MITTA JA INTEGRAALI: HARJOITUS 5: ESIMERKKIRATKAISUT (VERSIO 1)

Kurssin luennoi Tuomas Hytönen ja laskuharjoituksia pitää Timo Hänninen.

Tehtävä 1. Olkoon $\mathcal{F}$ joukon Ω σ-algebra ja $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mitta. Määritellään uusi joukkokokoelma

$$\bar{\mathcal{F}} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : \text{on olemassa joukot } E, F \in \mathcal{F}, \text{ joilla } E \subseteq A \subseteq F \text{ ja } \mu(F \setminus E) = 0\}$$

ja joukkofunktio $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ siten, että $\bar{\mu}(A) := \mu(F)$ kun F on sellainen joukko kuin $\bar{\mathcal{F}}$:n määritelmässä. Osoita:

(a) $\bar{\mathcal{F}}$ on σ-algebra
(b) $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ on hyvin määritelty (eli että $\bar{\mu}(A)$ ei riipu F:n valinnasta) funktio ja μ on mitta.

Ratkaisu. Olkoon $\mathcal{F}$ Ω:n σ-algebra ja $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mitta. Todistetaan ensin, että $\bar{\mathcal{F}}$ on σ-algebra.

"$\varnothing \in \bar{\mathcal{F}}$." Koska $\mathcal{F}$ on σ-algebra, niin $\varnothing \in \mathcal{F}$. Koska μ on mitta, niin $\mu(\varnothing) = 0$. Huomataan, että $\mathcal{F} \ni \varnothing \subseteq \varnothing \subseteq \varnothing \in \mathcal{F}$ ja $\mu(\varnothing \setminus \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$, joten $\varnothing \in \bar{\mathcal{F}}$.

"Jos $A \in \bar{\mathcal{F}}$, niin $A^c \in \bar{\mathcal{F}}$." Olkoon $A \in \bar{\mathcal{F}}$. Täten on olemassa joukot $E, F \in \mathcal{F}$, joille $E \subseteq A \subseteq F$ ja $\mu(F \setminus E) = 0$. Koska $E \subseteq A \subseteq F$, niin komplementin määritelmän nojalla $F^c \subseteq A^c \subseteq E^c$ [1] Koska $\mathcal{F}$ on σ-algebra, niin tosiasiasta $E, F \in \mathcal{F}$ seuraa, että $E^c, F^c \in \mathcal{F}$. Huomaa, että komplementin määritelmän nojalla pätee [2] $F \setminus E = E^c \setminus F^c$.

Siis kaikkiaan joukoille $E^c, F^c \in \mathcal{F}$ pätee $F^c \subseteq A^c \subseteq E^c$ ja $\mu(E^c \setminus F^c) = \mu(F \setminus E) = 0$, joten $A^c \in \bar{\mathcal{F}}$.

"Jos $A_i \in \bar{\mathcal{F}}$, niin $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \bar{\mathcal{F}}$." Olkoon $A_i \in \bar{\mathcal{F}}$ kun $i = 1, 2, \ldots$. Täten on olemassa joukot $E_i, F_i \in \mathcal{F}$ siten, että $E_i \subseteq A_i \subseteq F_i$ ja $\mu(F_i \setminus E_i) = 0$. Koska $\mathcal{F}$ on σ-algebra, niin $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \mathcal{F}$ ja $\bigcup_{i=1}^\infty F_i \in \mathcal{F}$. Yhdisteen määritelmän nojalla $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty F_i$ [3]. Lasketaan seuraavaksi joukon $\big(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\big) \setminus \big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\big)$ mitta. Huomataan, että

$$\Big(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big) = \bigcup_{i=1}^\infty \Big(F_i \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big)\Big) \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty F_i \setminus E_i.$$

Täten

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^\infty F_i\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big)\Big) &\le \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty F_i \setminus E_i\Big) && \text{mitan monotonisuus} \\
&\le \sum_{i=1}^\infty \mu(F_i \setminus E_i) && \text{mitan subadditiivisuus} \\
&= \sum_{i=1}^\infty 0 && \mu(F_i \setminus E_i) = 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Siis kaikkiaan joukoille $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$ pätee, että $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ja $\mu\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big) \setminus \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\big)\Big) = 0$, joten $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bar{\mathcal{F}}$.

Todistetaan seuraavaksi, että $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ on hyvin määritelty funktio, joka on mitta.

"Funktio $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ on hyvin määritelty." On osoitettava, että luku $\bar{\mu}(A)$ määräytyy yksikäsitteisesti, kun on annettu joukko $A \in \bar{\mathcal{F}}$ (koska määritelmän mukaan funktio on sääntö, joka liittää jokaiseen lähtöjoukon alkioon yksikäsitteisen maalijoukon alkion). Olkoon $A \in \bar{\mathcal{F}}$. Tällöin on olemassa $E, F \in \mathcal{F}$ siten, että $E \subseteq A \subseteq F$ ja $\mu(F \setminus E) = 0$. Oletetaan, että on olemassa myös toiset $E', F' \in \mathcal{F}$ siten, että $E' \subseteq A \subseteq F'$ ja $\mu(F' \setminus E') = 0$. On osoitettava, että $\mu(F) = \mu(F')$, jolloin voidaan yksikäsitteisesti määritellä $\bar{\mu}(A) \coloneqq \mu(F)$. Huomataan ensin, että $\mu(F) = \mu(E)$, koska

$$\mu(F) = \mu((F \setminus E) \cup E) = \mu(F \setminus E) + \mu(E) = 0 + \mu(E) = \mu(E).$$

Samaan tapaan saadaan $\mu(F') = \mu(E')$. Koska $E \subseteq A$ ja $A \subseteq F'$, niin $E \subseteq F'$, joten mitan monotonisuuden nojalla $\mu(E) \le \mu(F')$. Samaan tapaan saadaan, että $\mu(E') \le \mu(F)$. Kaikkiaan ollaan saatu, että

$$\mu(E) \le \mu(F') = \mu(E') \le \mu(F) = \mu(E),$$

joten $\mu(F) = \mu(F')$.

"Funktio $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ on mitta." Osoitetaan ensin, että $A \in \bar{\mathcal{F}}$ ja $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ mikäli $A \in \mathcal{F}$. Olkoon $A \in \mathcal{F}$. Tällöin $A \subseteq A \subseteq A$ ja $\mu(A \setminus A) = \mu(\varnothing) = 0$. Näin ollen $\bar{\mathcal{F}}$:n määritelmän nojalla $A \in \bar{\mathcal{F}}$ ja $\bar{\mu}$:n määritelmän nojalla $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$.

Osoitetaan sitten mitan määritelmän edellyttämät ominaisuudet.

"$\bar{\mu}(\varnothing) = 0$." Koska $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ kun $A \in \mathcal{F}$, niin erityisesti joukolle $\varnothing \in \mathcal{F}$ pätee $\bar{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$.

