MITTA JA INTEGRAALI: HARJOITUS 7: ESIMERKKIRATKAISUT (VERSIO 1)

Kurssin luennoi Tuomas Hytönen ja laskuharjoituksia pitää Timo Hänninen.

Muistetaan topologiasta seuraavat perusasiat:

- Avoimien joukkojen mielivaltainen yhdiste on avoin.
- Suljettujen joukkojen mielivaltainen leikkaus on suljettu.
- Joukko on avoin täsmälleen silloin, kun sen komplementti on suljettu.
- Avaruuden $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ joukko on kompakti täsmälleen silloin, kun se on suljettu ja rajoitettu.

Huomataan myös seuraava vastaavuus:

$$\begin{aligned} A \text{ avoin} &\iff A^c \text{ suljettu} \\ A \supseteq E &\iff A^c \subseteq E^c \\ A \smallsetminus E &= E^c \smallsetminus A^c. \end{aligned}$$

Tästä vastaavuudesta seuraa, että osaamme arvioida jokaisen mitallisen joukon mittaa ulkoa avoimilla joukoilla täsmälleen silloin, kun osaamme arvioida jokaisen mitallisen joukon mittaa sisältä suljetuilla joukoilla. Siis seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:

- Jokaisella mitallisella joukolle E pätee, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko G siten, että $G \supseteq E$ ja $m(G \smallsetminus E) < \epsilon$.
- Jokaisella mitallisella joukolle E pätee, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa suljettu joukko F siten, että $F \subseteq E$ ja $m(E \smallsetminus F) < \epsilon$.

Näiden harjoitusten Tehtävät 2 ja 3 voidaan nähdä tämän vastaavuuden eri puolina.

Tehtävä 1. (a) Luentomuistiinpanoissa osoitettiin, että $m(R) = |R|$ kaikille suljetuille suorakulmioille $R \subseteq \mathbb{R}^d$. Osoita tämän avulla, että $m(S) = |S|$ myös kaikille avoimille ja puoliavoimille suorakulmioille $S \subseteq \mathbb{R}^d$.

(b) Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ja $x \in \mathbb{R}^d$. Osoita, että jos E toteuttaa Carathéodoryn ehdon, niin myös $E + x$ toteuttaa sen.

Ratkaisu. “Pätee $m(S) = |S|$ avoimille suorakulmioille S.”Muistetaan, että kaikki Borelin joukot ovat Lebesguen mitallisia (Lause 11.4.), joten erityisesti kaikki (avoimet, puoliavoimet, suljetut) suorakulmiot ovat Lebesguen mitallisia.

Todetaan, että jokainen avoin suorakulmio voidaan kirjoittaa suljettujen suorakulmioiden kasvavana yhdisteenä: Olkoon $S \subseteq \mathbb{R}^d$ avoin suorakulmio. Täten $s = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$ joillakin reaaliluvuilla $a_i < b_i$, missä $i = 1, 2, \ldots, d$. Huomataan [1], että

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_1 + \frac{1}{n}, b_1 - \frac{1}{n}] \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{n}, b_d - \frac{1}{n}].$$

Kirjoitetaan $R_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1 - \frac{1}{n}] \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{n}, b_d - \frac{1}{n}]$. Siis avoin suorakulmio S voidaan kirjoittaa suljettujen suorakulmioiden kasvavana yhdisteenä: $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, missä R_n on suljettu suorakulmio ja $R_n \subseteq R_{n+1}$.

Lasketaan:

$$
\begin{aligned}
&m(S) \\
&= m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\Big) && \text{joukkojen samuus} \\
&= \lim_{n\to\infty} m\big(R_n\big) && \text{mitan monotoninen suppeneminen (Lause 2.4.)} \\
&= \lim_{n\to\infty} |R_n| && \text{Lebesguen mitta ja geometrinen mitta yhtyvät} \\
& && \text{suljetuille suorakulmioille} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big((b_1 - \frac{1}{n}) - (a_1 + \frac{1}{n})\Big)\cdots\Big((b_d - \frac{1}{n}) - (a_d + \frac{1}{n})\Big) && \text{geometrisen mitan määritelmä} \\
&= (b_1 - a_1)\cdots(b_d - a_d) && \text{raja-arvon laskeminen} \\
&= |S| && \text{geometrisen mitan määritelmä.}
\end{aligned}
$$

Näin on osoitettu, että geometrinen mitta ja Lebesguen mitta yhtyvät avoimille suorakulmioille, kun tiedetään, että ne yhtyvät suljetuille suorakulmioille. Vastaavasti voidaan osoittaa sama puoliavoimille suorakulmioille kirjoittamalla puoliavoin suorakulmio suljettujen suorakulmioiden kasvavana yhdisteenä.

