MITTA JA INTEGRAALI: HARJOITUS 4: ESIMERKKIRATKAISUT (VERSIO 1)

Kurssin luennoi Tuomas Hytönen ja laskuharjoituksia pitää Timo Hänninen.

Tehtävä 1. Laske:

(a) $\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-n(n+1)x} \,\mathrm{d}x$.

(b) $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ja $\liminf_{n\to\infty} a_n$ kun $(a_n)_{n=1}^\infty$ on kaikkien rationaalilukujen muodostama jono (eli rationaaliluvut on numeroitu jossakin järjestyksessä).

Ratkaisu. "(a)" Koska kukin funktio $(\infty, 0] \ni x \mapsto e^{-n(n+1)x} \in [0,\infty)$ on Riemannin mielessä epäoleellisesti integroituva, niin se on myös Lebesguen mielessä integroituva.

Monotonisen suppenemisen lauseen (luentomuistiinpanoissa tämä on muotoiltu Lauseena 5.1.) perusteella pätee

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-n(n+1)x} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-n(n+1)x} \,\mathrm{d}x.$$

Lasketaan epäoleellinen Riemannin integraali

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-n(n+1)x} \,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-n(n+1)x} \,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b D_x\Big(\frac{1}{n(n+1)} e^{-n(n+1)x}\Big) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Osamurtokehitelmän mukaisesti saadaan

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Näin ollen summa $S_N := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\big)$ on kokoonpainuva (teleskooppinen) siinä mielessä, että se on muotoa $S_N := \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1})$, jolloin peräkkäisten termien kumoutumisen seurauksena saadaan

$$S_N := \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Näin ollen

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \lim_{N\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{N+1}\Big) = 1.$$

Kaikkiaan ollaan siis saatu

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-n(n+1)}x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-n(n+1)}x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

"(b)" Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kaikkien rationaalilukujen muodostama jono (missä rationaaliluvut on listattu jossakin järjestyksessä). Kiinnitetään luku N. Joukkoon $\{a_n\}_{n\geq N}$ kuuluvat kaikki rationaaliluvut paitsi luvut $\{a_n\}_{1\leq n<N}$. Valitaan näistä poisjätetyistä luvuista suurin luku $q_0 \in \mathbb{Q}$. Siten mitään lukua $q \in \mathbb{Q}$, jolle $q > q_0$, ei ole jätetty pois joukosta $\{a_n\}_{n\geq N}$. Täten $q \in \{a_n\}_{n\geq N}$ kaikkilla $q \in \mathbb{Q}$, joille $q > q_0$. Koska $\sup_{n\geq N} a_n$ on määritelmän nojalla joukon $\{a_n\}_{n\geq N}$ pienin yläraja, niin erityisesti se on yläraja, joten pätee

$$\sup_{n\geq N} a_n \geq q \quad \text{kaikilla } q \in \mathbb{Q}, \text{ joille } q \geq q_0.$$

Tämä tarkoittaa, että joukossa $\{a_n\}_{n\geq N}$ on mielivaltaisen suuria rationaalilukuja, mikä tarkoittaa, että

$$\sup_{n\geq N} a_n = \infty.$$

Täten

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} a_n = \lim_{N\to\infty} \infty = \infty.$$

Samaan tapaan saadaan, että $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Tehtävä 2. Olkoot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ reaalilukujonoja ja $c \in \mathbb{R}$ vakio. Todista:

(a) $\liminf_{n\to\infty}(c - a_n) = c - \limsup_{n\to\infty} a_n$.
(b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Ratkaisu. Selkeyden vuoksi todistetaan ensin apulauseena joitakin supremumin ja infimumin ominaisuuksia. Muistutetaan mieliin infimumin eli suurimman alarajan määritelmä (supremum eli pienin yläraja on määritelty samaan tapaan):

Määritelmä (Infimum)**.** Olkoon $A \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Joukon A *infimum* eli *suurin alaraja* on se yksikäsitteinen luku $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, jolle pätee:

- (Alaraja) Luku b on joukon A alaraja eli pätee, että

$$b \leq a \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

- (Suurin alaraja) Luku b on joukon A suurin alaraja eli sille pätee: Jos c on mikä tahansa joukon A alaraja (mikä tarkoittaa, että $c \leq a$ kaikilla $a \in A$), niin tällöin $c \leq a$.