"Jos $A_i \in \bar{\mathcal{F}}$ erillisiä, niin $\bar{\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i)$." Olkoot $A_i \in \bar{\mathcal{F}}$ erillisiä. Koska $A_i \in \bar{\mathcal{F}}$, niin on olemassa $E_i, F_i \in \mathcal{F}$ siten, että $E_i \subseteq A_i \subseteq F_i$ ja $\mu(F_i \setminus E_i) = 0$. Kuten kohdassa "Jos $A_i \in \bar{\mathcal{F}}$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bar{\mathcal{F}}$." huomataan, että joukoille $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$ pätee, että $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ja $\mu\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big) \setminus \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\big)\Big) = 0$. Täten funktion $\bar{\mu}$ määritelmän perusteella

$$\bar{\mu}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \coloneqq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big).$$

Lisäksi funktion $\bar{\mu}$ määritelmän perusteella $\bar{\mu}(A_i) = \mu(F_i)$. Huomataan, että koska $E_i \subseteq A_i$, niin siitä, että A_i ovat erillisiä seuraa, että E_i ovat erillisiä [4] Arvioidaan alhaalta ja ylhäältä. Toisaalta mitan monotonisuuden, mitan täysadditiivisuuden ja havainnon $\mu(F_i) = \mu(F_i \setminus E_i) + \mu(E_i) = \mu(E_i)$ nojalla pätee

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) \ge \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i).$$

Toisaalta mitan subadditiivisuuden nojalla pätee

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i).$$

Yhdistämällä arviot saadaan $\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$. Kaikkiaan ollaan todettu, että

$$\bar{\mu}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i).$$

Tehtävä 2. Mitta-avaruutta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sanotaan *täydelliseksi*, jos $\mathcal{F}$ sisältää kaikki nollamittaisten joukkojen osajoukot eli mikäli pätee: Jos $E \in \mathcal{F}$, $\mu(E) = 0$ ja $F \subseteq E$, niin myös $F \in \mathcal{F}$.

(a) Osoita, että edellisessä tehtävässä määritelty mitta-avaruus $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ (jota kutsutaan mitta-avaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *täydellistymäksi*) on täydellinen.

(b) Anna esimerkki mitta-avaruudesta, joka ei ole täydellinen, ja määritä sen täydellistymä.

Ratkaisu. "Mitta-avaruus $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ on täydellinen. " Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Määritellään mitta-avaruus $(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mu})$ kuten Tehtävässä 1. Osoitetaan, että tämä mitta-avaruus on täydellinen.

Olkoon $A \in \bar{\mathcal{F}}$. Tämä tarkoittaa, että on olemassa joukot $E, F \in \mathcal{F}$, joille pätee $E \subseteq A \subseteq F$ ja $\mu(F \setminus E) = 0$. Oletetaan, että $\bar{\mu}(A) = 0$. Tämä tarkoittaa, että $\bar{\mu}(A) := \mu(F) = 0$. Olkoon $B \subseteq A$. Osoitetaan, että $B \in \bar{\mathcal{F}}$. Koska $B \subseteq A$ ja $A \subseteq F$, niin pätee $\varnothing \subseteq B \subseteq F$. Huomataan, että oletuksen nojalla pätee, että $\mu(F \setminus \varnothing) = \mu(F) = 0$.

Siis kaikkiaan joukoille $\varnothing, F \in \mathcal{F}$ pätee, että $\varnothing \subseteq B \subseteq F$ ja $\mu(F \setminus \varnothing) = 0$. Täten $\bar{\mathcal{F}}$:n määritelmän nojalla $B \in \bar{\mathcal{F}}$.

"Esimerkki ei-täydellisestä mitta-avaruudesta ja sen täydellistymän määrittäminen." Olkoon $\Omega := \{1, 2\}$, $\mathcal{F} := \{\Omega, \varnothing\}$ (karkein mahdollinen σ-algebra) ja määritellään mitta $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ asettamalla $\mu(\Omega) := 0$ ja $\mu(\varnothing = 0)$. Tämä on mitta, sillä $\mu(\varnothing) = 0$ ja μ on täysadditiivinen, koska

$$\mu(\Omega \cup \varnothing) = \mu(\Omega) = 0 = 0 + 0 = \mu(\varnothing) + \mu(\Omega).$$

Tässä mitta-avaruudessa jokainen nollamittaisen mitallisen joukon osajoukko ei ole mitallinen, joten määritelmän mukaisesti tämä mitta-avaruus on ei-täydellinen: Joukko Ω on mitallinen nollamittainen joukko (eli $\Omega \in \mathcal{F}$ ja $\mu(\Omega) = 0$) mutta joukko $\{1\}$ ei ole mitallinen (eli $\{1\} \notin \mathcal{F}$) vaikka se on nollamittaisen mitallisen joukon Ω osa-joukko (sillä $\{1\} \subseteq \Omega := \{1, 2\}$).

Aikaisemman kohdan perusteella tiedetään, että $\bar{\mathcal{F}}$ sisältää kaikki nollamittaisten mitallisten joukkojen osajoukot ja lisäksi Tehtävän 1 ratkaisun perusteella $\mathcal{F} \subseteq \bar{\mathcal{F}}$. Näin ollen $\{1\}, \{2\} \in \bar{\mathcal{F}}$ ja $\{1, 2\}, \varnothing \in \bar{\mathcal{F}}$. Siten $\bar{\mathcal{F}}$ sisältää kaikki joukon Ω osajoukot eli $\mathcal{P}(\Omega) := \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \subseteq \bar{\mathcal{F}}$. Toisaalta on selvää, että $\bar{\mathcal{F}}$ on määritelmänsä nojalla kaikkien Ω:n osajoukkojen muodostaman kokoelman osakokoelma eli $\bar{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Kaikkiaan siis $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Huomio. Tämä sama päättely todistaa seuraavan huomion: Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus, jolle $\mu(\Omega) = 0$. Tällöin $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Tehtävä 3. Olkoot f_n ja g mitallisia funktioita. Osoita kummassakin kohdassa, että kaksi annettua väitettä ovat keskenään yhtäpitäviä:

(a) "Kaikilla n pätee, että $|f_n| \leq g$ melkein kaikkialla." ja "Melkein kaikkialla pätee, että $|f_n| \leq g$ kaikilla n."

(b) "Kaikilla n pätee, että $f_n \leq f_{n+1}$ melkein kaikkialla." ja "Melkein kaikkialla pätee, että $f_n \leq f_{n+1}$ kaikilla n."

Ratkaisu. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Muistetaan määritelmä:

Määritelmä (Melkein kaikkialla)**.** Sanotaan, että *ominaisuus* $P(x)$ *pätee melkein kaikilla* $x \in \Omega$ tai *ominaisuus* P *pätee melkein kaikkialla* jos ominaisuus pätee kaikkialla nollamittaista poikkeusjoukkoa lukuunottamatta, millä tarkoitetaan, että on olemassa nollamittainen poikkeusjoukko N (eli $N \in \mathcal{F}$, jolle $\mu(N) = 0$) siten, että $P(x)$ pätee kaikilla $x \in (\Omega \setminus N) =: N^c$.

Huomio. *Ominaisuuden P päteminen pisteessä x* mielletään niin, että tarkastelemme jotakin tiettyä väitettä, joka koskee pistettä x, ja sanomme, että ominaisuus P pätee pisteessä x täsmälleen silloin, kun tämä väite on tosi. Esimerkiksi arvio $|f_n| \le g$ pätee pisteessä x täsmälleen silloin, kun arvio $|f_n(x)| \le g(x)$ on tosi.

Tehtävänannon väitteiden ero on siinä, riippuuko poikkeusjoukko indeksistä n vai onko poikkeusjoukko indeksistä n riippumaton. Olennainen havainto väitteiden yhtäpitävyyden osoittamiseksi on, että nollamittaisten joukkojen numeroituva yhdiste on edelleen nollamittainen: Jos $N_n \in \mathcal{F}$ ja $\mu(N_n) = 0$ kun $n = 1, 2, \ldots$, niin mitan subadditiivisuuden nojalla pätee

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Todistetaan seuraavaksi tehtävänannon väitteiden yhtäpitävyys seikkaperäisesti. Sekä kohdan (a) että kohdan (b) väitteiden yhtäpitävyyden todistus on olennaisesti sama ja yhtäpitävyys voitaisiinkin nähdä erityistapauksena yleisemmästä tapauksesta [5]. Todistetaan kuitenkin kumpikin kohta erikseen.