"Jos E Lebesguen mitallinen, niin myös $E + x$ Lebesguen mitallinen." Todetaan alkuun apulause:

Lemma (Siirron yhteensopivuus joukko-operaatioiden ja yhteenlaskun kanssa)**.** Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Olkoon I jokin indeksijoukko ja $A_i \subseteq \mathbb{R}^d$ kaikilla $i \in I$. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^d$. Tällöin

- Pätee $(A + x) + y = A + (x + y)$.
- Pätee $\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) + x = \bigcap_{i\in I}(A_i + x)$.
- Pätee $\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) + x = \bigcup_{i\in I}(A_i + x)$.
- Pätee $(A + x)^c = A^c + x$.

Todistus. Todistetaan, että $(A+x)^c = A^c + x$. Muut ominaisuudet on yhtä suoraviivaista todistaa ja ne on todistettu seikkaperäisesti Harjoitus 6:n malliratkaisuissa.

$$
\begin{aligned}
& y \in (A + x)^c. \\
\iff\ & \text{Ei ole totta, että } y \in (A + x). \\
\iff\ & \text{Ei ole totta, että } y = a + x \text{ jollakin } a \in A. \\
\iff\ & \text{Ei ole totta, että } y - x = a \text{ jollakin } a \in A. \\
\iff\ & \text{On totta, että } y - x = b \text{ jollakin } b \in A^c. \\
\iff\ & \text{On totta, että } y = b + x \text{ jollakin } b \in A^c. \\
\iff\ & y \in A^c + x.
\end{aligned}
$$

□

Muistetaan myös, että Lebesguen ulkomitta on siirtoinvariantti: Jokaiselle joukolle $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ja vektorille $x \in \mathbb{R}^d$ pätee $m^*(A) = m^*(A + x)$.

Olkoon nyt $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ja $x \in \mathbb{R}^d$. Oletetaan, että E on Lebesguen mitallinen eli toteuttaa Carathéodoryn ehdon. Osoitetaan, että myös $E + x$ Lebesguen mitallinen eli toteuttaa Carathéodoryn ehdon.

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Huomataan, että siirron laskusääntöjen nojalla pätee

$$A \cap (E + x) = ((A - x) + x) \cap (E + x) = (A - x) \cap E + x$$

ja

$$A \cap (E + x)^c = ((A - x) + x) \cap (E + x)^c = ((A - x) + x) \cap (E^c + x) = (A - x) \cap E^c + x.$$

Lasketaan:

$$
\begin{aligned}
& m^*(A \cap (E + x)) + m^*(A \cap (E + x)^c) & \\
&= m^*((A - x) \cap E + x) + m^*((A - x) \cap E^c + x) & \text{joukkojen samuus} \\
&= m^*((A - x) \cap E) + m^*((A - x) \cap E^c) & \text{Lebesguen ulkomitan siirtoinvarianssi} \\
&= m^*(A - x) & \text{mitalliselle joukolle } E \text{ pätevä Carathéodoryn} \\
& & \text{ehto sovellettuna joukkoon } A - x \\
&= m^*(A) & \text{Lebesguen ulkomitan siirtoinvarianssi.}
\end{aligned}
$$

Siis joukolle $E + x$ pätee Carathéodoryn ehto.

Tehtävä 2. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^d$ Lebesguen mitallinen joukko ja $\epsilon > 0$. Osoita:

(a) On olemassa avoin joukko G, jolle $G \subseteq E$ ja $\mu(E) \leq \mu(G) + \epsilon$.
(b) Jos $m(E) < \infty$, niin sama G toteuttaa $\mu(G \setminus E) \leq \epsilon$.
(c) Yleisestikin (ilman lisäoletusta $m(E) < \infty$) on olemassa avoin $G \supseteq E$, jolle $m(G \setminus E) \leq \epsilon$.

Ratkaisu.