Joukolle $A \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ ja luvulle $c \in \mathbb{R}$ merkintä $A + c$ tarkoittaa joukkoa $A + c := \{a + c : a \in A\}$ ja merkintä cA joukkoa $cA := \{ca : a \in A\}$.

Lemma 1 (Supremumin ja infimumin ominaisuuksia)**.** Olkoon $A \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee:

(i) $\inf(A + c) = \inf A + c$.
(ii) $\inf(-A) = -\sup A$.

Todistus. Todistetaan ensin "(i)". Todistetaan yhtäsuuruus osoittamalla arvio kumpaankin suuntaan.

"$\leq$". Koska $\inf(A + c)$ on joukon $A + c$ alaraja, niin pätee

$$\inf(A + c) \leq a + c \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

Täten

$$\inf(A + c) - c \leq a \quad \text{kaikilla } a \in A,$$

mikä tarkoittaa, että $\inf(A+c)-c$ on joukon A eräs alaraja. Koska $\inf A$ on joukon A suurin alaraja, niin pätee

$$\inf(A+c)-c \le \inf A,$$

joten

$$\inf(A+c) \le \inf A + c.$$

"$\geq$". Koska $\inf A$ on joukon A alaraja, niin pätee

$$a \ge \inf A \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

Täten

$$a + c \ge \inf A + c \quad \text{kaikilla } a \in A,$$

mikä tarkoittaa, että $\inf A + c$ on joukon $A + c$ eräs alaraja. Koska $\inf(A+c)$ on joukon $A+c$ suurin alaraja, niin pätee

$$\inf(A+c) \ge \inf A + c.$$

Todistetaan sitten "(ii)" osoittamalla arviot kumpaankin suuntaan.

"$\leq$". Koska $\inf(-A)$ on joukon $-A$ alaraja, niin pätee

$$\inf(-A) \le -a \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

Täten

$$a \le -\inf(-A) \quad \text{kaikilla } a \in A,$$

mikä tarkoittaa, että $-\inf(-A)$ on joukon A eräs yläraja. Koska $\sup A$ on joukon A pienin yläraja, niin pätee

$$\sup A \le -\inf(-A),$$

eli

$$\inf(-A) \le -\sup A.$$

"$\geq$". Koska $\sup A$ on joukon A yläraja, niin pätee

$$\sup A \ge a \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

Täten

$$-a \ge -\sup A \quad \text{kaikilla } a \in A,$$

mikä tarkoittaa, että $-\sup A$ on eräs joukon $-A$ alaraja. Koska $\inf(-A)$ on joukon $-A$ suurin alaraja, niin pätee

$$\inf(-A) \ge -\sup(A).$$

□

Nyt apulauseen nojalla saadaan yhtäsuuruus

$$\inf_{n\ge N}(c-a_n) \overset{(i)}{=} c + \inf_{n\ge N}(-a_n) \overset{(ii)}{=} c - \sup_{n\ge N} a_n.$$

Muistetaan lim inf:n ja lim sup:n määritelmät: $\liminf_{n\to\infty} b_n := \lim_{N\to\infty} \inf_{n\ge N} b_n$ ja $\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} b_n$. Käyttämällä määritelmiä ja saatua yhtäsuuruutta nähdään:

$$\liminf_{n\to\infty}(c-a_n) = \lim_{N\to\infty}\left(\inf_{n\ge N}(c-a_n)\right) = \lim_{N\to\infty}\left(c-\sup_{n\ge N} a_n\right) = c-\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{n\ge N} a_n\right) = c-\limsup_{n\to\infty} c_n.$$