"Väite "Kaikilla n pätee, että $|f_n| \le g$ melkein kaikkialla." ja väite "Melkein kaikkialla pätee, että $|f_n| \le g$ kaikilla n." ovat yhtäpitäviä."

Kaikilla n pätee, että $|f_n| \le g$ melkein kaikkialla.

$\iff$ Kullakin $n = 1, 2, \ldots$ on olemassa nollamittainen (mahdollisesti n:stä riippuva) joukko N_n siten, että $|f_n(x)| \le g(x)$ kaikilla $x \in N_n^c$.

Määritellään $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Huomaa, että N on nollamittainen. Jos $x \in N^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} N_n^c$, niin erityisesti $x \in N_n^c$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, mistä seuraa, että $|f_n(x)| \le g(x)$. Täten:

$\iff$ On olemassa nollamittainen (n:stä riippumaton) joukko N siten, että kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ pätee, että $|f_n| \le g$ kaikilla $x \in N^c$.

$\iff$ On olemassa nollamittainen joukko N siten, että $|f_n(x)| \le g(x)$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ kaikilla $x \in N^c$.

$\iff$ Melkein kaikkialla pätee, että $|f_n| \le g$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

"Väite "Kaikilla n pätee, että $f_n \le f_{n+1}$ melkein kaikkialla." ja väite "Melkein kaikkialla pätee, että $f_n \le f_{n+1}$ kaikilla n." ovat yhtäpitäviä."

Kaikilla n pätee, että $f_n \le f_{n+1}$ melkein kaikkialla.

$\iff$ Kullakin $n = 1, 2, \ldots$ on olemassa nollamittainen (mahdollisesti n:stä riippuva) joukko N_n siten, että $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ kaikilla $x \in N_n^c$.

Määritellään $N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Huomaa, että N on nollamittainen. Jos $x \in N^c$, niin erityisesti jokaisella $n = 1, 2, \ldots$ pätee $x \in N_n^c$, mistä seuraa, että $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$. Täten:

$\iff$ On olemassa nollamittainen (n:stä riippumaton) joukko N siten, että kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ pätee, että $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ kaikilla $x \in N^c$.

$\iff$ On olemassa nollamittainen joukko N siten, että $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ kaikilla $x \in N^c$.

$\iff$ Melkein kaikkialla pätee, että $f_n \le f_{n+1}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

Tehtävä 4. Todista dominoidun suppenemisen ja monotonisen suppenemisen lauseista versio, jossa lauseiden ehdot oletetaan melkein kaikkialla:

(a) Olkoot $f_n, f, g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ integroituvia. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ melkein kaikkialla ja $|f_n| \leq g$ melkein kaikkialla. Tällöin
$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

(b) Olkoot $f_n, g : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ melkein kaikkialla ja jokaisella $n = 1, 2, \ldots$ pätee, että $f_n \leq f_{n+1}$ melkein kaikkialla. Tällöin
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ratkaisu. Muistutetaan mieliin, kuinka integraali avaruuden mitallisen osajoukon yli määritellään:

Määritelmä (Integraali mitallisen osajoukon yli)**.** Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ integroituva. Olkoon $A \subseteq \Omega$ mitallinen joukko. Määritellään
$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega (1_A f) \,\mathrm{d}\mu.$$

Todistetaan ensin aputuloksena, että integroituvan funktion integraali ei riipu nollamittaisesta joukosta:

Lemma. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ integroituva funktio. Olkoon N nollamittainen joukko (eli $N \in \mathcal{F}$ ja $\mu(N) = 0$). Tällöin
$$\int_N f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Todistus. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ integroituva (eli $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on mitallinen ja $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$). Tällöin on olemassa yksinkertaiset mitalliset funktiot $s_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ siten, että $\sup_n |s_n|$ on integroituva ja $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ kaikkialla.

Olkoon N nollamittainen joukko. Tällöin funktio $f 1_N$ on integroituva, sillä:

- Se on mitallinen, koska se on mitallisten funktioiden $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ja $1_N : \Omega \to \mathbb{R}$ tulo [6].
- Se on integroituva, koska pätee arvio $|f 1_N| \leq |f|$, joten
$$\int |f 1_N| \,\mathrm{d}\mu \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Huomataan, että $\lim_{n\to\infty} (1_N s_n) = 1_N \lim_{n\to\infty} s_n = 1_N f$ ja $\sup_n |(1_N s_n)|$ on integroituva, koska $\sup_n |(1_N s_n)| \leq \sup_n |s_n|$. Täten integraalin määritelmän nojalla pätee:
$$\int_\Omega (1_N f) \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (1_N s_n) \,\mathrm{d}\mu.$$

Osoitetaan seuraavaksi, että yksinkertaisen integroituvan funktion s_n integraali nollamittaisen joukon yli on nolla. Olkoon s yksinkertainen integroituva funktio eli $s = \sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k}$ missä $\{A_k\}_{k=1}^K$ on Ω:n mitallinen ositus ja lisäksi pätee, että $\int_\Omega |s| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ (mikä on yhtäpitävää sen vaatimuksen kanssa, että $a_k = \vec{0}$ mikäli $\mu(A_k) = \infty$). Todetaan seuraavaksi, että $\int_\Omega (s 1_N) \,\mathrm{d}\mu = 0$. Tämän toteamiseksi on monta tapaa: Esimerkiksi voidaan laskea
$$|\int_\Omega (s 1_N) \,\mathrm{d}\mu| \leq \int_\Omega |s| 1_N \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \infty \cdot 1_N \,\mathrm{d}\mu = \infty \cdot \int_\Omega 1_N \,\mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(N) = \infty \cdot 0 = 0$$

tai vaihtoehtoisesti voidaan laskea (käyttämällä yhtälöitä $1_{A_k}1_N = 1_{A_k\cap N}$ ja $\mu(A_k\cap N) \le \mu(N) = 0$)

$$\int_\Omega (s1_N)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k}\Big)1_N\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^K a_k 1_{A_k\cap N}\Big)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^K a_k\mu(A_k\cap N) = 0.$$

Joka tapauksessa saadaan, että $\int_\Omega (s1_N)\,\mathrm{d}\mu = 0$. Kaikkiaan ollaan saatu

$$\int_N f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega 1_N s_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

□

"Dominoidun suppenemisen lauseen melkein kaikkialla-versio." Olkoot $f_n, f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integroituvia. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ melkein kaikkialla ja $|f_n| \le g$ melkein kaikkialla. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Oletusten nojalla on olemassa nollamittainen poikkeusjoukko N_∞ siten, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kaikilla $x \in N_\infty^c$ ja jokaisella $n = 1,2,\ldots$ on olemassa nollamittainen poikkeusjoukko N_n siten, että $|f_n(x)| \le g(x)$ kaikilla $x \in N_n^c$. Määritellään poikkeusjoukko

$$N := N_\infty \cup \bigcup_{n=1}^\infty N_n.$$

Tälle joukolle pätee $\mu(N) = 0$, koska $\mu(N) = \mu\big(N_\infty \cup \bigcup_{n=1}^\infty N_n\big) \le \mu(N_\infty) + \sum_{n=1}^\infty \mu(N_n) = 0$. Koska $N^c \subseteq N_n^c$ kaikilla $n = 1,2,\ldots$ ja $N^c \subseteq N_\infty$, niin pätee