"On olemassa avoin joukko G, jolle $G \subseteq E$ ja $\mu(E) \leq \mu(G) + \epsilon$." Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^d$ joukko. Muistetaan, että

$$m(E) := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| : R_k \text{ suorakulmio}, \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \supseteq E\}.$$

Koska kaikentyyppistä (avointa, puoliavointa tai suljettua) suorakulmiota voidaan arvioida ulkoa avoimella suorakulmiolla [1], niin Lebesguen ulkomitan määritelmässä voidaan käyttää pelkästään avoimia suorakulmioita (mikä todistettiin seikkaperäisesti Lemmassa 11.5.). Siis:

$$m(E) := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| : R_k \text{ avoin suorakulmio}, \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \supseteq E\}.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Infimumin määritelmän perusteella on olemassa avoin suorakulmiopeite (eli avoimet suorakulmiot R_k, joille $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \supseteq E$), siten, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \leq m(E) + \epsilon.$$

Asetetaan $G := \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$. Huomataan, että G on etsitty avoin joukko:

- Joukko G on avoin, koska avointen joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ovat avoimia.
- Pätee $G \supseteq E$.
- Pätee
$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \leq m(E) + \epsilon.$$

---

[1] Täsmällisemmin ilmaistuna: Jokaisella suorakulmiolla R pätee, että jokaisella $\epsilon > 0$ löytyy avoin suorakulmio S, jolle $S \supseteq R$ ja $|S| \leq |R| + \epsilon$.

"Jos $m(E) < \infty$, niin sama G toteuttaa $\mu(G \setminus E) \le \epsilon$." Oletetaan, että joukko E on Lebesguen mitallinen. Muistetaan, että mitallisilla joukoille $A \subseteq B$, joille $\mu(A) < \infty$, pätee

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A),$$

koska täysadditiivisuuden nojalla $m(B) = m((B \setminus A) \cup A) = m(B \setminus A) + m(A)$. Oletuksen nojalla joukko E on mitallinen ja joukko G on myös mitallinen, koska Borelin joukot, siis erityisesti avoimet joukot, ovat Lebesguen mitallisia.

Oletetaan, että $m(E) < \infty$. Nyt:

$$\begin{aligned} &m(G) \le m(E) - \epsilon \\ \iff &m(G) - m(E) \le \epsilon \\ \iff &m(G \setminus E) \le \epsilon. \end{aligned}$$

"Yleisestikin (ilman lisäoletusta $m(E) < \infty$) on olemassa avoin $G \supseteq E$, jolle $m(G \setminus E) \le \epsilon$." Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^d$ mitallinen. Todetaan ensin, että joukko E voidaan kirjoittaa äärellismitallisten joukkojen yhdisteenä.

Jokaisella $n = 1, 2, \ldots$ asetetaan $F_n := [-n, n]^d := [-n, n] \times \cdots \times [-n, n]$. Huomaa, että F_n on suorakulmio, joten se on mitallinen ja sen mitta on äärellinen (ja lukuarvoltaan $m(F_n) = |F_n| = |2n|^d < \infty$). Lisäksi

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Kirjoitetaan E yhdisteenä:

$$E = \mathbb{R}^d \cap E = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap E) =: \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

missä on kirjoitettu $E_n := F_n \cap E$. Huomaa, että $m(E_n) \le m(F_n) < \infty$.

Aikaisemmin osoitetun nojalla jokaista äärellismitallista joukkoa E_n kohden on olemassa avoin joukko G_n siten, että $G_n \supseteq E_n$ ja $m(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$. Asetetaan $G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Joukko G on avoin, koska avointen joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ovat avoimia. Lisäksi $G \supseteq E$, koska $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ ja $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ja $G_n \supseteq E_n$. Huomaa, että

$$G \setminus E = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\Big) \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(G_n \setminus \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\Big)\Big) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n).$$

Arvioidaan erotusjoukon mittaa:

$$m(G \setminus E) \le m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n \setminus E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Tehtävä 3. Olkoon E Lebesguen mitallinen joukko ja $\epsilon > 0$. Osoita:

(a) On olemassa suljettu joukko $F \subseteq E$, jolla $m(E \setminus F) \le \epsilon$.
(b) Jos $m(E) < \infty$, niin on olemassa kompakti joukko $K \subseteq E$, jolle $m(E \setminus K) \le \epsilon$.
(c) Yleisesti on voimassa

$$m(E) = \inf\{m(G) : G \supseteq E \text{ avoin}\} = \sup\{m(K) : K \subseteq E \text{ kompakti}\}$$

Ratkaisu. "On olemassa suljettu joukko $F \subseteq E$, jolla $m(E \setminus F) \le \epsilon$." Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^d$ mitallinen joukko. Olkoon $\epsilon > 0$. Soveltamalla Tehtävää 2.c. joukon E komplementtiin E^c saadaan, että on olemassa avoin joukko G siten, että $G \supseteq E^c$ ja $m(G \setminus E^c) \le \epsilon$. Koska G on avoin, niin F^c on suljettu. Koska $G \subseteq E^c$, niin $G^c \subseteq E$.