"(b)" Koska $\sup_{n\ge N} a_n$ on joukon $\{a_n\}_{n\ge N}$ yläraja, niin $a_n \le \sup_{n\ge N} a_n$ kaikilla $n \ge N$. Samaten $b_n \le \sup_{n\ge N} b_n$ kaikilla $n \ge N$. Summaamalla epäyhtälöt saadaan

$$a_n + b_n \le \sup_{n\ge N} a_n + \sup_{n\ge N} b_n \quad \text{kaikilla } n \ge N,$$

mikä tarkoittaa, että $\sup_{n\geq N} a_n + \sup_{n\geq N} b_n$ on eräs joukon $\{a_n + b_n\}_{n\geq N}$ yläraja. Koska $\sup_{n\geq N}(a_n + b_n)$ on joukon $\{a_n + b_n\}_{n\geq N}$ pienin yläraja, niin pätee

$$\sup_{n\geq N}(a_n + b_n) \leq \sup_{n\geq N} a_n + \sup_{n\geq N} b_n.$$

Käyttämällä tätä epäyhtälöä ja $\limsup$:n määritelmää saadaan

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N}(a_n + b_n) \\ &\leq \lim_{N\to\infty} (\sup_{n\geq N} a_n + \sup_{n\geq N} b_n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} a_n + \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} b_n \\ &= \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Tehtävä 3. Osoita:

(a) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitta-avaruus. Olkoon $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ funktio. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
- f on mitallinen, mikä tarkoittaa, että $\{f \in A\}$ on mitallinen kaikilla avoimilla joukoilla A.
- $\{f \in B(y,r)\}$ on mitallinen kaikilla avoimilla kuulilla $B(y,r)$.
- $\{f \in \bar{B}(y,r)\}$ on mitallinen kaikilla suljetuilla kuulilla $\bar{B}(y,r)$.

(b) Olkoot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ funktioita. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Tällöin

$$\{f \in \bar{B}(y,r)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k})\}.$$

Totea näiden kohtien avulla, että jos funktiot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ovat mitallisia, niin myös rajafunktio $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ on mitallinen.

Ratkaisu. Määritellään tehtävänannon mukaiset kokoelmat:
- $\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^d : A \text{ avoin}\}$
- $\mathcal{B} := \{B(y,r) : y \in \mathbb{R}^d, r > 0\}$
- $\bar{\mathcal{B}} := \{\bar{B}(y,r) : y \in \mathbb{R}^d, r > 0\}$

Todistetaan ensin, että tehtävänannon väite on yhtäpitävää sen kanssa, että kaikki nämä kokoelmat virittävät saman σ-algebran eli $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\bar{\mathcal{B}})$: Apulauseen

Lemma (Luentomuistiinpanojen Lause 6.3)**.** Olkoon $(\Omega, \mathcal{F})$ mitallinen avaruus. Olkoon Y jokin maalijoukko. Olkoon $f : \Omega \to Y$ funktio. Olkoon $\mathcal{B}$ jokin joukon Y osajoukkojen kokoelma ja $\mathcal{G} := \sigma(\mathcal{B})$ sen virittämä σ-algebra. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
- $\{f \in B\}$ mitallinen kaikilla $B \in \mathcal{B}$.
- $\{f \in G\}$ mitallinen kaikilla $G \in \mathcal{G} := \sigma(\mathcal{B})$.

nojalla pätee:
- $\{f \in A\}$ on mitallinen kaikilla avoimilla joukoilla A.
  $\iff$ $\{f \in G\}$ on mitallinen kaikilla $G \in \sigma(\mathcal{A})$.
- $\{f \in B(y,r)\}$ on mitallinen kaikilla avoimilla kuulilla $B(y,r)$.
  $\iff$ $\{f \in G\}$ on mitallinen kaikilla $G \in \sigma(\mathcal{B})$.
- $\{f \in \bar{B}(y,r)\}$ on mitallinen kaikilla suljetuilla kuulilla $\bar{B}(y,r)$.
  $\iff$ $\{f \in G\}$ on mitallinen kaikilla $G \in \sigma(\bar{\mathcal{B}})$.

Siispä jos $\sigma(A) = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\bar{\mathcal{B}})$, niin nämä tehtävänannon ehdot ovat selvästi yhtäpitäviä.

Jos taas tehtävänannon mukaiset ehdot ovat yhtäpitäviä, niin soveltamalla tätä erityistapaukseen $\Omega := \mathbb{R}^d$ ja $f(x) := x$ saadaan, että jokaisella $\mathbb{R}^d$:n σ-algebralla $\mathcal{F}$ pätee, että ehdot

- $A \in \mathcal{F}$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$ eli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, joten[1] $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$.
- $B \in \mathcal{F}$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$ eli $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, joten $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$.
- $\bar{B} \in \mathcal{F}$ kaikilla $\bar{B} \in \bar{\mathcal{B}}$ eli $\bar{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{F}$, joten $\sigma(\bar{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{F}$.

ovat yhtäpitäviä. Soveltamalla tätä tapauksiin $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{A})$, $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{B})$, ja $\mathcal{F} := \sigma(\bar{\mathcal{B}})$ saadaan, että $\sigma(A) = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\bar{\mathcal{B}})$.

