MITTA JA INTEGRAALI: HARJOITUS 6: ESIMERKKIRATKAISUT (VERSIO 1)

Kurssin luennoi Tuomas Hytönen ja laskuharjoituksia pitää Timo Hänninen.

Muistetaan:

- Kullekin ulkomitalle $\xi : \Omega \to [0, \infty]$ kokoelma $\mathcal{M}_\xi$ on määritelty kokoelmana, joka sisältää kaikki Ω:n osajoukot, jotka toteuttavat Carathéodoryn ehdon. Kokoelma $\mathcal{M}_\xi$ on σ-algebra.

Tehtävä 1. Olkoon $\Omega := (0, \infty)$ ja määritellään $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ asettamalla $\nu(A) := \sup A$ kaikilla $A \in \mathcal{P}(A)$. Osoita:

(a) Kuvaus ν on ulkomitta
(b) $\mathcal{M}_\nu$ on niin sanottu triviaali σ-algebra eli $\mathcal{M}_\nu = \{\varnothing, \Omega\}$.

Ratkaisu. "Kuvaus ν on ulkomitta." Osoitetaan alkuun aputulos, joka koskee ei-negatiivisten reaalijoukkojen numeroituvan yhdisteen ylärajaa:

Lemma (Supremumin subadditiivisuus)**.** Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subseteq [0, \infty]$. Tällöin

$$\sup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup A_k.$$

Todistus. Olkoon $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Täten yhdisteen määritelmän nojalla $x \in A_k$ jollakin $k = 1, 2, \ldots$. Koska $\sup A_k$ on joukon A_k yläraja ja $x \in A_k$, niin pätee $x \le \sup A_k$. Täten $x \le \sup A_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup A_k$. Näin ollaan saatu, että

$$x \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup A_k \quad \text{kaikilla } x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Siis $\sum_{k=1}^{\infty} \sup A_k$ on joukon $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ yläraja. Koska $\sup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ on joukon $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ pienin yläraja, niin pätee

$$\sup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup A_k.$$

□

Lemma (Supremumin monotonisuus)**.** Olkoot $A \subseteq B \subseteq [-\infty, \infty]$. Tällöin

$$\sup A \le \sup B.$$

Todistus. Olkoon $x \in A$. Koska $A \subseteq B$, niin $x \in B$. Koska $\sup B$ on joukon B yläraja ja $x \in B$, niin $x \le \sup B$. Täten ollaan saatu, että

$$x \le \sup B \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Siis $\sup B$ on joukon A yläraja. Koska $\sup A$ on joukon A pienin yläraja, niin

$$\sup A \le \sup B.$$

□

Todetaan sitten, että ν on ulkomitta.

"$\nu(\varnothing) = 0$." Funktion ν ja tässä tehtävässä käytetyn tyhjän joukon pienimmän ylärajan määritelmän nojalla pätee $\nu(\varnothing) := \sup \varnothing := 0$.

"$\nu(A) \le \nu(B)$ mikäli $A \subseteq B$." Olkoot $A \subseteq B \subseteq (0,\infty)$. Funktion ν määritelmän ja supremumin monotonisuuden nojalla pätee

$$\nu(A) := \sup A \le \sup B =: \nu(B).$$

"$\nu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) \le \bigcup_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$." Olkoot $A_1, A_2, \ldots \subseteq (0,\infty)$. Funktion ν määritelmän ja supremumin subadditiivisuuden nojalla pätee

$$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) := \sup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \sup A_k =: \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

"$\mathcal{M}_\nu$ on triviaali σ-algebra."

Yleisestä ulkomittojen teoriasta tiedetään, että $\mathcal{M}_\nu$ on σ-algebra. Täten σ-algebran määritelmän nojalla $\varnothing, (0,\infty) \in \mathcal{M}_\nu$. Osoitetaan, että $\mathcal{M}_\nu$ ei sisällä muita osajoukkoja.

Olkoon E perusjoukon Ω osajoukko, joka ei ole $\varnothing$ tai Ω. Koska $E \ne \varnothing$, niin löytyy $a \in E$. Koska $E \ne \Omega$, niin löytyy $b \notin E$. Muistetaan, että Carathéodoryn ehto joukolle E vaatii, että

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c) \quad \text{kaikilla testijoukoilla } A \subseteq \Omega.$$

Osoitetaan, että on olemassa testijoukko $A \subseteq \Omega$, jolla vaadittu yhtäsuuruus ei päde. Valitaan $A = \{a, b\}$. Koska $a \in E$ ja $b \notin E$, niin $A \cap E = \{a\}$ ja $A \cap E^c = \{b\}$. Funktion ν määritelmän nojalla $\nu(A) := \sup\{a,b\} = \max\{a,b\}$, $\nu(A \cap E) = \sup\{a\} = a$ ja $\nu(A \cap E^c) = \sup\{b\} = b$. Huomataan, että

$$\max\{a,b\} = \begin{cases} b & \text{jos } a \le b, \\ a & \text{jos } a \ge b, \end{cases}$$

joten $\max\{a,b\} = a + b$ täsmälleen silloin, kun $a = 0$ tai $b = 0$. Kaikkiaan saadaan:

$$\begin{aligned} &\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c) \quad \text{testijoukolla } A = \{a,b\}. \\ \iff &\max\{a,b\} = a + b. \\ \iff &a = 0 \text{ tai } b = 0. \end{aligned}$$

Jälkimmäinen ehto ei toteudu, koska $a \in (0,\infty)$ ja $b \in (0,\infty)$. Siis Carathéodoryn ehto ei päde joukolle E.

Tehtävä 2. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^d$ joukko ja $s \ge 0$ ja $\delta > 0$ reaalilukuja. Määritellään joukon A *läpimitta* $\operatorname{diam}(A)$ asettamalla

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Määritellään

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} B_k)^s : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \le \delta\Big\}.$$

Osoita:

(a) On olemassa raja-arvo $\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$. (Merkitään $\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$.)

(b) Kuvaus $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ on ulkomitta.

Ratkaisu. Kiinnitetään $s \geq 0$. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

"Raja-arvo $\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ on olemassa." Huomaa, että ehto $\operatorname{diam}(B_k) \leq \delta$ on sitä tiukempi, mitä pienempi parametri δ on (eli jos $\gamma < \delta$, niin ehdosta $\operatorname{diam}(B_k) \leq \gamma$ seuraa ehto $\operatorname{diam}(B_k) \leq \delta$). Täten jos $\gamma < \delta$, niin

$$\begin{aligned}
&\{\{B_k\}_{k=1}^\infty : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \gamma\} \\
&\subseteq \{\{B_k\}_{k=1}^\infty : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta\},
\end{aligned}$$

mistä seuraa, että

$$\begin{aligned}
&\{\sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_k)^s : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \gamma\} \\
&\subseteq \{\sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_k)^s : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta\},
\end{aligned}$$

mistä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\gamma(A) &:= \inf\{\sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_k)^s : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \gamma\} \\
&\geq \inf\{\sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_k)^s : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta\} =: \mathcal{H}^s_\delta(A).
\end{aligned}$$

Siis jos $\gamma < \delta$, niin $\mathcal{H}^s_\gamma(A) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A)$, mikä tarkoittaa, että funktio $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(A)$ on laskeva. Näin ollen raja-arvo $\lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ on olemassa [1]. Koska $0 \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \infty$, niin $0 \leq \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta \leq \infty$. Merkitään $\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$.

"Kuvaus $\mathcal{H}^s_\delta : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ on ulkomitta kaikilla $\delta > 0$." Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaus $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$, joka saadaan asettamalla $\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ kaikilla $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, on ulkomitta.

Osoitetaan ensiksi, että jokaisella $\delta > 0$ kuvaus $\mathcal{H}^s_\delta : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ on ulkomitta ja sen jälkeen osoitetaan rajankäyntiä tarkastelemalla, että myös kuvaus $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ on ulkomitta.

Kiinnitetään $\delta > 0$. Käytetään tässä ratkaisussa merkintää

$$H^s_\delta(A) := \{\sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_k)^s : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta\}$$

joukosta, jonka yli infimum lasketaan $\mathcal{H}^s_\delta(A)$:n määritelmässä.