Koska $G \setminus E^c = (E^c)^c \setminus G^c$, niin $m(E \setminus G^c) = m(G \setminus E^c) \leq \epsilon$. Siis joukko $F := G^c$ on etsitty joukko.

Tulevaa varten huomataan, että samalle joukolle F pätee:

$$m(E) = m(E \setminus F) + m(F) \leq \epsilon + m(F). \tag{0.1}$$

"Jos $m(E) < \infty$, niin on olemassa kompakti joukko $K \subseteq E$, jolle $m(E \setminus K) \leq \epsilon$." Todetaan, että avaruudessa $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ suljettu joukko voidaan kirjoittaa kasvavana yhdisteenä kompakteista joukoista: Samaan tapaan kuin Tehtävän 2 ratkaisussa, huomataan, että $\mathbb{R}^d$ voidaan kirjoittaa kasvavana yhdisteenä suljetuista rajoitetuista joukoista: Asetetaan $R_n := [-n,n]^d := [-n,n] \times \cdots \times [-n,n]$. Pätee, että R_n on suljettu ja rajoitettu, $R_n \subseteq R_{n+1}$ ja

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Täten $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F \cap R_n$. Huomataan, että $F \cap R_n$ on suljettu, koska suljettujen joukkojen mielivaltaiset leikkaukset ovat suljettuja. Huomataan, että $F \cap R_n$ on rajoitettu, koska joukko R_n on rajoitettu. Muistetaan, että $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$:ssä joukko on kompakti täsmälleen silloin, kun se on suljettu ja rajoitettu. Siis $F \cap R_n$ on kompakti. Asetetaan $F_n := F \cap R_n$. Nyt siis pätee, että F_n on kompakti, $F_n \subseteq F_{n+1}$ ja $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Mitan monotonisen suppenemisen (Lause 2.4.) perusteella

$$m(F) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \lim_{n \to \infty} m(F_n).$$

Tarkastellaan tapaukset $m(E) < \infty$ ja $m(E) = \infty$ erikseen.

- Oletetaan, että $m(E) < \infty$. Siten $m(F) \leq m(E) < \infty$. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa N siten, että $m(F_n) \geq m(F) - \epsilon$. kaikilla $n \geq N$. Erityisesti siis
$$m(F) \leq m(F_N) + \epsilon.$$
Kaikkiaan
$$m(E) \leq m(F) + \epsilon \leq m(F_N) + 2\epsilon.$$
- Oletetaan, että $m(E) = \infty$. Siten arvion (0.1) nojalla $m(F) = \infty$. Raja-arvon määritelmän perusteella kaikilla $M > 0$ on olemassa N siten, että
$$m(F_n) \geq M$$
kaikilla $n \geq N$. Erityisesti siis $m(F_N) \geq M$.

Asetetaan $K := F_N$. Kaikkiaan ollaan osoitettu, että:

- Jos $m(E) < \infty$, niin jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa kompakti joukko K siten, että $K \subseteq E$ ja
$$m(K) \geq m(E) - 2\epsilon.$$
- Jos $m(E) = \infty$, niin jokaisella $M > 0$ on olemassa kompakti joukko K siten, että $K \subseteq E$ ja
$$m(K) \geq M.$$

Jos $m(E) < \infty$, niin $m(K) \leq m(E) < \infty$, joten

$$m(E) - m(K) = m(E \setminus K) \leq 2\epsilon.$$

"Yleisesti on voimassa $m(E) = \inf\{m(G) : G \supseteq E \text{ avoin}\} = \sup\{m(K) : K \subseteq E \text{ kompakti}\}$." Muistetaan seuraava infimumia koskeva apulause (mikä on seikkaperäisesti todistettu esimerkiksi Harjoituksen 6 malliratkaisuissa).