Nyt on siis todettu, että tehtävänannon väite palautuu väitteeksi $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\bar{\mathcal{B}})$. Tehdään huomio:

Huomio. Pätee, että $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ jos ja vain jos $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$. Todistetaan tämä. Oletetaan ensin, että $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ ja osoitetaan, että tällöin $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$. Koska $\sigma(\mathcal{A})$ on määritelmän nojalla σ-algebra, joka sisältää $\mathcal{A}$:n, niin pätee $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Kaikkiaan $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$. Oletetaan sitten, että $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ ja osoitetaan, että tällöin $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$. Koska $\sigma(\mathcal{A})$ on määritelmän nojalla pienin σ-algebra, joka sisältää $\mathcal{A}$:n ja $\sigma(\mathcal{B})$ on jokin σ-algebra, joka oletuksen $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ nojalla sisältää $\mathcal{A}$:n, niin $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$.

Tämän huomion nojalla $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B}) = \sigma(\bar{\mathcal{B}})$ täsmälleen silloin, kun pätee $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{B}), \mathcal{B} \subseteq \sigma(\bar{\mathcal{B}})$, ja $\bar{\mathcal{B}} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Osoitetaan, että nämä sisältyvyydet pätevät.

"$\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$" Osoitetaan ensin, että $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$. Olkoon $A \in \mathcal{A}$. Kokoelman $\mathcal{A}$ määritelmän nojalla tämä tarkoittaa, että A on avoin. Avoimuuden määritelmän perusteella jokaista $x \in A$ kohden voidaan valita $B(x,r)$ siten, että $x \in B(x,r) \subseteq A$. Koska rationaaliluvut ovat tiheässä, niin voidaan valita piste $q := (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Q}^d$ (eli piste, jonka jokainen koordinaatti q_i, missä $i = 1, 2, \dots, d$, on rationaaliluku) ja säde $s \in \mathbb{Q}_+$ siten, että $x \in B(q,s) \subseteq B(x,r)$ [2]. Näin ollen ollaan osoitettu, että jokaista $x \in A$ kohden voidaan valita $(q,s) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+$ siten, että $x \in B(q,s) \subseteq A$. Täten seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

$$\begin{aligned} & x \in A \\ \iff & \text{Jollakin } (q,s) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+ \text{ pätee, että } x \in B(q,s) \subseteq A. \end{aligned}$$

Joukkomerkintöjen avulla kirjoitettuna tämä tarkoittaa, että

$$A = \bigcup_{\substack{(q,s) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+ : \\ B(q,s) \subseteq A}} B(q,s).$$

Huomaa, että $\mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+$ on numeroituva joukko. Koska $B(q,s) \in \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ ja σ-algebra on suljettu numeroituvissa joukko-operaatioissa, niin $\bigcup_{\substack{(q,s) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}_+ : \\ B(q,s) \subseteq A}} B(q,s) \in \sigma(\mathcal{B})$.

---

[1] Jos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, niin tällöin $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}$, koska tällöin $\mathcal{F}$ on σ-algebra, joka sisältää $\mathcal{A}$:n, ja $\sigma(\mathcal{A})$ on pienin σ-algebra, joka sisältää $\mathcal{A}$:n.

[2] Koska rationaaliluvut ovat tiheässä, niin löytyy piste $q := (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Q}^d$ ja säde $s \in \mathbb{Q}_+$ siten, että $|x - q| < s < \frac{r}{2}$. Täten $x \in B(q,s)$. Osoitetaan vielä, että $B(q,s) \subseteq B(x,r)$. Olkoon $y \in B(q,s)$. Tämä tarkoittaa, että $|y - q| < s < r/2$. Kolmioepäyhtälön nojalla $|y - x| \le |y - q| + |q - x| < s + s < r/2 + r/2 < r$, mikä tarkoittaa, että $y \in B(x,r)$.