"$\mathcal{H}^s_\delta(\varnothing) = 0$." Valitaan $B_k := \varnothing$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Huomataan, että $\bigcup_{k=1}^\infty B_k \supseteq \varnothing$ ja $\operatorname{diam} A_k = \operatorname{diam} \varnothing = 0 \leq \delta$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Lisäksi $\sum_{k=1}^\infty \operatorname{diam} B_k = 0$. Siten $\{0\} \in H^s_\delta(\varnothing)$, joten $\mathcal{H}^s_\delta(\varnothing) = \inf H^s_\delta(\varnothing) \leq 0$.

"Jos $A \subseteq B$, niin $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$." Olkoon $A \subseteq B$. Huomataan, että ehto $\bigcup_{k=1}^\infty C_k \supseteq A$ on sitä löysempi, mitä pienempi joukko A on: Jos $B \supseteq A$, niin ehdosta $\bigcup_{k=1}^\infty C_k \supseteq B$ seuraa ehto $\bigcup_{k=1}^\infty C_k \supseteq A$. Siten

$$\begin{aligned}
&\{\{B_k\}_{k=1}^\infty : B_k \text{ joukkoja, joilla } B \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta\} \\
&\subseteq \{\{B_k\}_{k=1}^\infty : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta\},
\end{aligned}$$

joten

$$H_\delta^s(B) := \{\sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_k)^s : B_k \text{ joukkoja, joilla } B \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta\}$$

$$\subseteq \{\sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_k)^s : B_k \text{ joukkoja, joilla } A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty B_k \text{ ja } \operatorname{diam}(B_k) \leq \delta\} =: H_\delta^s(A),$$

joten $\mathcal{H}_\delta^s(B) = \inf H_\delta^s(B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf H_\delta^s(A)$.

"Pätee $H_\delta^s(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \inf H_\delta^s(A_k)$." Todetaan ensin pieni apulause. Olkoot $C_n \subseteq [0,\infty]$. Käytetään merkintää

$$\sum_{n=1}^\infty C_n := \{\sum_{n=1}^\infty c_n : c_n \in C_n \text{ kaikilla } n = 1,2,\ldots\},$$

mikä yleistää jo aiemmin käytetyn merkinnän $C_1 + C_2 := \{c_1 + c_2 : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$.

Lemma 1. Olkoot $C_n \subseteq [0,\infty]$. Tällöin

$$\inf\Big(\sum_{n=1}^\infty C_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \inf C_n.$$

Todistus. "$\geq$." Olkoot $c_n \in C_n$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$. Koska $\inf C_n$ on joukon C_n alaraja, niin pätee $c_n \geq \inf C_n$. Summaamalla nämä epäyhtälöt saadaan $\sum_{n=1}^\infty c_n \geq \sum_{n=1}^\infty \inf C_n$. Siis luku $\sum_{n=1}^\infty \inf C_n$ on joukon $\sum_{n=1}^\infty C_n$ alaraja. Koska $\inf\big(\sum_{n=1}^\infty C_n\big)$ on joukon $\sum_{n=1}^\infty C_n$ suurin alaraja, niin

$$\inf\Big(\sum_{n=1}^\infty C_n\Big) \geq \sum_{n=1}^\infty \inf C_n.$$

"$\leq$." Jos $\inf C_n = \infty$ jollakin $n = 1,2,\ldots$, niin epäyhtälö $\inf\big(\sum_{n=1}^\infty C_n\big) \leq \sum_{n=1}^\infty \inf C_n = \infty$ pätee selvästi. Voidaan siis olettaa, että $\inf C_n < \infty$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska luku $\inf C_n$ on joukon C_n suurin alaraja, niin sitä aidosti suurempi luku $\inf C_n + \frac{\epsilon}{2^n}$ ei ole kyseisen joukon alaraja, joten on olemassa $c_n \in C_n$, jolle $c_n < \inf C_n + \frac{\epsilon}{2^n}$. Koska luku $\inf\big(\sum_{n=1}^\infty C_n\big)$ on joukon $\sum_{n=1}^\infty C_n$ alaraja, niin $\inf\big(\sum_{n=1}^\infty C_n\big) \leq \sum_{n=1}^\infty c_n$. Kaikkiaan

$$\inf\Big(\sum_{n=1}^\infty C_n\Big) \leq \sum_{n=1}^\infty c_n \leq \sum_{n=1}^\infty (\inf C_n + \frac{\epsilon}{2^n}) \leq \sum_{n=1}^\infty \inf C_n + \epsilon \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}.$$

Ottamalla rajankäynti $\epsilon \to 0$ ja huomioimalla $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} < \infty$ saadaan haluttu arvio. $\square$

Olkoot $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ kun $n = 1,2,\ldots$. Olkoot $h_n \in H_\delta^s(A_n)$ kun $n = 1,2,\ldots$. Kullakin $n = 1,2,\ldots$, lukujoukon $H_\delta^s(A_n)$ määritelmän nojalla $h_n = \sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_{n,k})^s$ jollakin joukkokokoelmalla $\{B_{n,k}\}_{k=1}^\infty$, joka on joukolle A_n kelpaava peite: $\bigcup_{k=1}^\infty B_{n,k} \supseteq A_n$ ja $\operatorname{diam} B_{n,k} \leq \delta$ kaikilla $k = 1,2,\ldots$.

Huomaa, että tällöin joukkokokoelma $\{B_{n,k}\}_{\substack{n=1,2,\ldots,\\ k=1,2,\ldots}}$ on joukolle $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ kelpaava peite: $\bigcup_{\substack{k=1,2,\ldots,\\ n=1,2,\ldots}} B_{n,k} \supseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ ja $\operatorname{diam} B_{n,k} \leq \delta$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$ ja $k = 1,2,\ldots$. Siten $h := \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_{n,k})^s \in H_\delta^s(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$. Huomaa, että

$$h = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_{n,k})^s = \sum_{n=1}^\infty \Big(\sum_{k=1}^\infty (\operatorname{diam} B_{n,k})^s\Big) = \sum_{n=1}^\infty h_n.$$

Näin ollen ollaan saatu, että jos $h_n \in H^s_\delta(A_n)$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin $\sum_{n=1}^\infty h_n \in H^s_\delta\big(\bigcup_{k=1}^\infty\big)$, mikä tarkoittaa, että

$$\sum_{n=1}^\infty H^s_\delta(A_n) \subseteq H^s_\delta\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big).$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \inf H^s_\delta(A_n) \\
&= \inf\Big(\sum_{n=1}^\infty H^s_\delta(A_n)\Big) && \text{apulause} \\
&\geq \inf H^s_\delta\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) && \text{infimumin monotonisuus} \\
&=: \mathcal{H}^s_\delta\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big).
\end{aligned}$$

Huomio. Kuvaus $\mathcal{H}^s_\delta : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ voidaan todeta ulkomitaksi täysin samanlaisella perustelulla kuin kuvaus m^* todetaan ulkomitaksi Lauseen 11.2. todistuksessa. Ylläoleva perustelu eroaa tästä vain siten, että infimumeja on käsitelty hieman eri tavalla, mikä pohjautuu seuraavaan havaintoon: Olkoon $A \subseteq [-\infty, \infty]$. Olkoon b joukon A alaraja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä [2]:

- (Lähestyttävissä) Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$, jolle $a < b + \epsilon$.
- (Suurin alaraja) Jos c on joukon A alaraja, niin $c \leq b$.

"Kuvaus $\mathcal{H}^s := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta$ on ulkomitta." Osoitetaan lopuksi, että ulkomitan $\mathcal{H}^s_\delta$ ominaisuudet siirtyvät rajakuvaukselle $\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta$.

- $$\mathcal{H}^s(\varnothing) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(\varnothing) = \lim_{\delta\to 0} 0 = 0.$$
- Olkoot $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^d$. Täten $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$ kaikilla $\delta > 0$, joten
  $$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(B) = \mathcal{H}^s(B).$$
- Olkoot $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$. Olkoot δ_k siten, että $0 < \delta_{k+1} < \delta_k$ ja $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$ (esimerkiksi voidaan valita $\delta_k := \frac{1}{k}$). Koska jokaisella joukolla A kuvaus $\delta \to \mathcal{H}^s_\delta(A)$ on vähenevä ja $\delta_{k+1} < \delta_k$, niin $\mathcal{H}^s_{\delta_k}(A) \leq \mathcal{H}^s_{\delta_{k+1}}(A)$. Erityisesti ollaan siis saatu, että
  $$\mathcal{H}^s_{\delta_k}(A_n) \leq \mathcal{H}^s_{\delta_{k+1}}(A_n) \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots.$$
  Jokaisella $k = 1, 2, \ldots$ määritellään apufunktio $g_k(n) : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ asettamalla $g_k(n) := \mathcal{H}^s_{\delta_{k+1}}(A_n)$. On todettu, että funktiojono g_k on kasvava. Muistetaan, että sarjan summaus on integrointia lukumäärämitan suhteen eli jos käytetään nimitystä μ lukumäärämitasta, niin $\sum_{n=1}^\infty g(n) = \int_{\mathbb{N}} g(n)\, d\mu(n)$.