Lemma (Infimumin luonnehdinta)**.** Olkoon $A \subseteq [0, \infty]$ epätyhjä joukko. Olkoon b joukon A alaraja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (Ylhäältä lähestyttävissä) Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$ siten, että $a \leq b + \epsilon$.
- (Suurin alaraja eli infimum) Luku b on joukon A suurin alaraja eli infimum eli pätee: Jos c on joukon A alaraja, niin $b \geq c$.

Samaan tapaan pätee supremumin luonnehdinta (huomaa pieni epäsymmetriä apulauseissa, mikä johtuu siitä, että tarkastellaan epäsymmetrisen välin $[0, \infty]$ osajoukkoja, mikä sulkee tapauksen $\inf A = -\infty$ pois):

Lemma (Supremumin luonnehdinta)**.** Olkoon $A \subseteq [0, \infty]$ epätyhjä joukko. Olkoon b joukon A yläraja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (Alhaalta lähestyttävissä)
  - Jos $b < \infty$, niin jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$ siten, että $a \geq b - \epsilon$.
  - Jos $b = \infty$, niin jokaisella $M > 0$ on olemassa $a \in A$ siten, että $a \geq M$.
- (Suurin alaraja eli infimum) Luku b on joukon A pienin yläraja eli supremum eli pätee: Jos c on joukon A yläraja, niin $b \leq c$.

Todetaan, että luku $m(E)$ on joukon $\{m(G) : G \supseteq E \text{ avoin}\}$ infimum, koska:

- Luku $m(E)$ on kyseisen joukon alaraja: Mitan monotonisuuden nojalla $m(G) \geq m(E)$ kaikilla avoimilla $G \supseteq E$.
- Luku $m(E)$ on ylhäältä lähestyttävissä kyseisen joukon alkioilla, koska Tehtävän 2.a. mukaan jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $G \supseteq E$ avoin, jolle $m(G) \leq m(E) + \epsilon$.

Todetaan, että luku $m(E)$ on joukon $\{m(K) : K \subseteq E \text{ kompakti}\}$ supremum, koska:

- Luku $m(E)$ on kyseisen joukon yläraja: Mitan monotonisuuden nojalla $m(K) \leq m(E)$ kaikilla joukoilla $K \subseteq E$, erityisesti siis kaikilla kompakteilla $K \subseteq E$.
- Luku $m(E)$ on alhaalta lähestyttävissä kyseisen joukon alkioilla, koska Tehtävän 3.b. ratkaisun mukaan:
  - Jos $m(E) < \infty$, niin jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $K \subseteq E$ avoin, jolle $m(K) \geq m(E) - 2\epsilon$.
  - Jos $m(E) = \infty$, niin jokaisella $M > 0$ on olemassa $K \subseteq E$, jolle $M(K) \geq M$.

Tehtävä 4. Olkoon E Lebesguen mitallinen. Osoita

(a) On olemassa $G \in \mathcal{G}_\delta$, jolle $G \supseteq E$ ja $m(G \setminus E) = 0$.
(b) On olemassa $F \in \mathcal{F}_\sigma$, jolle $F \subseteq E$ ja $m(E \setminus F) = 0$.

Ratkaisu. Olkoon E Lebesguen mitallinen.

"On olemassa $G \in \mathcal{G}_\delta$, jolle $G \supseteq E$ ja $m(G \setminus E) = 0$." Muistetaan, että $\mathcal{G}_\delta$ on määritelmänsä mukaan kokoelma, jonka muodostaa kaikki numeroituvat leikkaukset avoimista joukoista. Tehtävän 2.c. nojalla jokaisella $n = 1, 2, \ldots$ on olemassa avoin joukko G_n siten, että $G_n \supseteq E$ ja $m(G_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$. Asetetaan $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} \epsilon$. Nyt $G \in \mathcal{G}_\delta$, $G \supseteq E$. Lisäksi kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ pätee

$$\mu(G \setminus E) \leq \mu(G_n \setminus E) \leq \frac{1}{n},$$

joten ottamalla arviosta rajankäynti $n \to \infty$ saadaan, että $m(G \setminus E) = 0$.