Kaikkiaan ollaan siis osoitettu, että

$$A = \bigcup_{\substack{(q,s)\in\mathbb{Q}^d\times\mathbb{Q}_+:\\ B(q,s)\subseteq A}} B(q,s) \in \sigma(\mathcal{B}).$$

"$\mathcal{B} \subseteq \sigma(\bar{\mathcal{B}})$". Osoitetaan sitten, että $\mathcal{B} \subseteq \sigma(\bar{\mathcal{B}})$. Olkoon $B(x,r) \in \mathcal{B}$. Huomataan, että

$$B(x,r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}(x, r - \frac{1}{n}),$$

koska

$$\begin{aligned}
&y \in B(x,r)\\
\iff &|x-y| < r\\
\iff &|x-y| \le r - \frac{1}{n} \quad \text{jollakin } n = 1,2,\ldots.\\
\iff &y \in \bar{B}(x, r-\frac{1}{n}) \quad \text{jollakin } n = 1,2,\ldots.\\
\iff &y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}(x, r-\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Lisäksi todetaan, että $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}(x, r-\frac{1}{n}) \in \sigma(\bar{\mathcal{B}})$. Kaikkiaan ollaan siis osoitettu, että

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}(x, r-\frac{1}{n}) \in \sigma(\bar{\mathcal{B}}).$$

"$\bar{\mathcal{B}} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$". Osoitetaan lopuksi, että $\bar{\mathcal{B}} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Olkoon $\bar{B}(x,r) \in \bar{\mathcal{B}}$. Huomataan, että

$$\bar{B}(x,r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, r+\frac{1}{n}),$$

koska

$$\begin{aligned}
&y \in \bar{B}(x,r)\\
\iff &|x-y| \le r\\
\iff &|x-y| < r + \frac{1}{n} \quad \text{kaikilla } n = 1,2,\ldots.\\
\iff &y \in B(x, r+\frac{1}{n}) \quad \text{kaikilla } n = 1,2,\ldots.\\
\iff &y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, r+\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Lisäksi huomataan, että $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, r+\frac{1}{n}) \in \sigma(\mathcal{A})$, koska $B(x, r+\frac{1}{n})$ on avoin joukko eli $B(x, r+\frac{1}{n}) \in \mathcal{A}$. Kaikkiaan ollaan siis osoitettu, että

$$\bar{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, r+\frac{1}{n}) \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Todistetaan sitten kohta (b). Olkoot $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ funktioita. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Tämä tarkoittaa, että jokaisella $x \in \Omega$ pätee $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, mikä puolestaan tarkoittaa, että $\lim_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$. On osoitettava, että rajafunktio f on mitallinen, mikä kohdan (a) nojalla tarkoittaa, että joukko $\{f \in \bar{B}(y,r)\}$ on mitallinen. Pyritään kirjoittamaan tämä joukko numeroituvana joukko-operaatioina sellaisista joukoista, jotka ovat selvästi mitallisia oletusten nojalla.

Huomataan tähän väliin seuraava apulause:

Lemma 2. Olkoon a_n suppeneva jono reaalilukuja ja a reaaliluku. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

- $\lim_{n\to\infty} a_n \le a$.
- Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa luku N siten, että kaikilla $n \ge N$ pätee $a_n \le a+\epsilon$.

Todistus. " $\Longrightarrow$ " Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} a_n \le a$. Raja-arvon määritelmän nojalla jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa luku N siten, että kaikilla $n \ge N$ pätee $a_n \le a + \epsilon$.

" $\Longleftarrow$ " Oletetaan, että jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa luku N siten, että kaikilla $n \ge N$ pätee $a_n \le a + \epsilon$. Ottamalla tästä rajankäynti $n \to \infty$ saadaan, että $\lim_{n\to\infty} a_n \le a + \epsilon$. Ottamalla tästä rajankäynti $\epsilon \to 0$ saadaan, että $\lim_{n\to\infty} a_n \le a$. □

Huomio. Huomaa, että kaikkien reaalilukujen $\epsilon > 0$ sijalla apulauseessa voidaan käyttää mitä tahansa mielivaltaisen pieniä reaalilukuja, kuten lukuja $\frac{1}{k}$ kun $k = 1, 2, \ldots$, joiden etu on siinä, että niitä on vain numeroituvan monta.