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ ja } |f_n(x)| \le g(x) \text{ kaikilla } x \in N^c.$$

Huomataan, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kaikilla $x \in N^c$ täsmälleen silloin, kun $\lim_{n\to\infty} 1_{N^c}(x)f_n(x) = 1_{N^c}(x)f(x)$ kaikilla $x \in \Omega$. Tämä huomio [7] perustuu indikaattorin määritelmään, jonka mukaan

$$1_{N^c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in N^c, \\ 0 & \text{kun } x \notin N^c. \end{cases}$$

Samaan tapaan huomataan, että $|f_n(x)| \le g(x)$ kaikilla $x \in N^c$ täsmälleen silloin, kun $|1_{N^c}(x)f_n(x)| \le 1_{N^c}(x)g(x)$ kaikilla $x \in \Omega$. Näin ollen ollaan saatu, että:

- $\lim_{n\to\infty} 1_{N^c}f_n = 1_{N^c}f$ kaikkialla.
- $|1_{N^c}f_n| \le 1_{N^c}g$ kaikkialla.

Lisäksi kukin funktioista $1_{N^c}f_n$, $1_{N^c}g$, ja $1_{N^c}f$ on integroituva, sillä kukin on kahden mitallisen funktion tulo ja täten mitallinen sekä lisäksi kunkin itseisarvon integraali on äärellinen arvioiden $|1_{N^c}f_n| \le |f_n|$, $|1_{N^c}g| \le |g|$ ja $|1_{N^c}f| \le |f|$ perusteella.

Muistutetaan mieliin dominoidun konvergenssin lause:

Lemma (Dominoidun suppenemisen lause)**.** Olkoot $f_n, f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integroituvia. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ kaikkialla ja $|f_n| \le g$ kaikkialla. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Soveltamalla tätä funktioihin $1_{N^c} f_n$, $1_{N^c} g$, ja $1_{N^c} f$ saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |1_{N^c} f_n - 1_{N^c} f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Huomataan (muistaen merkinnän $N^c := \Omega \setminus N$ ja merkinnän $\int_A := \int_\Omega 1_A$), että

$$\int_\Omega |1_{N^c} f_n - 1_{N^c} f| \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega 1_{N^c} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega\setminus N} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Apulauseen nojalla integraali nollamittaisen joukon yli on nolla, joten $\int_N |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$, mistä seuraa, että

$$\int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega\setminus N} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu + \underbrace{\int_N |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu}_{=0} = \int_{\Omega\setminus N} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Siis $\int_\Omega |1_{N^c} f_n - 1_{N^c} f| \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu$, joten kaikkiaan ollaan saatu, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0,$$

mikä oli todistettava.

"Monotonisen suppenemisen melkein kaikkialla-versio" Olkoot $f_n, f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ melkein kaikkialla ja jokaisella $n = 1, 2, \dots$ pätee, että $f_n \le f_{n+1}$ melkein kaikkialla. Osoitetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Samaan tapaan kuin dominoidun suppenemisen lauseen melkein kaikkialla-version todistuksessa saadaan, että oletusten nojalla on olemassa nollamittainen joukko N siten, että $\lim_{n\to\infty} 1_{N^c} f_n = 1_{N^c} f$ kaikkialla ja jokaisella $n = 1, 2, \dots$ pätee, että $1_{N^c} f_n \le 1_{N^c} f_{n+1}$ kaikkialla. Muistutetaan mieliin monotonisen suppenemisen lause:

Lemma (Monotonisen suppenemisen lause)**.** Olkoot $f_n, f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ kaikkialla ja jokaisella $n = 1, 2, \dots$ pätee, että $f_n \le f_{n+1}$ kaikkialla. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu,$$

Soveltamalla funktioihin $1_{N^c} f_n$ ja $1_{N^c} f$ tätä monotonisen suppenemisen lausetta saadaan, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{N^c} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int 1_{N^c} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Apulauseen nojalla integraali nollamittaisen joukon yli on nolla, joten $\int_N f_n \, \mathrm{d}\mu = 0$ ja $\int 1_N f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Täten

$$\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{N^c} f_n \, \mathrm{d}\mu + \int_N f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{N^c} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega 1_{N^c} f_n \, \mathrm{d}\mu$$

ja samaten $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega 1_{N^c} f \, \mathrm{d}\mu$. Kaikkiaan ollaan saatu, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{N^c} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int 1_{N^c} f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu,$$

mikä oli todistettava.

Tehtävä 5. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ integroituva funktio. Todista seuraavat väittämät käyttämällä pelkästään positiivisten funktioiden ja yksinkertaisten $\mathbb{R}^d$-arvoisten funktioiden integrointiteoriaa.

(a) On olemassa jono yksinkertaisia funktioita $s_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, jolle $\|s_n - f\|_{L^1} \to 0$.

(b) Jos s_n on mikä tahansa edellisen kohdan mukainen jono, niin integraalit $\int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu$ muodostavat Cauchyn jonon.
(Täten integraalit $\int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu$ suppenevat eli raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu$ on olemassa, sillä avaruus $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ on täydellinen, mikä tarkoittaa, että jokainen Cauchyn jono suppenee.)

(c) Raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu$ ei riipu valitusta jonosta, kunhan jono on edellisten kohtien mukainen.
(Täten on mielekästä määritellä integraali $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ asettamalla

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu.)$$

Ratkaisu. "On olemassa jono yksinkertaisia funktioita $s_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, jolle $\|s_n - f\|_{L^1} \to 0$." Tiedetään, että on olemassa mitalliset yksinkertaiset funktiot $s_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ siten, että $|s_n| \leq |f|$ ja $\lim_{n\to\infty} s_n = f$. Tällaiset funktiot voidaan rakentaa tarkastelemalla kutakin komponenttia ja kunkin komponentin positiivista ja negatiivista osaa erikseen, kuten on tehty luentomuistiinpanoissa Lauseen 7.14 todistuksessa. Vaihtoehtoisesti tällaiset funktiot voidaan rakentaa komponenttivapaalla tarkastelulla [8] Huomataan, että kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$|s_n - f| \leq |s_n| + |f| \leq |f| + |f| \leq 2|f|.$$

Siten funktioilla $|s_n - f|$ on dominoiva integroituva funktio $2|f|$. Muistetaan, että $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ tarkoittaa, että $\lim_{n\to\infty} |s_n - f| = 0$. Muistetaan, että L^1-normi on määritelty asettamalla $\|g\|_{L^1} := \int_\Omega |g| \,\mathrm{d}\mu$. Käyttämällä dominoidun suppenemisen lausetta (voidaan käyttää sen versiota, joka pohjautuu pelkästään ei-negatiivisten funktioiden integrointiteoriaan) saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_{L^1} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |s_n - f| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |s_n - f| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega 0 \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Huomaa, että dominoidun konvergenssin lauseen seuraava versio voidaan todistaa käyttämällä pelkästään positiivisten funktioiden integrointiteoriaa:

Lemma (Dominoidun suppenemisen lause, versio ei-negatiivisille funktioille)**.** Olkoon $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia, joille $\lim_{n\to} f_n = 0$. Olkoon $g : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen funktio, jolle pätee $f_n \leq g$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Tällöin pätee