Monotonisen suppenemisen lauseen nojalla saadaan

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}^s_{\delta_k}(A_n)\\
&=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{N}} g_k(n)\,\mathrm{d}\mu(n) &&\text{summamerkinnän kirjoittaminen integraalimerkintänä}\\
&=\int_{\mathbb{N}}\lim_{k\to\infty} g_k(n)\,\mathrm{d}\mu(n) &&\text{monotonisen suppenemisen lause}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{k\to\infty}\mathcal{H}^s_{\delta_k}(A_n) &&\text{integraalimerkinnän kirjoittaminen sumammerkintänä.}
\end{aligned}
$$

Koska raja-arvo $\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)$ on olemassa, niin erityisesti se voidaan laskea vähenevää jonoa pitkin. Samoin, koska jokaisella $n = 1,2,\ldots$ raja-arvo $\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(A_n)$ on olemassa, niin erityisesti se voidaan laskea vähenevää jonoa pitkin. Näin ollen saadaan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) &= \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \lim_{k\to\infty}\mathcal{H}^s_{\delta_k}\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big)\\
&\le \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^s_{\delta_k}(A_n) = \sum_{n=1}^\infty\lim_{k\to\infty}\mathcal{H}^s_{\delta_k}(A_n) = \sum_{n=1}^\infty\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(A_n) \le \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_n).
\end{aligned}
$$

Tehtävä 3. Osoita:

(a) Jos $\nu : \mathcal{P}(\Omega)\to[0,\infty]$ on ulkomitta ja $\nu(A) = 0$, niin $A\in\mathcal{M}_\nu$.
(b) Ulkomitan rajoittuma mitaksi $\nu : \mathcal{M}_\nu\to[0,\infty]$ on täydellinen.
(c) Jos μ^* on mittaa $\mu : \mathcal{F}\to[0,\infty]$ vastaava ulkomitta ja $\bar\mu : \bar{\mathcal{F}}\to[0,\infty]$ on μ:n täydellistymä, niin $\bar{\mathcal{F}}\subseteq\mathcal{M}_{\mu^*}$ ja pätee $\mu^*(F) = \bar\mu(F)$ kaikilla $F\in\bar{\mathcal{F}}$.

Ratkaisu. Olkoon $\nu : \mathcal{P}(\Omega)\to[0,\infty]$ ulkomitta.

"Jos $\nu(E) = 0$, niin $E\in\mathcal{M}_\nu$." Olkoon $E\subseteq\Omega$. Oletetaan, että $\nu(E) = 0$. On osoitettava, että $E\in\mathcal{M}_\nu$. Kokoelma $\mathcal{M}_\nu$ on määritelmän mukaan kokoelma, joka sisältää kaikki Ω:n osajoukot, jotka täyttävät Carathéodoryn kriteerin. On siis osoitettava, että joukko E täyttää Carathéodoryn kriteerin eli

$$\nu(A) = \nu(A\cap E) + \nu(A\cap E^c)\qquad\text{kaikilla } A\in\mathcal{P}(\Omega).$$

Todetaan yhtäsuuruus toteamalla epäyhtälöt kumpaankin suuntaan. Suunta "$\le$" pätee aina ulkomitan subadditiivisuuden ansiosta. Osoitetaan suunta "$\ge$". Olkoon $A\in\mathcal{P}(\Omega)$. Ulkomitan monotonisuuden nojalla pätee $\nu(A\cap E)\le\nu(E) = 0$ Monotonisuuden nojalla pätee myös $\nu(A)\ge\nu(A\cap E^c)$. Kaikkiaan

$$\nu(A)\ge\nu(A\cap E^c) = \nu(A\cap E^c) + 0 = \nu(A\cap E^c) + \nu(A\cap E).$$

"Ulkomitan rajoittuma mitaksi $\nu : \mathcal{M}_\nu\to[0,\infty]$ on täydellinen." Muistetaan mitta-avaruuden täydellisyyden määritelmä:

Määritelmä (Mitta-avaruuden täydellisyys)**.** Mitta-avaruus $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ on *täydellinen* jos jokainen nollamittaisen joukon osajoukko on mitallinen eli jos joukolle $F\in\mathcal{P}(\Omega)$ pätee, että $F\subseteq E$ jollakin $E\in\mathcal{F}$, jolle $\mu(E) = 0$, niin $F\in\mathcal{F}$.

Olkoon $F\in\mathcal{P}(\Omega)$, jolle $F\subseteq E$ jollakin $E\in\mathcal{M}_\nu$, jolle $\nu(E) = 0$. On osoitettava, että $F\in\mathcal{M}_\nu$. Ulkomitan monotonisuuden nojalla

$$\nu(F)\le\nu(E) = 0.$$

Aikaisemmin osoitettiin, että jos $\nu(F) = 0$, niin $F\in\mathcal{M}_\nu$. Täten $F\in\mathcal{M}_\nu$.

"$\bar{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ ja $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$ kaikilla $A \in \bar{\mathcal{F}}$." Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Muistetaan, että

- Luentomuistiinpanoissa on todistettu, että kuvaus $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$, joka on määritelty asettamalla
$$\mu^*(A) := \inf_{E \in \mathcal{F} : E \supseteq A} \mu(E) \quad \text{kaikilla } A \in \mathcal{P}(\Omega)$$
on ulkomitta. Lisäksi pätee, että $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ ja $\mu(E) = \mu^*(E)$ kaikilla $E \in \mathcal{F}$.
- Harjoituksissa on todistettu, että kokoelma
$$\bar{\mathcal{F}} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : \text{on olemassa } E, F \in \mathcal{F}, \text{ joille } E \subseteq A \subseteq F \text{ ja } \mu(F \setminus E) = 0.\}$$
on σ-algebra ja kuvaus $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$, joka saadaan asettamalla
$$\bar{\mu}(A) := \mu(F_A) \quad \text{kaikilla } A \in \bar{\mathcal{F}},$$
missä F_A on kokoelman $\bar{\mathcal{F}}$ määritelmän mukainen joukko (määritelmän mukaan on olemassa $E_A, F_A \in \mathcal{F}$, joille $E_A \subseteq A \subseteq F_A$ ja $\mu(F_A \setminus E_A) = 0$). Lisäksi pätee, että $\mathcal{F} \subseteq \bar{\mathcal{F}}$ ja $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$.

"$\bar{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$." Olkoon $A \in \bar{\mathcal{F}}$. Tällöin täydellistymän määritelmän nojalla on olemassa joukot $E, F \in \mathcal{F}$, joille $E \subseteq A \subseteq F$ ja $\mu(F \setminus E) = 0$. Koska $E \subseteq A$, niin voidaan kirjoittaa
$$A = E \cup (A \setminus E).$$
Osoitetaan, että $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ja $A \setminus E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, mistä seuraa, että $A = E \cup (A \setminus E) \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, koska $\mathcal{M}_{\mu^*}$ on σ-algebra.

Huomataan ensin, että $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ seuraa sisältyvyydestä $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Osoitetaan sitten, että $A \setminus E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Koska $(A \setminus E) \subseteq (F \setminus E)$, niin ulkomitan monotonisuuden ja ominaisuuden "$\mu(A) = \mu^*(A)$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$" nojalla pätee
$$\mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(F \setminus E) = \mu(F \setminus E) = 0.$$
Aikaisemmin todettiin, että jokaiselle ulkomitalle ν pätee, että jos $\nu(A) = 0$, niin $A \in \mathcal{M}_\nu$. Siten $A \setminus E \in \mathcal{M}_{\mu*}$.