“ On olemassa $F \in \mathcal{F}_\sigma$, jolle $F \subseteq E$ ja $m(E \setminus F) = 0$.” Tämä voidaan todistaa Tehtävän 3.a. avulla samaan tapaan kuin edellinen kohta todistettiin Tehtävän 2.c. avulla. Vaihtoehtoisesti voidaan soveltaa edellisen kohdan tulosta sopivasti:

Soveltamalla edellistä kohtaa joukkoon E^c saadaan, että on olemassa joukko $G \in \mathcal{G}_\delta$ siten, että $G \supseteq E^c$ ja $m(G \setminus E^c) = 0$. Koska $G \supseteq E^c$, niin $G^c \subseteq (E^c)^c = E$. Koska $G \setminus (E^c) = E \setminus (G^c)$, niin $m(E \setminus G^c) = 0$. Koska $G \in \mathcal{G}_\delta$, niin $G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$ joillakin avoimilla G_n. Siten

$$G^c = \Big(\bigcup_{n=1}^\infty G_n\Big)^c = \bigcap_{n=1}^\infty G_n^c.$$

Koska G_n on avoin, niin G_n^c on suljettu. Kokoelma $\mathcal{F}_\sigma$ koostuu numeroituvista yhdisteistä kaikista suljetuista joukoista. Siis $G^c \in \mathcal{F}_\sigma$. Asetetaan $F := G^c$.

Tehtävä 5. Luentomuistiinpanoissa mitattoman joukon rakentamisessa valittiin alkioita eri ekvivalenssiluokista. Osoita, että tätä valintaa muokkaamalla tällä tavoin rakennetun joukon ulkomitta voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. Perustele, miksi tästä seuraa, että kyseinen ulkomitta ei voi olla sama kaikilla mahdollisilla E:n valinnoilla.

Ratkaisu. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Palautetaan mieleen, että ei-mitallisen joukon rakentamisessa hyödynnetty ekvivalenssirelaatio $\sim$ määriteltiin niin, että $x \sim y$ täsmälleen silloin, kun on olemassa rationaaliluku $q \in \mathbb{Q}$, jolla $x = y + q$. Muistetaan, että alkion x ekvivalenssiluokka $[x]$ on $\mathbb{R}$:n osajoukko, joka koostuu niistä alkioista, jotka ovat ekvivalentit alkion x kanssa:

$$[x] := \{y \in \mathbb{R} : y \sim x\}.$$

Ekvivalenssiluokan alkioita kutsutaan luokan edustajiksi.

Osoitetaan, että jokaisesta ekvivalenssiluokasta löytyy mielivaltaisen pieniä alkioita.

Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että ekvivalenssiluokasta $[x]$ löytyy alkio y, jolle pätee $0 < y < \epsilon$. Valitaan positiivinen kokonaisluku k niin suureksi, että $\frac{1}{k} < \epsilon$. Huomaa, että välit $\{\frac{1}{k}[j, j+1)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ osittavat $\mathbb{R}$:n. Siten on olemassa $j \in \mathbb{Z}$, jolle pätee

$$\frac{j}{k} \le x < \frac{j+1}{k}.$$

Siten

$$0 \le x - \frac{j}{k} < \frac{1}{k} < \epsilon.$$

Huomaa, että alkio $y := x - \frac{j}{k}$ on ekvivalenssirelaation määritelmän perusteella ekvivalentti alkion x kanssa eli $y \in [x]$ ja lisäksi $0 < y < \epsilon$.

Siten jokaisesta ekvivalenssiluokasta löytyy mielivaltaisen pieniä edustajia. Muodostetaan joukko E_ϵ valitsemalla jokaisesta ekvivalenssiluokasta yksi edustaja y, jolle pätee $y \in [0, \epsilon)$.

Todetaan, että näiden joukkojen E_ϵ ulkomitta ei voi olla sama kaikilla parametreillä $\epsilon > 0$. (Mistä seuraa, että joukon E ulkomitta riippuu siitä, miten edustajat valitaan.) Huomataan, että $\lim_{\epsilon \to 0^+} m^*(E_\epsilon) = 0$, koska

$$m^*(E_\epsilon) \le m^*([0, \epsilon)) \le \epsilon$$

kaikilla $\epsilon > 0$. Täten ulkomitta $m^*(E_\epsilon)$ ei voi olla parametristä ϵ riippumaton aidosti positiivinen luku [2]. Ulkomitta $m^*(E_\epsilon)$ ei ole myöskään nolla, kuten kohta todetaan. Siten täytyy olla, että ulkomitta $m^*(E_\epsilon)$ on aidosti positiivinen luku, joka ei ole sama kaikilla parametreillä $\epsilon > 0$.