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Todistus (aivan kuten luentomuistiinpanoissa). Olkoon $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia, joille $\lim_{n\to} f_n = 0$. Olkoon $g : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen funktio, jolle pätee $f_n \leq g$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Tällöin $g + f_n \geq 0$ ja $g - f_n \geq 0$. Huomaa, että

$$\int_\Omega (g - f) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f,$$

koska

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g - f \,\mathrm{d}\mu. \\
\iff & \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (g - f) \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu. \\
\iff & \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega ((g - f) + f) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Käyttämällä Fatoun lemmaa saadaan, että

$$\begin{aligned}\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)\,\mathrm{d}\mu\\ &\le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega (g-f_n)\,\mathrm{d}\mu\\ &= \liminf_{n\to\infty}\Big(\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu\Big)\\ &= \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

joten

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu \le 0.$$

Samaan tapaan käyttämällä Fatoun lemmaa saadaan, että

$$\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty}(g+f_n)\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu + \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu,$$

joten

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Kaikkiaan ollaan saatu, että

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu \le \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu \le 0,$$

joten $0 = \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu = \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu = 0$. □

"Jos s_n on mikä tahansa edellisen kohdan mukainen jono, niin integraalit $\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu$ muodostavat Cauchyn jonon." Tehdään arvio:

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega s_m\,\mathrm{d}\mu\Big| &= \Big|\int_\Omega (s_n-s_m)\,\mathrm{d}\mu\Big|\\ &\le \int_\Omega |s_n-s_m|\,\mathrm{d}\mu\\ &\le \int_\Omega (|s_n-f|+|f-s_m|)\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_\Omega |s_n-f|\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |s_m-f|\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Tästä arviosta ja oletuksesta $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |s_n-f|\,\mathrm{d}\mu = 0$ seuraa, että $\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu$ on Cauchyn jono:

- Cauchyn jonon määritelmän mukaan jono $\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu$ on Cauchyn jono täsmälleen silloin, kun jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa N siten, että $\big|\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega s_m\,\mathrm{d}\mu\big| < \epsilon$ mikäli $n, m \ge N$.
- Koska $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |s_n-f|\,\mathrm{d}\mu = 0$, niin raja-arvon määritelmän nojalla jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa N siten, että $\int_\Omega |s_n-f|\,\mathrm{d}\mu < \epsilon$ mikäli $n \ge N$.
- Yhdistämällä tämä ja tehty arvio saadaan, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa N siten, että

  $$\Big|\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega s_m\,\mathrm{d}\mu\Big| \le \int_\Omega |s_n-f|\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |s_m-f|\,\mathrm{d}\mu < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

  mikäli $n, m \ge N$, mikä tarkoittaa, että jono $\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu$ on Cauchyn jono, sillä Cauchyn jonon määritelmä on riippumaton määritelmän arviossa esiintyvästä vakiosta [9].

"Raja-arvo $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega s_n\,\mathrm{d}\mu$ ei riipu valitusta jonosta, kunhan jono on edellisten kohtien mukainen." Oletetaan, että s_n ja t_n ovat yksinkertaisia integroituvia funktioita, joille $\lim_{n\to\infty}\int|f-s_n|\,\mathrm{d}\mu=0$ ja $\lim_{n\to\infty}\int|f-t_n|\,\mathrm{d}\mu=0$. Edellisen kohdan nojalla tällöin $\int s_n\,\mathrm{d}\mu$ ja $\int t_n\,\mathrm{d}\mu$ ovat kumpikin Cauchyn jonoja avaruudessa $(\mathbb{R}^d,|\cdot|)$, joten ne suppenevat, koska avaruus $(\mathbb{R}^d,|\cdot|)$ on täydellinen. Osoitetaan, että molempien jonojen raja-arvot yhtyvät. Lasketaan:

$$
\begin{aligned}
&|\lim_{n\to\infty}\int s_n\,\mathrm{d}\mu-\lim_{n\to\infty}\int t_n\,\mathrm{d}\mu| && \\
&=|\lim_{n\to\infty}\Big(\int s_n\,\mathrm{d}\mu-\int t_n\,\mathrm{d}\mu\Big)| && \text{raja-arvon laskusääntö}\\
&=|\lim_{n\to\infty}\int (s_n-t_n)\,\mathrm{d}\mu| && \text{integraalin lineaarisuus}\\
&=\lim_{n\to\infty}\Big|\int (s_n-t_n)\,\mathrm{d}\mu\Big| && \text{funktion } \mathbb{R}^d\ni x\mapsto|x|\in\mathbb{R} \text{ jatkuvuus}\\
&\le\lim_{n\to\infty}\int |s_n-t_n|\,\mathrm{d}\mu && \text{arvio } |\int s\,\mathrm{d}\mu|\le\int|s|\,\mathrm{d}\mu\\
&\le\lim_{n\to\infty}\Big(\int |s_n-f|\,\mathrm{d}\mu+\int|f-t_n|\,\mathrm{d}\mu\Big) && \text{kolmioepäyhtälö}\\
&=\lim_{n\to\infty}\int |s_n-f|\,\mathrm{d}\mu+\lim_{n\to\infty}\int|t_n-f| && \text{raja-arvon laskusääntö}\\
&=0+0 && \text{oletus}
\end{aligned}
$$

Siis $\lim_{n\to\infty}\int s_n\,\mathrm{d}\mu-\lim_{n\to\infty}\int t_n\,\mathrm{d}\mu=0$ eli

$$\lim_{n\to\infty}\int s_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int t_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Tehtävä 6. Olkoon $f:(a,b)\times\Omega\to\mathbb{R}$ kahden muuttujan funktio. Oletetaan:

- Kaikilla $t\in(a,b)$ funktio $x\mapsto f(t,x)$ on integroituva.
- Kaikilla $x\in\Omega$ funktio $t\mapsto f(t,x)$ on derivoituva.
  (Merkitään sen derivaattaa pisteessä t merkinnällä $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$.)
- Funktio $x\mapsto\sup_{t\in(a,b)}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|$ on integroituva.

Osoita, että

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Ratkaisu. Kiinnitetään piste $t\in(a,b)$. Tutkitaan funktion $t\mapsto\int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ erotusosamäärää tässä pisteessä. Derivaatan määritelmän nojalla

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{h\to0}\frac{\int_\Omega f(t+h,x)\,\mathrm{d}\mu(x)-\int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{h},$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Oletuksen nojalla funktio $t\mapsto f(t,x)$ on derivoituva. Derivaatan määritelmän nojalla

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\lim_{h\to0}\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}.$$

Näin ollen tehtävänantona on osoittaa, että

$$\lim_{h\to0}\frac{\int_\Omega f(t+h,x)\,\mathrm{d}\mu(x)-\int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{h}=\int_\Omega\lim_{h\to0}\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

On siis odotettavissa, että rajankäynnin ja integroinnin järjestystä pitää vaihtaa. Koska rajankäynnin ja integroinnin järjestyksen vaihtamiseksi on kriteereitä, kun rajankäynti on jonoa pitkin, niin palautetaan rajankäynti reaalilukuja pitkin rajankäynniksi jonoa pitkin:

Lemma (Reaalimuuttujan funktion raja-arvo suppenevien jonojen avulla)**.** Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- $$\lim_{t \to t_0} g(t) = b.$$
- Jokaiselle jonolle t_n, jolle $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$, pätee
$$\lim_{n\to\infty} g(t_n) = b.$$

