oltava tarkkana, mistä σ-algebrasta puhutaan

Oppimisen tueksi esitetään esimerkki tarkastelusta, jossa on oltava tarkkana siitä, mistä σ-algebrasta puhutaan.

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Olkoot funktiot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mitallisia. Osoitetaan, että joukko

$$A := \left\{ x \in \Omega : \text{on olemassa raja-arvo } \lim_{n \to \infty} f_n(x) \right\}$$

on mitallinen käyttämällä seuraavaa aputulosta:

Lemma 4 (Mitallisten funktioiden rajafunktio on mitallinen)**.** Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Olkoot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita, joille on olemassa rajafunktio $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ (eli jokaisessa pisteessä $\omega \in \Omega$ on olemassa raja-arvo $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$, josta käytetään merkintää $f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$). Tällöin raja-funktio f on myös mitallinen.

Pyritään perustelemaan joukon A mitallisuus seuraavasti:

- Olkoot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita. Koska funktiot f_n ovat mitallisia, niin myös rajafunktio $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ on mitallinen Lemman 4 perusteella. Koska $A = f^{-1}(\mathbb{R})$, niin mitallisen funktion määritelmän nojalla joukko A on mitallinen, koska se on mitallisen funktion alkukuva äärettömästä välistä (tai yleisemmin Borelin joukosta) $\mathbb{R}$.

Mutta pyrkimyksessä sivuutettiin se seikka, että raja-funktio $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ on määritelty vain osajoukossa A eikä koko joukossa Ω! Käydään siis perustelu läpi tarkemmin. Muistetaan ensin mitallisen funktion määritelmä:

Määritelmä. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on *$\mathcal{F}$-mitallinen (tai mitallinen σ-algebran $\mathcal{F}$ suhteen)*, jos ja vain joukko $\{x \in \Omega : f(x) > a\}$ on $\mathcal{F}$-mitallinen (eli mitallinen σ-algebran $\mathcal{F}$ suhteen) kaikilla $a \in \mathbb{R}$, mikä tarkoittaa, että

$$\{x \in \Omega : f(x) > a\} \in \mathcal{F} \quad \text{kaikilla } a \in \mathbb{R}.$$

Tehdään nyt edellinen perustelu tarkasti - huomioiden se, minkä σ-algebran suhteen mitallisuudesta kulloinkin puhutaan:

- Olkoot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-mitallisia funktioita. Koska $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ joukossa A, niin funktioiden f_n rajoittumille $f_n|_A : A \to \mathbb{R}$ on olemassa rajafunktio $f := \lim_{n\to\infty} f_n : A \to \mathbb{R}$.

  Tarkastellaan seuraavaksi näiden rajoittumafunktioiden mitallisuutta. Funktioiden $f_n|_A$ määrittelyjoukko on siis joukon Ω osajoukko A. Mikä joukossa A on se σ-algebra, jonka suhteen nämä funktiot ovat mitallisia? Koska funktiot f_n ovat mitallisia σ-algebran $\mathcal{F}$ suhteen, niiden rajoittumafunktiot $f_n|_A$ ovat mitallisia σ-algebran rajoittuman $\mathcal{F}|_A$ suhteen. Rajoittuma $\mathcal{F}|_A$ määritellään asettamalla

  $$\mathcal{F}|_A := \{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}.$$

  Näin määritelty kokoelma $\mathcal{F}|_A$ on σ-algebra joukossa A, joten erityisesti siis $A \in \mathcal{F}_A$.

  Tarkastellaan seuraavaksi rajafunktion mitallisuutta. Koska funktion mitallisuus säilyy rajankäynnissä, niin näin ollen rajafunktio $f : A \to \mathbb{R}$ on myös mitallinen rajoittuman $\mathcal{F}|_A$ suhteen.

  Katsotaan, mitä joukon A mitallisuudesta voidaan päätellä funktioiden f ja $f_n|_A$ mitallisuuden avulla: Joukko $A = f^{-1}(\mathbb{R})$ on $\mathcal{F}|_A$-mitallisen funktion f alkukuvana $\mathcal{F}|_A$-mitallinen, mikä tarkoittaa, että $A \in \mathcal{F}|_A$. (Tämä oli jo tiedossa sen nojalla, että $\mathcal{F}|_A$ on joukon A σ-algebra.)

  Ollaan siis päätelty, että A on $\mathcal{F}|_A$-mitallinen - mistä ei seuraa, että A on $\mathcal{F}$-mitallinen.

Siis edellinen perustelu totesikin itse asiassa vain sen seikan, että joukko A on mitallinen σ-algebran $\mathcal{F}|_A$ suhteen. Tämä johtui siitä, että jouduimme rajoittamaan tarkastelut tähän osajoukkoon, koska funktioiden f_n raja-arvo on olemassa vain osajoukossa A. Sen toteamiseksi, että A on mitallinen koko σ-algebran $\mathcal{F}$ suhteen voidaan käyttää rajafunktioita, jotka ovat olemassa koko joukossa Ω - esimerkiksi seuraavasti: Huomataan, että

$$\begin{aligned} A &:= \Big\{x \in \Omega : \text{on olemassa raja-arvo } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big\} \\ &= \Big\{x \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\Big\} \end{aligned}$$

Huomaa, että $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k:k\geq n} f_n$.

- Koska f_n ovat $\mathcal{F}$-mitallisia, niin infimumfunktio $\inf_{k:k\geq n} f_n$ on myös $\mathcal{F}$-mitallinen.
- Koska funktiot $\inf_{k:k\geq n} f_n$ ovat $\mathcal{F}$-mitallisia, niin rajafunktio $\lim_{n\to\infty} \inf_{k:k\geq n} f_n$ on myös $\mathcal{F}$-mitallinen.
- Siis funktio $\liminf_{n\to\infty} f_n$ on $\mathcal{F}$-mitallinen.

Samantapaisesti saadaan, että funktio $\limsup_{n\to\infty} f_n$ on $\mathcal{F}$-mitallinen.

Koska funktiot $\liminf_{n\to\infty} f_n$ ja $\limsup_{n\to\infty} f_n$ ovat $\mathcal{F}$-mitallisia, niin myös niiden erotus on $\mathcal{F}$-mitallinen. Näin ollen joukko

$$A = \{x \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) - \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 0\} = (\liminf_{n\to\infty} f_n - \limsup_{n\to\infty} f_n)^{-1}(\{0\}),$$

joka on $\mathcal{F}$-mitallisen funktion alkukuva surkastuneesta välistä $\{0\}$, on myös $\mathcal{F}$-mitallinen.