Kirjoitetaan nyt apulauseen avulla joukko $\{f \in \bar{B}(y,r)\}$ joukkojen $\{f_n \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k})$ avulla:

$$
\begin{aligned}
& x \in \{f \in \bar{B}(y,r)\}. \\
\Longleftrightarrow\ & f(x) \in \bar{B}(y,r). \\
\Longleftrightarrow\ & |f(x) - y| \le r. \\
\Longleftrightarrow\ & |\lim_{n\to\infty} f_n(x) - y| \le r. \\
\overset{3}{\Longleftrightarrow}\ & \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - y| \le r \\
\Longleftrightarrow\ & \text{Jokaisella } k = 1,2,\ldots \text{ jollakin } N = 1,2,\ldots \text{ jokaisella } n \ge N \text{ pätee, että} \\
& |f_n(x) - y| \le r + \frac{1}{k}. \\
\Longleftrightarrow\ & \text{Jokaisella } k = 1,2,\ldots \text{ jollakin } N = 1,2,\ldots \text{ jokaisella } n \ge N \text{ pätee, että} \\
& f_n(x) \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k}). \\
\Longleftrightarrow\ & \text{Jokaisella } k = 1,2,\ldots \text{ jollakin } N = 1,2,\ldots \text{ jokaisella } n \ge N \text{ pätee, että} \\
& x \in \{f \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k})\}. \\
\Longleftrightarrow\ & \text{Jokaisella } k = 1,2,\ldots \text{ jollakin } N = 1,2,\ldots \text{ pätee, että} \\
& x \in \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k})\}. \\
\Longleftrightarrow\ & \text{Jokaisella } k = 1,2,\ldots \text{ pätee, että} \\
& x \in \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k})\}. \\
\Longleftrightarrow\ & \text{Pätee, että} \\
& x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k})\}.
\end{aligned}
$$

Täten

$$\{f \in \bar{B}(y,r)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k})\}.$$

[3] Tämä yhtäpitävyys pätee, koska funktio $\mathbb{R}^d \ni z \mapsto |z|$ on jatkuva.

Koska funktiot f_n ovat oletusten nojalla mitallisia, niin joukot $\bar{B}(y, r + \frac{1}{k})$ ovat mitallisia. Koska mitallisuus säilyy numeroituvissa joukko-operaatioissa, niin joukko $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{f \in \bar{B}(y, r + \frac{1}{k})\}$ on mitallinen. Täten joukkoyhtäsuuruuden nojalla joukko $\{f \in \bar{B}(y, r)\}$ on mitallinen.

Tehtävä 4. Tässä tehtävässä tutustutaan yhteen mahdolliseen tapaan määritellä vaihtuvamerkkisen integroituvan funktion integraali, kun jo tunnetaan ei-negatiivisten mitallisten funktioiden integrointiteoria.

(a) Osoita, että funktiot $f^+ := \max\{f, 0\}$ ja $f^- := -\min\{f, 0\}$ ovat integroituvia ei-negatiivisia funktioita ja että $f = f^+ - f^-$.

(b) Määritellään integraali $\int f \, \mathrm{d}\mu := \int h_2 \, \mathrm{d}\mu - \int h_2 \, \mathrm{d}\mu$ kun $f = h_1 - h_2$, missä h_1 ja h_2 ovat ei-negatiivisia integroituvia funktioita. Osoita, että integraalin arvo ei riipu siitä, minkä jaon $f = h_1 - h_2$ avulla se lasketaan.

(c) Osoita, että näin määritelty integraali on lineaarinen ja toteuttaa arvion

$$\Big| \int f \, \mathrm{d}\mu \Big| \le \int |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Ratkaisu. "(a)". Oletetaan, että f on integroituva. Osoitetaan, että f voidaan kirjoittaa muodossa $f = f^+ - f^-$ ja että f^+ ja f^- ovat ei-negatiivisia ja integroituvia (mikä tarkoittaa, että ne ovat mitallisia ja että niiden itseisarvon integraali on äärellinen).