"$\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$ kaikilla $A \in \bar{\mathcal{F}}$."Aikaisemmin todettiin, että $A = E \cup (A \setminus E)$, missä joukoille E ja $A \setminus E$ pätee $E, A \setminus E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $\mu^*(E) = \mu(E)$, ja $\mu^*(A \setminus E) = 0$. Yleisestä teoriasta tiedetään, että ulkomitan μ^*:n rajoittuma σ-algebralle $\mathcal{M}_{\mu*}$ on mitta. Täten σ-additiivisuuden nojalla pätee:
$$\mu^*(A) = \mu^*(E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(E) + 0 = \mu^*(E) = \mu(E).$$
Huomataan, että koska $F = E \cup F \setminus E$ ja $\mu(F \setminus E) = 0$, niin $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) = \mu(E) + 0 = \mu(E)$. Täydellistymän määritelmän ja tämän huomion nojalla pätee, että
$$\bar{\mu}(A) := \mu(F) = \mu(E).$$
Näin ollen ollaan saatu, että
$$\mu^*(A) = \mu(E) = \bar{\mu}(A).$$

Tehtävä 4. Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^d$ joukko, $\alpha \in \mathbb{R}$ reaaliluku ja $y \in \mathbb{R}^d$ vektori. Merkitään
$$\alpha A := \{\alpha x : x \in A\} \quad \text{ja} \quad A + y := \{x + y : x \in A\}.$$
Todista seuraavat Lebesguen ulkomitan invarianssiominaisuudet:

(a) $m^*(A + y) = m^*(A)$.
(b) $m^*(\alpha A) = |\alpha|^d m^*(A)$.

Ratkaisu. Osoitetaan alkuun aputulos:

Lemma (Joukon siirron ja venytyksen ominaisuuksia)**.** Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Olkoot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $x, y \in \mathbb{R}^d$. Tällöin pätee:

- (Sisältyvyyden säilyminen) Jos $A \subseteq B$, niin $A + x \subseteq B + x$ ja $\alpha A \subseteq \alpha B$.
- (Yhteensopivuus yhteenlaskun ja kertolaskun kanssa) Pätee $(A + x) + y = A + (x + y)$ ja $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Todistus. Todistetaan ensin, että jos $A \subseteq B$, niin $A + x \subseteq B + x$. Oletetaan, että $A \subseteq B$. Osoitetaan, että $A + x \subseteq B + x$. Olkoon $y \in A + x$. Tämä tarkoittaa, että $y = a + x$ jollakin $a \in A$. Koska $A \subseteq B$, niin $a \in B$. Täten $y = a + x$ vektorilla $a \in B$. Siten $y \in B + x$.

Todistetaan sitten, että pätee pätee $(A+x)+y = A+(x+y)$. Todetaan ensin, että $(A+x)+y \subseteq A+(x+y)$. Olkoon $z \in (A+x)+y$. Täten $z = b+y$ jollakin $b \in A+x$. Koska $b \in A + x$, niin $b = a + x$ jollakin $a \in A$. Kaikkiaan $z = b + y = (a + x) + y$. Vektoreiden yhteenlaskun liitännäisyyden (eli assosiatiivisuuden) nojalla $(a+x)+y = a+(x+y)$. Täten $z = a + (x + y)$ vektorilla $a \in A$. Siten $z \in A + (x + y)$.

Todetaan sitten, että $(A + x) + y \supseteq A + (x + y)$. Olkoon $z \in A + (x + y)$. Täten $z = a + (x + y)$ jollakin $a \in A$. Vektoreiden yhteenlaskun liitännäisyyden nojalla $z = (a + x) + y$. Huomaa, että $a + x =: b \in A + x$. Siten $z = b + y$ vektorilla $b \in A + x$. Siten $z \in (A + x) + y$.

Nyt olemme osoittaneet ominaisuudet summauksen (joukon siirto) tapauksessa. Skalaarikertomisen (joukon venytys) tapauksessa ominaisuudet osoitetaan samaan tapaan. □

Käyttämällä samantapaista todistusta kuin lemmassa tai käyttämällä lemmassa saatuja ominaisuuksia nähdään, että:

Seuraus (Joukon siirron ja venytyksen yhteensopivuus yhdisteen ja leikkauksen kanssa)**.** Olkoot I jokin indeksijoukko ja $A_i \subseteq \mathbb{R}^d$ kaikilla $i \in I$. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $x \in \mathbb{R}^d$. Tällöin yhdisteelle pätee

$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) + x = \bigcup_{i \in I}(A_i + x)$$

ja

$$\alpha\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I}(\alpha A_i)$$

ja leikkauselle pätee

$$\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) + x = \bigcap_{i \in I}(A_i + x)$$

ja

$$\alpha\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I}(\alpha A_i).$$

Todistus. Todetaan seuraus käyttämällä lemmassa osoitettuja ominaisuuksia. Vaihtoehtoisesti seuraus voidaan todistaa samaan tapaan kuin lemma.

“$\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) + x = \bigcup_{i \in I}(A_i + x)$.” Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ja $x \in \mathbb{R}^d$. Todetaan ensin, että $\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) + x = \bigcup_{i \in I}(A_i + x)$. Yhdisteen määritelmän nojalla

$$A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

kaikilla $i \in I$. Sisältyvyyden säilymisen nojalla

$$A_i + x \subseteq \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) + x.$$

kaikilla $i \in I$. Yhdisteen määritelmän nojalla tästä seuraa, että

$$\bigcup_{i\in I}(A_i + x) \subseteq \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) + x.$$

Ollaan siis saatu, että kaikilla joukkokokoelmilla $\{A_i\}_{i\in I}$ ja vektoreilla $x \in \mathbb{R}^d$ pätee

$$\bigcup_{i\in I}(A_i + x) \subseteq \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) + x. \tag{0.1}$$

Sisältyvyyden toinen suunta saadaan soveltamalla tätä sopivasti. Yhteensopivuuden nojalla $A_i = A_i + (x - x) = (A_i + x) - x$. Soveltamalla sisältyvyyttä (0.1) joukkokokoelmaan $\{A_i + x\}_{i\in I}$ ja vektoriin $-x$ saadaan

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}((A_i + x) - x) \subseteq \Big(\bigcup_{i\in I}(A_i + x)\Big) - x.$$

Sisältyvyyden säilymisen ja summauksen kanssa yhteensopivuuden nojalla tästä saadaan, että

$$\bigcup_{i\in I} A_i + x \subseteq \bigg(\Big(\bigcup_{i\in I}(A_i + x)\Big) - x\bigg) + x = \Big(\bigcup_{i\in I}(A_i + x)\Big) + (-x + x) = \bigcup_{i\in I}(A_i + x).$$

"$\alpha\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I}(\alpha A_i)$." Leikkauksen määritelmän nojalla

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i \quad \text{kaikilla } i \in I,$$

joten sisältyvyyden säilyvyyden nojalla

$$\alpha \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \alpha A_i \quad \text{kaikilla } i \in I,$$

joten leikkausen määritelmän nojalla $\alpha \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I}(\alpha A_i)$. Ollaan siis saatu, että kaikille joukkokokoelmille $\{A_i\}_{i\in I}$ ja luvuille $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pätee, että

$$\alpha \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I}(\alpha A_i).$$

Toinen suunta saadaan soveltamalla tätä sopivasti. Soveltamalla tätä joukkokokoelmaan $\{\alpha A_i\}_{i\in I}$ ja lukuun $\frac{1}{\alpha}$ saadaan, että

$$\frac{1}{\alpha}\bigcap_{i\in I}(\alpha A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I}(\frac{1}{\alpha}(\alpha A_i)) = \bigcap_{i\in I}((\frac{1}{\alpha}\alpha)A_i) = \bigcap_{i\in I} A_i,$$

joten sisältyvyyden säilyvyyden nojalla

$$\bigcup_{i\in I}(\alpha A_i) = \alpha\frac{1}{\alpha}\bigcup_{i\in I}(\alpha A_i) \subseteq \alpha \bigcap_{i\in I} A_i,$$

mikä on toinen suunta. Kaikkiaan siis $\alpha \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(\alpha A_i)$.

"Muut tapaukset. " Muut tapaukset saadaan samankaltaisella päättelyllä. □

Lemma 2. Olkoon $R \subseteq \mathbb{R}^d$ suorakulmio. Olkoot $y \in \mathbb{R}^d$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee, että

$$|R + y| = |R|$$

ja

$$|\alpha R| = |\alpha|^d |R|.$$

Todistus. Olkoon $R \subseteq \mathbb{R}^d$ suorakulmio. Olkoot $y \in \mathbb{R}^d$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Todistetaan ensin, että $|R + y| = |R|$.