Näin ollen on siis osoitettava, että mielivaltaisella jonolla h_n, jolle $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, pätee:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_\Omega f(t+h_n,x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{h_n} = \int_\Omega \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h,x) - f(t,x)}{h}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Tarkastellaan erotusosamäärää. Olkoon $h > 0$. Integraalin lineaarisuuden nojalla pätee

$$\frac{\int_\Omega f(t+h,x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{h} = \int_\Omega \frac{f(t+h,x) - f(t,x)}{h}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Tarkastellaan integroitavaa lauseketta kiinteässä pisteessä. Kiinnitetään $x \in \Omega$. Oletuksen nojalla funktio $t \mapsto f(t,x)$ on derivoituva. (Merkitään sen derivaattaa $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$.) Täten differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $s \in (a,b)$, jolle $|t-s| \le h$, siten, että $\frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial t}(s,x)$. Näin ollen saadaan arvio:

$$\Big|\frac{f(t+h,x) - f(t,x)}{h}\Big| = \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(s,x)\Big| \le \sup_{u\in(a,b)} \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(u,x)\Big|.$$

Oletuksen nojalla funktio $x \mapsto \sup_{t\in(a,b)} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|$ on integroituva. Näin ollen funktioille

$$F_h(x) := \Big|\frac{f(t+h,x) - f(t,x)}{h}\Big|, \text{ kun } h > 0,$$

on löydetty dominoiva integroituva funktio

$$G(x) := \sup_{u\in(a,b)} \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(u,x)\Big|.$$

Tarkastellaan nyt raja-arvoa jonojen avulla. Olkoon h_n reaalilukujono, jolle $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Aikaisemmin todettiin, että $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \lim_{h\to 0} F_h(t,x)$, joten erityisesti

$$\lim_{n\to\infty} F_{h_n}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x).$$

Lisäksi aikaisemmin todettiin, että $|F_h| \le G$ kaikilla $h > 0$, joten erityisesti

$$|F_{h_n}| \le G \quad \text{kaikilla } n = 1,2,\ldots.$$

Todettiin myös, että G on integroituva. Näin ollen aikaisemmin todetun yhtäsuuruuden ja dominoidun suppenemisen lauseen perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\int_\Omega f(t+h_h,x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)}{h_h} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{f(t+h_n,x)-f(t,x)}{h_n}\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega F_{h_n}(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} F_{h_n}(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

Ylimääräisiä huomioita ja esitietoihin lukeutuvia välivaiheita

1. "$A \subseteq B$ jos ja vain jos $B^c \subseteq A^c$."

$$\begin{aligned}
&A \subseteq B. \\
\iff &\text{Jos } x \in A, \text{ niin } x \in B. \\
\iff &\text{Jos } x \notin B, \text{ niin } x \notin A. \\
\iff &\text{Jos } x \in B^c, \text{ niin } x \in A^c. \\
\iff &B^c \subseteq A^c.
\end{aligned}$$

2. "$F \setminus E = E^c \setminus F^c$."

$$\begin{aligned}
&x \in F \setminus E \\
\iff &x \in F \text{ ja } x \notin E \\
\iff &x \notin F^c \text{ ja } x \in E^c \\
\iff &x \in E^c \setminus F^c.
\end{aligned}$$

3. "Jos $A_i \subseteq B_i$ kaikilla $i \in I$, niin $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$."Oletetaan, että $A_i \subseteq B_i$ kaikilla $i \in I$. Olkoon $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Täten $x \in A_i$ jollakin $i \in I$. Tällöin pätee $x \in B_i$, koska $A_i \subseteq B_i$. Siten $x \in \bigcup_{i\in I} B_i$. Näin ollaan todistettu, että $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ mikäli $A_i \subseteq B_i$ kaikilla $i \in I$.

4. "Jos A_i ovat erillisiä ja $B_i \subseteq A_i$, niin myös B_i ovat erillisiä." Oletetaan, että A_i ovat erillisiä eli että $A_i \cap A_j = \varnothing$ mikäli $i \neq j$. Olkoot $B_i \subseteq A_i$. Osoitetaan, että joukot B_i ovat erillisiä. Osoitetaan, että jos $x \in B_i$, niin $x \notin B_j$ millään $j \neq i$. Olkoon $x \in B_i$. Täten $x \in A_i$, koska $B_i \subseteq A_i$. Täten $x \notin A_j$ millään $j \neq i$, koska joukot A_i ovat erillisiä. Täten $x \notin B_j$ millään $j \neq i$, koska $B_j \subseteq A_j$ (sillä sisältyvyys $B_j \subseteq A_j$ tarkoittaa, että jos $x \notin A_j$, niin $x \notin B_j$.)

5. "Väite "Kullakin $n = 1, 2, \ldots$ ominaisuus P_n pätee melkein kaikkialla." ja väite "Melkein kaikkialla pätee ominaisuus (P_n kaikilla $n = 1, 2, \ldots$)." ovat yhtäpitäviä."

   Lemma. Väite "Kullakin $n = 1, 2, \ldots$ ominaisuus P_n pätee melkein kaikkialla." ja väite "Melkein kaikkialla pätee ominaisuus (P_n kaikilla $n = 1, 2, \ldots$)." ovat yhtäpitäviä.

   Todistus. Kullakin $n = 1, 2, \ldots$ ominaisuus P_n pätee melkein kaikkialla.

   $\iff$ Kullakin $n = 1, 2, \ldots$ on olemassa nollamittainen (mahdollisesti n:stä riippuva) joukko N_n siten, että ominaisuus P_n pätee pisteessä x kaikilla $x \in N_n^c$.

   Määritellään $N := \bigcup_{n=1}^\infty N_n$. Huomaa, että N on nollamittainen. Jos $x \in N^c$, niin erityisesti $x \in N_n^c$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, mistä seuraa, että pisteessä x pätee ominaisuus P_n kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Täten:

   $\iff$ On olemassa nollamittainen (n:stä riippumaton) joukko N siten, että kaikilla $x \in N^c$ pisteessä x pätee ominaisuus P_n kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

$\iff$ On olemassa nollamittainen (n:stä riippumaton) joukko N siten, että kaikilla $x \in N^c$ pisteessä x pätee ominaisuus (P_n kaikilla $n = 1, 2, \ldots$).

$\iff$ Melkein kaikkialla pätee ominaisuus (P_n kaikilla $n = 1, 2, \ldots$).

$\square$

6. "Jos $a : \Omega \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on mitallinen, niin tulofunktio $a \cdot f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on mitallinen." Määritellään apufunktio $g : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ asettamalla $g(x) := (a(x), f(x))$. Funktio g on mitallinen, koska kumpikin sen komponenttifunktio $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ ja $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on mitallinen oletusten nojalla.

   Määritellään apufunktio $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ asettamalla $\phi(b, y) := by$. Funktio ϕ on jatkuva eli $\lim_{(b,y)\to(b_0,y_0)} \phi(b, y) = \phi(b_0, y_0)$, mikä nähdään esimerkiksi arviosta

$$\begin{aligned}
|\phi(b_0, y_0) - \phi(b, y)| &= |b_0 y_0 - by| \\
&= |b_0(y_0 - y) + (b_0 - b)y| \\
&\le |b_0||y_0 - y| + |y||b_0 - b| \\
&\le |b_0||y_0 - y| + (|y - y_0| + |y_o|)|b_0 - b| \\
&= |b_0||y_0 - y| + |y - y_0||b_0 - b| + |y_o||b_0 - b|.
\end{aligned}$$

   Huomaa, että $a \cdot f = \phi \circ g$. Koska g on mitallinen ja ϕ jatkuva, niin yhdistetty kuvaus $af = \phi \circ g$ on mitallinen.