Huomaa, että

$$f^+(x) - f^-(x) = \begin{cases} f(x) + 0 & \text{jos } f(x) \ge 0 \\ + - (-f(x) = f(x) & \text{jos } f(x) \le 0. \end{cases}$$

Täten $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ kaikilla $x \in \Omega$ eli $f = f^+ - f^-$. Funktion f^+ määritelmän perusteella $f^+ = \max\{f, 0\} \ge 0$ ja funktion f^- määritelmän perusteella $-f^- = \min\{f, 0\} \le 0$ eli $f^- \ge 0$. Luentomuistiinpanoissa on osoitettu, että mitallisten funktioiden summa, maksimi ja minimi ovat mitallisia. Funktiot f ja 0 ovat mitallisia. Täten f^+ ja f^- ovat mitallisia.

Huomaa, että

$$f^+(x) + f^-(x) = \begin{cases} f(x) + 0 & \text{jos } f(x) \ge 0 \\ +(-f(x) = -f(x) & \text{jos } f(x) \le 0. \end{cases}$$

Täten $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ kaikilla $x \in \Omega$ eli $f = f^+ + f^-$. Näin ollen

$$\int f^+ \, \mathrm{d}\mu \le \int (f^+ + f^-) \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu$$

(ja sama pätee f^-:lle). Integraali $\int |f| \, \mathrm{d}\mu$ on äärellinen, koska f on integroituva oletuksen nojalla. Täten integraali $\int f^+ \, \mathrm{d}\mu$ on myös äärellinen.

"(b)" Olkoot $f = h_1 - h_2 = g_1 - g_2$ missä $h_1, h_2, g_1, g_2 : \Omega \to [0, \infty]$ ovat integroituvia. Osoitetaan, että kummankin jaon avulla saadaan integraalille sama arvo eli että

$$\int h_1 \, \mathrm{d}\mu - \int h_2 \, \mathrm{d}\mu = \int g_1 \, \mathrm{d}\mu - \int g_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Tämä on yhtäpitävää sille, että

$$\int h_1 \, \mathrm{d}\mu + \int g_2 \, \mathrm{d}\mu = \int g_1 \, \mathrm{d}\mu + \int h_2 \, \mathrm{d}\mu,$$

mikä taas ei-negatiivisten integraalien lineaarisuuden nojalla on yhtäpitävää sille, että

$$\int (h_1 + g_2)\, \mathrm{d}\mu = \int (g_1 + h_2)\, \mathrm{d}\mu,$$

mikä taas seuraa siitä, että oletusten nojalla integroitavat funktiot yhtyvät eli $h_1 - h_2 = g_1 - g_2$ eli $h_1 + g_2 = g_1 + g_2$.

On myös muita tapoja todistaa integraalin arvon riiippumattomuus käytetystä jaosta [4].

"(c)" Olkoon f_1, f_2 integroituvia funktioita ja $c \in \mathbb{R}$ vakio. Todistetaan ensin, että

$$\int (f_1 + f_2)\, \mathrm{d}\mu = \int f_1\, \mathrm{d}\mu + \int f_2\, \mathrm{d}\mu.$$

Huomataan, että $f_1+f_2 = (f_1^+ - f_1^-) + (f_2^+ - f_2^-) = f_1^+ + f_2^+ - (f_1^- + f_2^-)$, missä $(f_1^+ + f_2^+) \geq 0$ ja $(f_1^- + f_2^-) \geq 0$, ja lisäksi funktiot $(f_1^+ + f_2^+)$ ja $(f_1^- + f_2^-)$ ovat integroituvia. Lasketaan käyttäen jo tiedetty integraalin lineaarisuutta ei-negatiivisten funktioiden tapauksessa:

$$\begin{aligned}
&\int f_1 + f_2\, \mathrm{d}\mu \\
&:= \int (f_1^+ + f_2^+)\, \mathrm{d}\mu - \int (f_1^- + f_2^-)\, \mathrm{d}\mu && \text{integraalin määritelmä (riippumaton jaosta)} \\
&= \int f_1^+\, \mathrm{d}\mu + \int f_2^+\, \mathrm{d}\mu - \Big(\int f_1^-\, \mathrm{d}\mu + \int f_2^-\, \mathrm{d}\mu \Big) && \text{integraalin lineaarisuus ei-negatiivisille funktioille} \\
&= \Big(\int f_1^+\, \mathrm{d}\mu - \int f_1^-\, \mathrm{d}\mu \Big) + \Big(\int f_2^+\, \mathrm{d}\mu - \int f_2^-\, \mathrm{d}\mu \Big) \\
&=: \int f_1\, \mathrm{d}\mu + \int f_2\, \mathrm{d}\mu && \text{integraalin määritelmä.}
\end{aligned}$$