Todetaan ensin, että välille I ja luvulle $c \in \mathbb{R}$ pätee $\ell(I + c) = \ell(I)$. Olkoon I väli. (Merkintöjen kiinnittämiseksi tarkastellaan suljettua väliä - avoimen tai puoliavoimen välin tapauksessa sama tarkastelu pätee.) Täten $I = [a, b]$ joillakin $a \leq b$. Huomataan, että $I + c = [a, b] + c = [a + c, b + c]$. Näin ollen välin pituuden määritelmän nojalla

$$\ell(I + c) = (a + c) - (b + c) = a - b = \ell(I).$$

Olkoon R suorakulmio. Koska R on suorakulmio, niin voidaan kirjoittaa $R_k = I_1 \times \cdots \times I_k$ joillakin väleillä $I_i \subseteq \mathbb{R}$. Kirjoitetaan myös $y = (y_1, \ldots, y_d)$. Joukon siirron laskusääntöjen nojalla

$$R + y = (I_1 + y_1) \times \cdots \times (I_d + y_d).$$

Kullekin välin pituudelle pätee $\ell(I_i + y_i) = \ell(I_i)$. Täten suorakulmion geometrisen mitan määritelmän nojalla

$$|R+y| = |(I_1+y_1)\times\cdots\times(I_d+y_d)| = \ell(I_1+y_1)\cdots\ell(I_d+y_d) = \ell(I_1)\cdots\ell(I_d) = |I_i\times\cdots I_d| = |R|.$$

Todistetaan sitten, että $|\alpha R| = |\alpha|^d |R|$.

Todetaan ensin, että välille I ja luvulle $\alpha \in \mathbb{R}$ pätee $\ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$. Olkoon I väli. (Merkintöjen kiinnittämiseksi tarkastellaan suljettua väliä - avoimen tai puoliavoimen välin tapauksessa sama tarkastelu pätee.) Täten $I = [a, b]$ joillakin $a \leq b$. Määritetään joukko αI:

- Jos $\alpha = 0$, niin $0[a, b] = \{0\} = [0 \cdot a, 0 \cdot b]$, koska

$$\begin{aligned} & s \in 0[a, b]. \\ \iff & s = 0t \text{ jollakin } t \in [a, b]. \\ \iff & s = 0. \end{aligned}$$

- Jos $\alpha > 0$, niin $\alpha[a, b] = [\alpha a, \alpha b]$, koska

$$\begin{aligned} & s \in \alpha[a, b]. \\ \iff & s = \alpha t \text{ jollakin } t \in [a, b]. \\ \iff & \text{Luvulle } t, \text{ jonka määrää yhtälö } s = \alpha t, \text{ pätee } a \leq t \leq b. \\ \iff & \text{Luvulle } s \text{ pätee } \alpha a \leq s \leq \alpha b. \\ \iff & s \in \alpha[\alpha a, \alpha b]. \end{aligned}$$

- Jos $\alpha < 0$, niin $\alpha[a, b] = [\alpha b, \alpha a]$, mikä nähdään samankaltaisella päättelyllä kuin tapauksessa $\alpha > 0$ (huomaa kuitenkin, että negatiivinen venytys kääntää välin päätepisteiden järjestyksen!).

Näin ollen välin pituuden määritelmän nojalla

- Jos $\alpha = 0$, niin $\ell(\alpha I) = \ell([0, 0]) = 0 = \alpha\ell(I)$.
- Jos $\alpha > 0$, niin $\ell(\alpha I) = \ell([\alpha a, \alpha b]) = \alpha b - \alpha a = \alpha(b - a) = \alpha\ell(I)$.
- Jos $\alpha < 0$, niin $\ell(\alpha I) = \ell([\alpha b, \alpha a]) = \alpha a - \alpha b = -\alpha(b - a) = -\alpha\ell(I) = |\alpha|\ell(I)$.

Siis joka tapauksessa $\ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$.

Olkoon R suorakulmio. Koska R on suorakulmio, niin voidaan kirjoittaa $R_k = I_1 \times \cdots \times I_k$ joillakin väleillä $I_i \subseteq \mathbb{R}$. Joukon venytyksen laskusääntöjen nojalla

$$\alpha R = (\alpha I_1) \times \cdots \times (\alpha I_d).$$

Kullekin välin pituudelle pätee $\ell(\alpha I_i) = |\alpha|\ell(I_i)$. Täten suorakulmion geometrisen mitan määritelmän nojalla

$$|\alpha R| = |(\alpha I_1)\times\cdots\times(\alpha I_d)| = |\alpha|\ell(I_1)\cdots|\alpha|\ell(I_d) = |\alpha|^d\ell(I_1)\cdots\ell(I_d) = |\alpha|^d|I_i\times\cdots I_d| = |\alpha|^d|R|.$$

$\square$

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Muistetaan, että

$$m^*(A) := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}|R_k| : R_k \subseteq \mathbb{R}^d \text{ suorakulmio, } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\}.$$

Käytetään (tässä ratkaisussa) lukujoukosta, josta infimum lasketaan, merkintää

$$L(A) := \{\sum_{k=1}^{\infty}|R_k| : R_k \subseteq \mathbb{R}^d \text{ suorakulmio, } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\ \},$$

jolloin siis $m^*(A) = \inf L(A)$.

Osoitetaan käyttämällä apulauseita, että $m^*(A+y) = m^*(A)$. Osoitetaan ensin, että

$$L(A) \subseteq L(A+y) \quad \text{kaikilla } A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ ja } y \in \mathbb{R}^d. \tag{0.2}$$

Olkoon $y \in \mathbb{R}^d$ ja $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Olkoon $l \in L(A)$. Täten $l = \sum_{k=1}^{\infty}|R_k|$ joillakin suorakulmioilla $R_k \subseteq \mathbb{R}^d$, joille $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$. Joukkojen siirron laskusääntöjen mukaisesti $R_k + y$ on suorakulmio ja $A + y \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(R_k + y)$. Todetaan vielä, että $|R_k| = |R_k + y|$, joten

$$\sum_{k=1}^{\infty}|R_k + y| = \sum_{k=1}^{\infty}|R_k|.$$

Näin ollen $l = \sum_{k=1}^{\infty}|R_k+y|$ suorakulmioilla (R_k+y), joille pätee $A+y \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(R_k+y)$. Siis $l \in L(A+y)$.

Huomaa, että $(A+y) - y = A + (y-y) = A$. Soveltamalla sisältyvyyttä (0.2) joukkoon $A+y$ ja vektoriin $-y$ saadaan

$$L(A+y) \subseteq L((A+y)-y) = L(A+(y-y)) = L(A).$$

Kaikkiaan ollaan saatu, että

$$L(A+y) = L(A).$$

Siten $m^*(A) = \inf L(A) = \inf L(A+y) = m^*(A+y)$.

Osoitetaan käyttämällä apulauseita, että $m^*(\alpha A) = |\alpha|^d m^*(A)$. Todetaan ensin, että tämä pätee tapauksessa $\alpha = 0$. Jos $A = \varnothing$, niin $0A = \varnothing$. Jos $A \neq \varnothing$, niin $0A = \{0\}$. Molemmissa tapauksissa $m^*(0A) = 0$ ja $|\alpha|^d m^*(A) = 0m^*(A) = 0$, joten yhtäsuuruus pätee. Osoitetaan sitten, että

$$L(A) \subseteq \frac{1}{|\alpha|^d}L(\alpha A) \quad \text{kaikilla } A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ ja } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{0.3}$$

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Olkoon $l \in L(A)$. Täten $l = \sum_{k=1}^{\infty}|R_k|$ joillakin suorakulmioilla $R_k \subseteq \mathbb{R}^d$, joille $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$. Joukkojen siirron laskusääntöjen mukaisesti αR_k on suorakulmio ja $\alpha A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha R_k)$. Apulauseen nojalla $|\alpha R_k| = |\alpha|^d|R_k|$, joten

$$\sum_{k=1}^{\infty}|R_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha|^d}|\alpha|^d|R_k| = \frac{1}{|\alpha|^d}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha R_k|.$$

Näin ollen $m := \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha R_k|$ suorakulmioilla (αR_k), joille pätee $\alpha A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha R_k)$. Siis $m \in L(A+y)$. Huomaa, että $l = \frac{1}{|\alpha|^d}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha R_k| = \frac{1}{|\alpha|^d}m$, joten $l \in \frac{1}{|\alpha|^d}L(A+y)$.