Todetaan, että joukon E ulkomitalle pätee $0 < m^*(E) < \infty$:

- Ulkomitan monotonisuuden nojalla $m^*(E) \le m^*([0,\infty)) < \epsilon < \infty$, joten $m^*(E) < \infty$.
- Kuten luentomuistiinpanoissa voidaan todeta, että joukot $\{E_\epsilon + q\}_{q\in\mathbb{Q}}$ osittavat $\mathbb{R}$:n. Siten ulkomitan subadditiivisuuden ja siirtoinvarianssin nojalla
$$m^*(\mathbb{R}) = m^*\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(E+q)\Big) \le \sum_{q\in\mathbb{Q}} m^*(E+q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} m^*(E),$$
joten $m(E) > 0$.

Todetaan seuraavaksi, että joukko E_ϵ on ei-mitallinen. Tämä voitaisiin tehdä aivan samaan tapaan kuin luentomuistiinpanoissa [3]. Todetaan tämä kuitenkin hitusen eri tavalla.

Tarkastellaan väliä J_ϵ, joka on hieman suurempi kuin väli $I_\epsilon := [0,\epsilon)$, jotta saadaan hieman välystä: Asetetaan $J_\epsilon := [-\epsilon, 2\epsilon)$. Siten
$$J_\epsilon + q \supseteq I_\epsilon \quad \text{aina kun } |q| < \epsilon.$$

Toisaalta
$$\begin{aligned}
&\sum_{q\in\mathbb{Q}} m^*(J_\epsilon \cap (E_\epsilon + q)) \\
&= \sum_{q\in\mathbb{Q}} m^*(((J_\epsilon - q)\cap E_\epsilon) + q) && \text{siirron laskusäännöt} \\
&= \sum_{q\in\mathbb{Q}} m^*((J_\epsilon - q)\cap E_\epsilon) && \text{ulkomitan siirtoinvarianssi} \\
&\ge \sum_{q\in\mathbb{Q}:|q|<\epsilon} m^*((J_\epsilon - q)\cap E_\epsilon) \\
&\ge \sum_{q\in\mathbb{Q}:|q|<\epsilon} m^*(E_\epsilon) && J_\epsilon - q \supseteq I_\epsilon \supseteq E_\epsilon \text{ kaikilla } |q| < \epsilon \\
&= m^*(E_\epsilon) \sum_{q\in\mathbb{Q}:|q|<\epsilon} 1 \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Toisaalta
$$m^*\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(J_\epsilon \cap (E_\epsilon + q))\Big) = m^*\Big(J_\epsilon \cap \Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_\epsilon + q\Big)\Big) = m^*(J_\epsilon) = 3\epsilon < \infty.$$

Muistetaan vielä, että Tehtävän 1.b. perusteella joukko E on mitallinen täsmälleen silloin, kun joukko $E + x$ on mitallinen jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Koska pätee
$$\infty > m^*\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(J_\epsilon \cap (E_\epsilon + q))\Big) \ne \sum_{q\in\mathbb{Q}} m^*(J_\epsilon \cap (E_\epsilon + q)) = \infty,$$
niin joukko E_ϵ on ei-mitallinen (koska muutoin yhtäsuuruus pätisi mitallisten joukkojen täysadditiviisuden nojalla).

---

[2] Täsmällisemmin sanottuna: Ei ole totta, että on olemassa aidosti positiivinen luku $a > 0$ siten, että pätee $m^*(E_\epsilon) = a$ kaikilla $\epsilon > 0$.

[3] Luentomuistiinpanoissa oli valittu $E \subset [0,1)$, mistä johtuen jaksollisessa siirrossa käytettiin välejä $[0,1)$ ja $[1,2)$. Näiden sijasta on nyt käytettävä välejä $[0,\epsilon)$ ja $[\epsilon, 2\epsilon)$, koska nyt $E_\epsilon \subseteq [0,\epsilon)$.