7. "Olkoon $A \subseteq \Omega$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A$ täsmälleen silloin, kun $\lim_{n\to\infty} 1_A(x) f_n(x) = 1_A(x) f(x)$ kaikilla $x \in \Omega$."

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in A. \\
\iff &\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) & \text{kaikilla } x \in A \\ \qquad 0 = 0 & \text{kaikilla } x \in \Omega \setminus A. \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} 1_A(x) f_n(x) = 1_A(x) f(x) & \text{kaikilla } x \in A \\ \lim\limits_{n\to\infty} 1_A(x) f_n(x) = 1_A(x) f(x) & \text{kaikilla } x \in \Omega \setminus A. \end{cases} \\
\iff &\lim_{n\to\infty} 1_A(x) f_n(x) = 1_A(x) f(x) \text{ kaikilla } x \in \Omega.
\end{aligned}$$

8. "Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mitallinen. Tällöin on olemassa yksinkertaiset mitalliset funktiot u_N, joille $\lim_{N\to\infty} u_N = f$ ja $|u_N| \le 2|f|$." Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mitallinen. Tavoitteena on rakentaa funktiot $u_N : \Omega \to \mathbb{R}^d$, joilla on seuraavat ominaisuudet:
   - Kukin funktio u_N on yksinkertainen eli saa vain äärellisen monta arvoa.
   - Funktioille u_N pätee $\lim_{N\to\infty} u_N = f$ kaikkialla.
   - Kukin funktio u_N on mitallinen.
   - Kullekin funktiolle u_N pätee $|u_N| \le 2|f|$.

   Lähdetään rakentamaan tällaisia funktioita ominaisuus kerrallaan.

   "On olemassa yksinkertaiset funktiot $s_N : \Omega \to \mathbb{R}^d$ siten, että $\lim_{N\to\infty} s_N = f$."

   Tiedetään, että avaruudessa $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ on olemassa tiheä numeroituva osajoukko (esimerkiksi joukko $\mathbb{Q}^d$). Täten on olemassa tiheä jono $(y_n)_{n=1}^\infty$ avaruuden $\mathbb{R}^d$ vektoreita. Poistamalla jonosta ne vektorit, jotka esiintyvät useammin kuin kerran, voidaan olettaa, että $y_n \neq y_m$ kun $n \neq m$, mikä on kätevää myöhemmin.

   Kiinnitetään N. Kussakin pisteessä $x \in \Omega$ tarkastellaan minimietäisyyttä

$$\min_{n=1,\ldots,N} |f(x) - y_n|$$

   ja valitaan jokin vektori $y_{n_N(x)}$, missä $n_N(x) = 1, \ldots, N$, jossa tämä minimi saavutetaan. Näin saadaan funktio $s_N : \Omega \to \{y_n\}_{n=1}^N$ asettamalla $s_N(x) = y_{n_N(x)}$. Funktion s_N määritelmän nojalla pätee

$$|f(x) - s_N(x)| = \min_{n=1,\ldots,N} |f(x) - y_n|.$$

   Lisäksi s_N saa vain äärellisen monta arvoa eli funktio s_N on yksinkertainen.

   Osoitetaan, että $\lim_{N\to\infty} S_N = f$ eli $\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \Omega$. Kiinnitetään piste $x \in \Omega$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska joukko $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ on tiheä, niin löytyy $y_m = 1, 2, \ldots$ siten, että $|f(x) - y_m| < \epsilon$.

Näin ollen kaikilla $N \geq m$ pätee

$$|f(x) - s_N(x)| = \min_{n=1,\dots,m,\dots,N} |f(x) - y_n| \leq |f(x) - y_m| < \epsilon.$$

Raja-arvon määritelmän perusteella tämä tarkoittaa, että $\lim_{N\to\infty}|f(x) - s_N(x)| = 0$, mikä tarkoittaa, että

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x).$$

"On olemassa yksinkertaiset mitalliset funktiot $t_N : \Omega \to \mathbb{R}^d$ siten, että $\lim_{N\to\infty} t_N = f$."

Osoitetaan nyt, että aikaisemmin rakennettuja funktioita s_N voidaan muokata niin, että saadaan mitalliset funktiot.

Aikaisempi epämääräinen valinta (valitaan mikä tahansa vektori, jolla minimi saavutetaan) voi johtaa siihen, että funktio S_N on ei-mitallinen. (Näin käy esimerkiksi seuraavassa tapauksessa, jossa $N = 2$:

- Asetetaan $(\Omega, \mathcal{F})$, jolle $\Omega := \{a, b\}$ ja $\mathcal{F} := \{\{a, b\}, \varnothing\}$.
- Asetetaan $f : \Omega \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) := 0$ kaikilla $x \in \Omega$.
- Asetetaan $(y_1, y_2) := (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$.
- Asetetaan $s_2 : \Omega \to \{-1, 1\}$, jolle

$$s_2(x) := \begin{cases} -1 & \text{kun } x = a, \\ 1 & \text{kun } x = b. \end{cases}$$

Nyt funktio s_2 on rakennettu kuten aikaisemmin, mutta funktio s_2 on ei-mitallinen, koska $\{s \in \{-1\}\} = \{a\} \notin \mathcal{F}$.)

Jotta saadaan rakennettua mitallinen funktio, niin korvataan aikaisempi epämääräinen valinta tarkemmalla valinnalla: Valitaan vektoreista, joilla minimi saavutetaan, se vektori, jolla on pienin indeksi.

Siis määritellään $t_N : \Omega \to \mathbb{R}^d$ asettamalla, että $t_N(x) = y_{n_N(x)}$ kun $n_N(x) = 1, 2, \dots, N$ on pienin luku, johon liittyvällä vektorilla $y_{n_N(x)}$ minimi

$$\min_{n=1,\dots,N} |f(x) - y_n|$$

saavutetaan. Kuten aikaisemmin pätee, että t_N on yksinkertainen ja $\lim_{N\to\infty} t_N = f$.

Osoitetaan, että $t_N : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on mitallinen, mikä esityksen

$$t_N = \sum_{n=1}^{N} y_n 1_{\{t_N = y_n\}}$$

nojalla on yhtäpitävää sen kanssa, että joukot $\{t_N = y_n\}$ ovat mitallisia kaikilla $n = 1, 2, \dots, N$. Osoitetaan näiden joukkojen mitallisuus.

$x \in \{t_N = y_n\}$

$\iff$ $t_N(x) = y_n$.

$\iff$ $y_{n_N(x)} = y_n$.

$\iff$ $n_N(x) = n$.

$\iff$ Luku $n = 1, \dots, N$ on pienin luku, johon liittyvällä vektorilla y_n minimi

$$\min_{n=1,\dots,N} |f(x) - y_n|$$

saavutetaan.

$\iff$ Pätee, että $|f(x) - y_n| = \min_{n=1,\dots,N}|f(x) - y_n|$ ja kaikilla pienemmillä luvuilla $k = 1, \dots, n-1$ pätee, että $|f(x) - y_k| > \min_{n=1,\dots,N}|f(x) - y_n|$.

$\iff$ $x \in \{|f - y_n| = \min_{n=1,\dots,N}|f - y_n|\}$ ja $x \in \bigcap_{k=1}^{n-1}\{|f - y_k| > \min_{n=1,\dots,N}|f - y_n|\}$.