Huomaa, että $\frac{1}{\alpha}(\alpha A) = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha)A = A$. Soveltamalla sisältyvyyttä (0.3) joukkoon αA ja vektoriin $\frac{1}{\alpha}$ saadaan

$$L(\alpha A) \leq |\alpha|^d L(\frac{1}{\alpha}(\alpha A)) = |\alpha|^d L(A).$$

Kaikkiaan ollaan saatu, että

$$L(A) = \frac{1}{|\alpha|^d} L(\alpha A).$$

Siten $|\alpha|^d m^*(A) = \inf|\alpha|^d L(A) = \inf L(\alpha A) = m^*(\alpha A)$.

Tehtävä 5. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus ja $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen. Todista:

(a) Kuvaus $t \mapsto \mu(f > t)$ on mitallinen Lebesguen mitan suhteen.

(b) Pätee

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} \mu(\{f > t\}) \, \mathrm{d}t.$$

Ratkaisu. Todetaan ensin seuraava aputulos:

Lemma. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin joukko $\{f > \alpha\}$ on $\varnothing, \mathbb{R}$ tai puoliääretön väli.

Huomio. Samaan tapaan voidaan todistaa, että jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on vähenevä, niin joukko $\{f > \alpha\}$ on $\varnothing, \mathbb{R}$ tai puoliääretön väli.

Todistus. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tutkitaan tasojoukkoa

$$\{f > \alpha\} := \{t \in \mathbb{R} : f(t) > \alpha\}.$$

Joukko $\{f > \alpha\}$ voi olla tyhjä, jolloin lemman väite on totta. Voidaan siis olettaa, että joukko $\{f > \alpha\}$ on epätyhjä. Jompikumpi seuraavista pätee:

- Joukko $\{f > \alpha\}$ ei ole alhaalta rajoitettu.
- Joukko $\{f > \alpha\}$ on alhaalta rajoitettu.

Tarkastellaan ensin tapaus “Joukko $\{f > \alpha\}$ ei ole alhaalta rajoitettu.” Osoitetaan, että tällöin $\mathbb{R} = \{f > \alpha\}$. Olkoon $t \in \mathbb{R}$. Koska joukko $\{f > \alpha\}$ ei ole alhaalta rajoitettu, niin on olemassa $s \in \{f > \alpha\}$ (mikä tarkoittaa, että $\alpha < f(s)$), jolle $s \leq t$. Koska f on kasvava, niin tällöin $f(s) \leq f(t)$. Siis $\alpha < f(s) \leq f(t)$, joten $f(t) > \alpha$ eli $t \in \{f > \alpha\}$. Näin on osoitettu, että $\mathbb{R} \subseteq \{f > \alpha\}$. Todetaan, että $\{f > \alpha\} \subseteq \mathbb{R}$. Täten $\mathbb{R} = \{f > \alpha\}$.

Tarkastellaan sitten tapaus “Joukko $\{f > \alpha\}$ on alhaalta rajoitettu.” Valitaan pienin muuttujan arvo t_0, jossa funktion arvo $f(t_0)$ ylittää luvun α:

$$t_0 := \inf\{t \in \mathbb{R} : f(t) > \alpha\}.$$

Todetaan ensin, että $(t_0, \infty) \subseteq \{f > \alpha\}$. Olkoon t, jolle $t_0 < t$. Koska t_0 on joukon $\{f > \alpha\}$ suurin alaraja, niin luku $t > t_0$ ei ole joukon $\{f > \alpha\}$ alaraja, joten on olemassa $s \in \{f > \alpha\}$ (eli $\alpha < f(s)$), jolle $s < t$. Funktion f kasvavuuden nojalla pätee $f(s) \leq f(t)$. Siis $\alpha < f(s) \leq f(t)$, joten $f(t) > \alpha$.

Todetaan sitten, että $(\infty, t_0) \subseteq \{f > \alpha\}^c$ (eli $\{f > \alpha\} \subseteq [t_0, \infty)$). Olkoon t, jolle $t < t_0$. Koska t_0 on joukon $\{f > \alpha\}$ alaraja ja $t < t_0$, niin $t \notin \{f > \alpha\}$, mikä tarkoittaa, että $t \in \{f > \alpha\}^c$.

Kaikkiaan ollaan osoitettu, että

$$(t_0, \infty) \subseteq \{f > \alpha\} \subseteq [t_0, \infty),$$

mistä nähdään, että

$$\{f > \alpha\} = \begin{cases} [t_0, \infty) & \text{jos } t_0 \in \{f > \alpha\}, \\ (t_0, \infty) & \text{jos } t_0 \notin \{f > \alpha\}. \end{cases}$$

□

Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen. "Funktio $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mu(f > t) \in [0, \infty]$ on Lebesguen mitallinen." Osoitetaan, että kuvaus $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, joka saadaan asettamalla $g(t) := \mu(f > t)$ kaikilla $t \in [0, \infty)$, on mitallinen Lebesguen mitallisen avaruuden suhteen. Huomataan, että $\{f > s\} \supseteq \{f > t\}$ jos $s < t$. Siten mitan monotonisuuden nojalla $g(s) = \mu(\{f > s\}) \geq \mu(\{f > t\}) = g(t)$ jos $s < t$, mikä tarkoittaa, että kuvaus $g(t)$ on vähenevä. Mitallisen funktion määritelmän mukaan g on mitallinen täsmälleen silloin, kun $\{g > \alpha\}$ on mitallinen kaikilla $\alpha > 0$. Apulauseen nojalla $\{g > \alpha\}$ on $\varnothing, \mathbb{R}$ tai puoliääretön väli. Kukin näistä joukoista on Lebesguen mitallinen. Siis $\{g > \alpha\}$ on Lebesguen mitallinen.

"Riittää osoittaa yhtäsuuruus $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} \mu(f > t) \, \mathrm{d}t$ yksinkertaisille funktioille." Valitaan kasvava jono yksinkertaisia funktioita s_n, joille $s_n \leq f$ ja $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ kaikkialla (tällainen jono on aina olemassa, kuten luentomuistiinpanoissa on osoitettu aiemmin).

Olkoon $x \in \Omega$ ja $t \in [0, \infty)$. Huomaa, että jos $s_n(x) > t$, niin $s_{n+1}(x) > t$, koska $s_{n+1} \geq s_n$ kaikkialla oletuksen nojalla. Huomaa, että jos $s_n(x) > t$, niin $f(x) > t$, koska $f \geq s_n$ oletuksen nojalla. Huomaa, että jos $f(x) > t$, niin $s_n(x) > t$ jollakin $n = 1, 2, \ldots$, koska oletuksen nojalla $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ kaikkialla. Nämä huomiot osoittavat, että

$$\{s_n > t\} \subseteq \{s_{n+1} > t\} \quad \text{ja} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n > t\} = \{f > t\}.$$

Näin ollen mitan kasvavan suppenemisen lauseen (Lause 2.4.) perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{s_n > t\}) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n > t\}\Big) = \mu(\{f > t\}).$$

Näin ollaan todettu, että funktiot $g_n(t) := \mu(s_n > t)$ muodostavat kasvavan jonon ja $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \mu(f > t)$ kaikilla $t \in [0, \infty]$. Monotonisen suppenemisen lauseen perusteella

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} s_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\mu$$

ja

$$\int_{[0,\infty)} \mu(f > t) \, \mathrm{d}t = \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \mu(s_n > t) \, \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \mu(s_n > t) \, \mathrm{d}t.$$

Näin ollen $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} \mu(f > t) \, \mathrm{d}t$ mikäli $\int_\Omega s_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} \mu(s_n > t) \, \mathrm{d}t$. Siis riittää osoittaa yhtäsuuruus yksinkertaisille funktioille.