Tehtävä 6. Tarkastellaan avaruuden $[0,1]$ Lebesguen mittaa $m : \mathcal{M}[0,1] \to [0,1]$ ja pistelaskumittaa $n : \mathcal{P}[0,1] \to \{0,1,\ldots\} \cup \{\infty\}$. Määritellään kahden muuttujan funktio

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{jos } x = y, \\ 0 & \text{jos } x \neq y. \end{cases}.$$

Totea, että seuraavat integraalit ovat mielekkäitä ja laske ne:

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) \, \mathrm{d}m(x) \Big) \, \mathrm{d}n(y)$$

ja

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) \, \mathrm{d}n(y) \Big) \, \mathrm{d}m(x)$$

Ratkaisu. Todetaan ensin, että ratkaisussa integroidaan ei-negatiivisia mitallisia funktioita, joten integraalit ovat mielekkäitä.

Huomataan, että indikaattorifunktion määritelmän nojalla pätee

$$f(x,y) = 1_{\{x\}}(y) = 1_{\{y\}}(x).$$

Lasketaan integraalit:

- Kiinnitetään $y \in [0,1]$. Lasketaan (yksinkertaisen mitallisen funktion) integraali

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]} f(x,y) \, \mathrm{d}m(x) \\
&= \int_{[0,1]} 1_{\{y\}}(x) \, \mathrm{d}m(x) && \text{funktion } f \text{ määritelmä} \\
&= m(\{y\}) && \text{yksinkertaisen funktion integraalin määritelmä} \\
&= 0 && \text{yksiön Lebesguen mitta on nolla.}
\end{aligned}$$

-

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) \, \mathrm{d}m(x) \Big) \, \mathrm{d}n(y) = \int_{[0,1]} 0 \, \mathrm{d}n(y) = 0 \cdot n([0,1]) = 0 \cdot \infty = 0.$$

- Kiinnitetään $x \in [0,1]$. Lasketaan (yksinkertaisen mitallisen funktion) integraali

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]} f(x,y) \, \mathrm{d}n(y) \\
&= \int_{[0,1]} 1_{\{x\}}(y) \, \mathrm{d}n(y) && \text{funktion } f \text{ määritelmä} \\
&= n(\{x\}) && \text{yksinkertaisen funktion integraalin määritelmä} \\
&= 1 && \text{pistelaskurimitan määritelmä.}
\end{aligned}$$

-

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) \, \mathrm{d}n(y) \Big) \, \mathrm{d}m(x) = \int_{[0,1]} 1 \, \mathrm{d}m(x) = m([0,1]) = 1.$$

Esitietoihin lukeutuvia välivaiheita

1. "$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_1 + \frac{1}{n}, b_1 - \frac{1}{n}] \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{n}, b_d - \frac{1}{n}]$."

"$\supseteq$".

$x := (x_1, \ldots, x_d) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_1 + \frac{1}{n}, b_1 - \frac{1}{n}] \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{n}, b_d - \frac{1}{n}]$.

$\iff$ Jollakin $n = 1, 2, \ldots$ pätee $x_i \in [a_i + \frac{1}{n}, b_i - \frac{1}{n}]$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\iff$ Jollakin $n = 1, 2, \ldots$ pätee $a_i + \frac{1}{n} \le x_i \le b_i - \frac{1}{n}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\implies$ $a_i < x_i < b_i$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\iff$ $x_i \in (a_i, b_i)$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\iff$ $x \in (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$.

"$\subseteq$".

$x := (x_1, \ldots, x_d) \in x \in (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$.

$\iff$ $x_i \in (a_i, b_i)$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\iff$ $a_i < x_i < b_i$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\iff$ Kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$ on olemassa n_i siten, että $a_i + \frac{1}{n_i} \le x_i \le b_i - \frac{1}{n_i}$.

Valitaan $\frac{1}{n} := \min\{\frac{1}{n_1}, \ldots, \frac{1}{n_d}\}$. Nyt $a_i + \frac{1}{n} \le x_i \le b_i - \frac{1}{n}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\implies$ Jollakin $n = 1, 2, \ldots$ pätee $a_i + \frac{1}{n} \le x_i \le b_i - \frac{1}{n}$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\iff$ Jollakin $n = 1, 2, \ldots$ pätee $x_i \in [a_i + \frac{1}{n}, b_i - \frac{1}{n}]$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, d$.

$\iff$ Jollakin $n = 1, 2, \ldots$ pätee $x \in [a_1 + \frac{1}{n}, b_1 - \frac{1}{n}] \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{n}, b_d - \frac{1}{n}]$.

$\iff$ $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_1 + \frac{1}{n}, b_1 - \frac{1}{n}] \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{n}, b_d - \frac{1}{n}]$.