$\iff$

$$x \in \{|f - y_n| = \min_{n=1,\dots,N} |f - y_n|\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \{|f - y_k| > \min_{n=1,\dots,N} |f - y_n|\}.$$

Näin ollen ollaan saatu, että

$$\{t_N = y_n\} = \{(|f - y_n| - \min_{n=1,\dots,N} |f - y_n|) \in \{0\}\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \{(|f - y_k| - \min_{n=1,\dots,N} |f - y_n|) \in (0, \infty)\}.$$

Huomataan, että funktio $x \mapsto (|f(x) - y_n| - \min_{n=1,\dots,N}|f(x) - y_n)|$ on mitallinen, koska:

- Funktio $\Omega \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^d$ on mitallinen oletuksen nojalla.
- Vakiofunktio $\Omega \ni x \mapsto y_n \in \mathbb{R}^d$ on aina mitallinen.

- Funktio $\Omega \ni x \mapsto f(x) - y_n \in \mathbb{R}^d$ on mitallinen, koska se on mitallisten funktioiden lineaarikombinaatio (tarkemmin sanottuna erotus).
- Funktio $\Omega \ni x \mapsto |f(x) - y_n| \in \mathbb{R}$ on mitallinen, koska se on mitallisen funktion $\Omega \ni x \mapsto f(x) - y_n \in \mathbb{R}^d$ ja jatkuvan funktion $\mathbb{R}^d \ni y \mapsto |y|$ yhdistetty funktio.
- Funktio $\Omega \ni x \mapsto \min_{n=1,\dots,N}|f(x) - y_n| \in \mathbb{R}$ on mitallinen, koska funktiot $\Omega \ni x \mapsto |f(x) - y_n| \in \mathbb{R}$, kun $n = 1, \dots, N$, ovat mitallisia ja mitallisten funktioiden infimum (erityisesti minimi) on mitallinen.

Täten mitallisen funktion määritelmän nojalla joukko

$$\{(|f - y_n| - \min_{n=1,\dots,N}|f - y_n|) \in \{0\}\}$$

on mitallinen, koska aikaisemmin todetun nojalla funktio $(|f - y_n| - \min_{n=1,\dots,N}|f - y_n|)$ on mitallinen ja joukko $\{0\}$ on Borelin joukko (eli kuuluu avoimien joukkojen virittämään σ-algebraan). Samaan tapaan nähdään, että joukot

$$\{(|f - y_k| - \min_{n=1,\dots,N}|f - y_n|) \in (0,\infty)\}$$

ovat mitallisia. Koska mitallisuus säilyy numeroituvissa joukko-operaatioissa, niin joukko

$$\{(|f - y_n| - \min_{n=1,\dots,N}|f - y_n|) \in \{0\}\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1}\{(|f - y_k| - \min_{n=1,\dots,N}|f - y_n|) \in (0,\infty)\}$$

on mitallinen.

"On olemassa yksinkertaiset mitalliset funktiot $u_N : \Omega \to \mathbb{R}^d$ siten, että $\lim_{N\to\infty} u_N = f$ ja $|u_N| \le 2|f|$." Muokataan aikaisemman kohdan funktiota t_N katkaisemalla siitä pois itseisarvoltaan liian suuret arvot:

$$u_N := t_N 1_{\{|t_N| \le 2|f|\}}.$$

Indikaattorin määritelmän nojalla pätee

$$|u_N(x)| = |t_N(x)| 1_{\{|t_N| \le 2|f|\}}(x) = \begin{cases} |t_N(x)| & \text{jos } |t_N(x)| \le 2|f(x)|, \\ 0 & \text{jos } |t_N(x)| > 2|f(x)|. \end{cases} \le 2|f(x)|.$$

Siis $|u_N(x)| \le 2|f(x)|$ kaikilla $x \in \Omega$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\lim_{N\to\infty} u_N = f$. Tarkastellaan ensin sellaisia pisteitä $x \in \Omega$, joissa $f(x) = 0$ eli $|f(x)| = 0$. Tällöin

$$\lim_{N\to\infty} |u_N(x) - 0| \le \lim_{N\to\infty} |t_N(x)| = |\lim_{N\to\infty} t_N(x)| = |f(x)| = 0,$$

joten $\lim_{N\to\infty} u_N(x) = 0 = f(x)$.

Tarkastellaan sitten sellaisia pisteitä $x \in \Omega$, joissa $f(x) \ne 0$ eli $|f(x)| > 0$. Kiinnitetään tällainen x. Koska $\lim_{N\to\infty}|t_N| = |f(x)|$ ja $|f(x)| < 2|f(x)|$, niin raja-arvon määritelmän perusteella jokaisella löytyy M siten, että

$$|t_N(x)| \le 2|f(x)| \quad \text{kaikilla } N \ge M,$$

jolloin indikaattorin määritelmän perusteella

$$1_{\{|t_N| \le 2|f|\}}(x) = 1 \quad \text{kaikilla } N \ge M.$$

Raja-arvon määritelmän perusteella tämä tarkoittaa, että

$$\lim_{N\to\infty} 1_{\{|t_N| \le 2|f|\}}(x) = 1,$$

joten

$$\lim_{N\to\infty} (t_N(x) 1_{\{|t_N| \le 2|f|\}}(x)) = \lim_{N\to\infty} t_N(x) \cdot \lim_{N\to\infty} 1_{\{|t_N| \le 2|f|\}}(x) = f(x) \cdot 1 = f(x).$$

Kaikkiaan ollaan saatu, että kaikilla $x \in \Omega$ pätee

$$\lim_{N\to\infty} t_N(x) 1_{\{|t_N| \le 2|f|\}}(x) = f(x).$$

9. "Cauchyn jonon määritelmä on riippumaton arviossa esiintyvästä mielivaltaisen pieniä arvoja saavasta funktiosta."

Lemma. Olkoon a_n lukujono. Tällöin seuraavavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa N siten, että $|a_n - a_m| < \epsilon$ mikäli $n, m \ge N$.

- On olemassa funktio $f_a(\epsilon)$, joka voi riippua pelkästään lukujonosta a_n ja jolle pätee $\lim_{\epsilon\to 0} f_a(\epsilon) = 0$. Lisäksi pätee, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa N siten, että $|a_n - a_m| < f(\epsilon)$ mikäli $n, m \geq N$.

Todistus. Huomataan, että ensimmäisestä ehdosta seuraa jälkimmäinen ehto asettamalla $f_a(\epsilon) := \epsilon$, koska $\lim_{\epsilon\to 0} f_a(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon = 0$. Osoitetaan, että jälkimmäisestä ehdosta seuraa ensimmäinen ehto.

Oletetaan, että on olemassa funktio $f_a(\zeta)$, joka voi riippua pelkästään lukujonosta a_n ja jolle pätee $\lim_{\zeta\to 0} f_a(\zeta) = 0$. Oletetaan, että jokaisella $\zeta > 0$ on olemassa N siten, että $|a_n - a_m| < f(\zeta)$ mikäli $n, m \geq N$. Olkoon $\epsilon > 0$. Oletuksen $\lim_{\zeta\to 0} f_a(\zeta) = 0$ nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f_a(\zeta) < \epsilon$ kunhan $0 < \zeta < \delta$. Valitaan jokin ζ, jolle $0 < \zeta < \delta$, ja sovelletaan oletusta tähän valintaan. Näin saadaan, että on olemassa N siten, että $|a_n - a_m| < f(\zeta) < \epsilon$ mikäli $n, m \geq N$. $\square$