"Yhtäsuuruus $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} \mu(s > t) \, \mathrm{d}t$ yksinkertaisille funktioille s." Todetaan alkuun aputulos:

Lemma (Osittaissummaus - osittaisintegroinnin vastine summauksessa)**.** Olkoot $\{a_k\}_{k=0}^{K+1}$ ja $\{b_k\}_{k=0}^{K+1}$ lukujonoja. Tällöin pätee

$$\sum_{k=0}^{K} (a_{k+1} - a_k) b_{k+1} = a_{K+1} b_{K+1} - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{K} a_k (b_{k+1} - b_k).$$

Todistus.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{K}(a_{k+1}-a_k)b_{k+1} &= \sum_{k=0}^{K} a_{k+1}b_{k+1} - \sum_{k=0}^{K} a_k b_{k+1}\\ &= \sum_{l=1}^{K+1} a_l b_l - \sum_{k=0}^{K} a_k b_{k+1}\\ &= +a_{K+1}b_{K+1} - a_0 b_0 + \sum_{l=0}^{K} a_l b_l - \sum_{k=0}^{K} a_k b_{k+1}\\ &= +a_{K+1}b_{K+1} - a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{K} a_k (b_k - b_{k+1})\\ &= +a_{K+1}b_{K+1} - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{K} a_k (b_{k+1} - b_k).\end{aligned}$$

□

Olkoon $s : \Omega \to [0,\infty]$ yksinkertainen funktio. Yksinkertaisen funktion määritelmän nojalla tämä tarkoittaa, että on olemassa mitalliset joukot A_k, missä $k = 1,\dots,K$, jotka osittavat Ω:n ja luvut $a_k \in [0,\infty]$, joiden avulla s voidaan kirjoittaa muodossa

$$s := \sum_{k=1}^{K} a_k 1_{A_k}.$$

Numeroimalla luvut $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ja joukot $\{A_k\}_{k=1}^{K}$ tarvittaessa uudestaan, voidaan olettaa, että luvut $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ on numeroitu kasvavassa järjestyksessä:

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_K.$$

Tulevan laskun kannalta on kätevää määritellä $a_0 := 0$ ja $a_{K+1} := \infty$. Hajotetaan integraali osiin kirjoittamalla

$$\int_{[0,\infty)} \mu(\{s > t\})\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{K+1} \int_{[a_k, a_{k+1})} \mu(\{s > t\})\,\mathrm{d}t.$$

Kiinnitetään $k = 1,2,\dots,K$. Määritetään seuraavaksi funktion $t \mapsto \mu(\{s > t\})$ arvo kun $t \in [a_k, a_{k+1})$. Kiinnitetään t siten, että $a_k \le t < a_{k+1}$. Huomataan:

- Jos luvulle $l = 1,\dots,K$ pätee $k+1 \le l$, niin $t < a_{k+1} \le a_l$, joten ehto $t < a_l$ pätee, mistä seuraa

$$\{a_l > t\} = \{x \in \Omega : a_l > t\} = \Omega.$$

- Jos luvulle $l = 1,\dots,K$ pätee $l \le k$, niin $a_l \le a_k \le t$, joten ehto $t < a_l$ ei päde, mistä seuraa

$$\{a_l > t\} = \{x \in \Omega : a_l > t\} = \varnothing.$$

Tämän huomion avulla saadaan määritettyä joukko $\{s > t\}$ (muista, että t ja k ovat kiinnitettyjä siten, että $a_k \leq t < a_{k+1}$):

$$
\begin{aligned}
&\{s > t\} \\
&= \bigcup_{l=1}^{K} A_l \cap \{s > t\} && \text{koska } A_l \text{, missä } l = 1, \dots, K \text{, peittää } \Omega\text{:n} \\
&= \bigcup_{l=1}^{K} A_l \cap \{a_l > t\} && \text{koska } s = a_l \text{ joukossa } A_l \\
&= \Big(\bigcup_{l=1}^{k} A_l \cap \{a_l > t\} \Big) \cup \Big(\bigcup_{l=k+1}^{K} A_l \cap \{a_l > t\} \Big) \\
&= \Big(\bigcup_{l=1}^{k} A_l \cap \varnothing \Big) \cup \Big(\bigcup_{l=k+1}^{K} A_l \cap \Omega \Big) && \text{koska } \{a_l > t\} = \begin{cases} \varnothing & \text{kun } l = 1, \dots, k \\ \Omega & \text{kun } l = k+1, \dots, K \end{cases} \\
&= \bigcup_{l=k+1}^{K} A_l.
\end{aligned}
$$

Täten, koska A_l ovat erillisiä, pätee:

$$\mu(\{s > t\}) = \mu\Big(\bigcup_{l=k+1}^{K} A_l \Big) = \sum_{l=k+1}^{K} \mu(A_l).$$

Lasketaan:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{K+1} \int_{[a_k, a_{k+1})} \mu(\{s > t\}) \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{K+1} \int_{[a_k, a_{k+1})} \Big(\sum_{l=k+1}^{K} \mu(A_l) \Big) \mathrm{d}t && \mu(\{s > t\}) = \sum_{l=k+1}^{K} \mu(A_l) \text{ kun } a_k \leq t < a_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{K+1} \Big(\sum_{l=k+1}^{K} \mu(A_l) \Big) \int_{[a_k, a_{k+1})} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{K+1} (a_{k+1} - a_k) \Big(\sum_{l=k+1}^{K} \mu(A_l) \Big) && \int_{[a_k, a_{k+1})} \mathrm{d}t = a_{k+1} - a_k \\
&= a_{K+1} b_{K+1} - a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{K} a_k (b_k - b_{k+1}) && \text{osittaissummaus, jossa asetettu } b_{k+1} := \sum_{l=k+1}^{K} \mu(A_l) \\
&= \sum_{k=1}^{K} A_k \mu(A_k) && a_0 = 0, b_{K+1} = \sum_{k=K+1}^{K} \mu(A_k) := 0 \\
& && \text{ja } b_k - b_{k+1} = \mu(A_k) \text{ kun } k = 0, 1, \dots, K \\
&= \int_{\Omega} s \,\mathrm{d}\mu && \text{yksinkertaisen funktion integraalin määritelmä.}
\end{aligned}
$$

Huomaa, että yllä käytettiin summalle sopimusta $\sum_{m=M}^{N} c_m := 0$ tapauksessa $M, N \in \mathbb{N}$ ja $M > N$, jolloin summataan tyhjän indeksijoukon yli (tämä sopimus yhtenäistää hieman ylläolevia merkintöjä).

Kaikkiaan ollaan saatu haluttu yhtäsuuruus eli

$$\int_{[0,\infty)} \mu(\{s > t\}) \,\mathrm{d}t = \int_{\Omega} s \,\mathrm{d}\mu.$$

Tehtävä 6. (a) Olkoon $f : \Omega \to [0,\infty]$ integroituva (eli f on mitallinen ja $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \infty$). Osoita, että $f < \infty$ melkein kaikkialla.

(b) Olkoon $\{q_n\}_{n=1}^\infty = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Määritellään $f : (0,1) \to \infty$ asettamalla

$$f(x) := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{1}{|x-q_n|^{1/2}}.$$

Osoita, että $f < \infty$ melkein kaikkialla Lebesguen mitta-avaruuden suhteen.

Ratkaisu. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus.

"Jos f on integroituva, niin f on äärellistä melkein kaikkialla." Osoitetaan ensin, että jos $f : \Omega \to [0,\infty]$ on integroituva, niin $f < \infty$ melkein kaikkialla. Tähän on monia tapoja, kuten:

- Oletetaan, että $f : \Omega \to [0,\infty]$ on integroituva, mikä tarkoittaa, että f on mitallinen ja $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Osoitetaan, että $f < \infty$ melkein kaikkialla. Tarkastellaan tasojoukon mittaa. Olkoon $t > 0$. Huomaa, että jos $f > t$, niin $\frac{f}{t} < 1$. Tehdään Chebyshevin arvio:

$$\mu(\{f > t\}) = \int_{\{f>t\}} 1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\{f>t\}} \frac{f}{t} \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{t} \int_{\{f>t\}} f \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{t} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

  Näin ollen saadaan arvio

$$\mu(\{f = \infty\}) \leq \mu(\{f > t\}) \leq \frac{1}{t} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{kaikilla } t > 0,$$

  mistä rajankäynnillä $t \to \infty$ saadaan, että $\mu(\{f = \infty\}) = 0$, sillä oletuksen nojalla $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \infty$.
- Osoitetaan, että jos $f : \Omega \to [0,\infty]$ on integroituva, niin $f < \infty$ melkein kaikkialla. Osoitetaan väite osoittamalla sen kontropositio eli osoitetaan, että jos $f = \infty$ positiivismittaisessa joukossa, niin $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \infty$. Oletetaan, että $\mu(\{f = \infty\}) > 0$. Tehdään arvio:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\{f=\infty\}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{f=\infty\}} \infty \,\mathrm{d}\mu = \infty \int_{\{f=\infty\}} \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(\{f = \infty\}).$$

  Koska oletuksen nojalla $\mu(\{f = \infty\}) > 0$, niin $\infty \cdot \mu(\{f = \infty\}) = \infty$, joten $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \infty$.

"Tehtävänannon mukainen funktio on äärellistä melkein kaikkialla." Osoitetaan sitten, että funktio $f : (0,1) \to \infty$, joka saadaan asettamalla

$$f(x) := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{1}{|x-q_n|^{1/2}},$$

on äärellinen melkein kaikkialla. Tätä varten riittää osoittaa, että funktio f on integroituva. Huomaa, että geometrin sarja $\sum_{n=1}^\infty a_n := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}$ suppenee eli

$$\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} < \infty.$$

Huomaa lisäksi, että funktiot $f_n : (0,1) \to [0,\infty]$, jotka saadaan asettamalla $f_n(x) := \frac{1}{|x-q_n|^{1/2}}$, ovat Lebesguen mitallisia, sillä:

- Koska avoimet joukot ovat Lebesguen mitallisia, niin jokainen jatkuva funktio on Lebesguen mitallinen. Siis erityisesti funktio $x \mapsto |x - q_n|^{1/2}$ on Lebesguen mitallinen, koska se on jatkuva.

- Funktio $\frac{1}{g} : \Omega \to [0,\infty]$ on mitallinen aina kun funktio $g : \Omega \to [0,\infty]$ on mitallinen, missä käytetään sopimusta $\frac{1}{0} := \infty$ ja $\frac{1}{\infty} := 0$. Siis erityisesti funktio $x \mapsto \frac{1}{|x-q_n|^{1/2}}$ on mitallinen.

Todetaan seuraavaksi, että funktioiden f_n integraalit ovat äärellisiä ja tasaisesti rajoitettuja eli on olemassa positiivinen vakio $C > 0$ siten, että

$$\int f_n \, \mathrm{d}x \le C \quad \text{kaikilla } n = 1,2,\dots.$$

Huomaa, että funktio f_n on epäoleellisessa mielessä Riemann integroituva. Lasketaan sen integraali:

$$\begin{aligned}
&\int f_n \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{|x-q_n|^{1/2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-q_n}^{1-q_n} \frac{1}{|y|^{1/2}} \, \mathrm{d}x && \text{muuttujan vaihto } x - q_n =: y \\
&= \int_{-q_n}^{0} \frac{1}{|y|^{1/2}} \, \mathrm{d}x + \int_0^{1-q_n} \frac{1}{|y|^{1/2}} && \text{integraalin jakaminen kahteen osaan} \\
&= \int_0^{q_n} \frac{1}{y^{1/2}} \, \mathrm{d}x + \int_0^{1-q_n} \frac{1}{y^{1/2}} && \text{sääntö } \int_a^b = -\int_b^a \text{ ja itseisarvon määritelmä} \\
&= \int_0^{q_n} D_y(2y^{1/2}) \, \mathrm{d}x \int_0^{1-q_n} D_y(2y^{1/2}) \, \mathrm{d}x \\
&= 2q_n^{1/2} + 2(1-q_n)^{1/2} \\
&\le 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 && \text{oletus } 0 < q_n < 1.
\end{aligned}$$

Näin ollen funktio $f := \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ on integroituva, koska monotonisen suppenemisen lauseen nojalla saadaan

$$\int_{(0,1)} f \, \mathrm{d}x = \int_{(0,1)} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \Big) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} a_n f_n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{(0,1)} f_n \, \mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n C < \infty.$$

Todetaan lopuksi, että aivan sama lasku antaa seuraavan tuloksen:

Lemma. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoot $\sum_{n=1}^{\infty}$ ei-negatiivinen suppeneva sarja (eli $a_n \ge 0$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$). Olkoot $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ mitallisia funktioita, joiden integraaleilla on tasainen raja (eli on olemassa vakio $C > 0$, jolle

$$\int_{\Omega} f_n \, \mathrm{d}\mu \le C \quad \text{kaikilla } n = 1,2,\dots.)$$

Tällöin funktio $f := \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ on integroituva, joten erityisesti se saa äärellisiä arvoja melkein kaikkialla.

Esitietoihin lukeutuvia tuloksia

1.

Lemma. Olkoon $f : (a,\infty) \to [0,\infty]$ laskeva. Tällöin on olemassa raja-arvo $\lim_{x\to a^+} f(x)$ laajennetussa (eli raja-arvo ääretön mukaanlukien) mielessä.

Todistus. Olkoon $f : (a,\infty) \to [0,\infty]$ laskeva. Osoitetaan, että raja-arvo $\lim_{x\to a^+} f(x)$ on olemassa. Huomataan, että joko $\{f(x) : x \in (a,\infty)\}$ on rajoitettu tai rajoittamaton. Tarkastellaan nämä tapaukset erikseen.

Oletetaan ensin, että $\{f(x) : x \in (a,\infty)\}$ on rajoittamaton. Osoitetaan, että $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$. Olkoon $M > 0$. Koska joukko $\{f(x) : x \in (a,\infty)\}$ on rajoittamaton, niin on olemassa $x_M \in (a,\infty)$), jolle $f(x_M) > M$. Olkoon $x \in (a, x_M)$ eli $a < x < x_M$. Koska f on laskeva, niin $f(x) \geq f(x_M) > M$. Näin ollaan osoitettu, että jokaisella $M > 0$ on olemassa x_M siten, että $f(x) > M$ kaikilla $a < x < x_M$, mikä tarkoittaa, että $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$.

Oletetaan sitten, että $\{f(x) : x \in (a,\infty)\}$ on rajoitettu. Osoitetaan, että $\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a,\infty)\}$. Merkitään $\sup\{f(x) : x \in (a,\infty)\} = b$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska luku b on joukon $\{f(x) : x \in (a,\infty)\}$ pienin yläraja, niin luku $b - \epsilon$ ei ole joukon yläraja. Täten on olemassa $x_\epsilon \in (a,\infty)$, jolle pätee $f(x_\epsilon) > b - \epsilon$. Olkoon $x \in (a, x_\epsilon)$ eli $a < x < x_\epsilon$. Koska f on laskeva, niin $f(x) \geq f(x_\epsilon) > b - \epsilon$. Koska b on joukon $\{f(x) : x \in (a,\infty)\}$ yläraja, niin $f(x) \leq b$. Kaikkiaan $|f(x) - b| \leq \epsilon$. Näin ollaan osoitettu, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa x_ϵ siten, että $|f(x) - b| < \epsilon$ kaikilla $a < x < x_\epsilon$, mikä tarkoittaa, että $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$. □

2.

Lemma. Olkoon $A \subseteq [-\infty,\infty]$. Olkoon b joukon A alaraja. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (Lähestyttävissä) Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$, jolle $a < b + \epsilon$.
- (Suurin alaraja) Jos c on joukon A alaraja, niin $c \leq b$.

Todistus. Oletetaan, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$, jolle $a < b + \epsilon$. Osoitetaan, että jos c on joukon A alaraja, niin $c \leq b$. Olkoon c joukon A alaraja. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin oletuksen nojalla on olemassa $a \in A$, jolle $a < b + \epsilon$. Koska c on joukon A alaraja, niin $c \leq a$. Kaikkiaan $c \leq a < b + \epsilon$. Näin ollen $c < b + \epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$, mistä seuraa, että $c \leq b$.

Oletetaan, että jokaiselle joukon A alarajalle c pätee $c \leq b$. Tämä tarkoittaa, että jos luvulle c pätee $c > b$, niin c ei ole joukon A alaraja. Osoitetaan, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $a \in A$, jolle $a < b + \epsilon$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $b + \epsilon > b$, niin oletuksen nojalla $b + \epsilon$ ei ole joukon A alaraja, joten on olemassa $a \in A$, jolle $a < b + \epsilon$. □