Todistetaan sitten, että

$$\int cf\, \mathrm{d}\mu = c \int f\, \mathrm{d}\mu.$$

Todistetaan tapaus $c \leq 0$. Tapaus $c \geq 0$ todistetaan samaan tapaan. Huomataan, että $cf = cf^+ - cf^- = -cf^- - (-cf^+)$, missä $(-c)f^- \geq 0$ ja $(-c)f^+ \geq 0$ ja lisäksi

[4] Esimerkiksi voidaan todistaa seuraava aputulos, mistä integraalin riippumattomuus jaosta seuraa, sillä $\int h\, \mathrm{d}\mu - \int h\, \mathrm{d}\mu = 0$:

Lemma 3. Olkoon $f = h_1 - h_2$ joillekin funktioille $h_1 \geq 0$ ja $h_2 \geq 0$. Tällöin on olemassa funktio $h \geq 0$ siten, että

$$\begin{cases} h_1 = f^+ + h \\ h_2 = f^- + h. \end{cases}$$

Todistus. Toisaalta tiedetään aikaisemman apulauseen perusteella, että $f = f^+ - f^-$, missä $f^+ := \max\{f, 0\}$ ja $f^- := -\min\{f, 0\}$. Toisaalta oletuksen nojalla $f = h_1 - h_2$. Täten $f^+ - f^- = h_1 - h_2$ eli $h_1 - f^+ = h_2 - f^-$. Määritellään funktio $h := h_1 - f^+ = h_2 - f^-$. Lausekkeen perusteella pätee, että

$$\begin{cases} h_1 = f^+ + h \\ h_2 = f^- + h. \end{cases}$$

On vielä todistettava, että $h \geq 0$. Huomataan, että

$$h(x) = \begin{cases} h_2(x) - f^-(x) = h_2(x) - (-0) = h_2(x) \geq 0 & \text{kun } f(x) \geq 0 \\ h_1(x) - f^+(x) = h_1(x) - 0 = h_1(x) \geq 0 & \text{kun } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

□

funktiot $(-c)f^-$ ja $(-c)f^+$ ovat integroituvia. Lasketaan

$$\begin{aligned}
&\int cf \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int (-c)f^- \,\mathrm{d}\mu - \int (-c)f^+ \,\mathrm{d}\mu && \text{integraalin (jaosta riippumaton) määritelmä} \\
&= (-c)\int f^- \,\mathrm{d}\mu - (-c)\int f^+ \,\mathrm{d}\mu && \text{integraalin lineaarisuus ei-negatiivisille funktioille} \\
&= c \cdot \Big(\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu\Big) \\
&= c \int f \,\mathrm{d}\mu && \text{integraalin määritelmä.}
\end{aligned}$$

Todistetaan lopuksi, että

$$\Big|\int f \,\mathrm{d}\mu\Big| \le \int |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

$$\begin{aligned}
&\Big|\int f \,\mathrm{d}\mu\Big| \\
&= \Big|\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu\Big| && \text{integraalin määritelmä} \\
&\le \Big|\int f^+ \,\mathrm{d}\mu\Big| + \Big|\int f^- \,\mathrm{d}\mu\Big| && \text{kolmioepäyhtälö} \\
&= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu && \text{termien ei-negatiivisuus} \\
&= \int (f^+ + f^-) \,\mathrm{d}\mu && \text{lineaarisuus ei-negatiivisille funktioille} \\
&= \int |f| \,\mathrm{d}\mu && |f| = f^+ + f^-.
\end{aligned}$$

Tehtävä 5. Olkoot $f_n, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integroituvia. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ja $|f_n| \le |g|$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Tällöin dominoidun suppenemisen lauseen erään muotoilun mukaan (luentomuistiinpanojen Lause 7.7.) pätee, että $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Osoita, että tästä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Ratkaisu. Tehtävän 4 mukaan pätee arvio

$$\Big|\int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int (f_n - f) \,\mathrm{d}\mu\Big| \le \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu,$$

mistä seuraa, että $\lim_{n\to\infty} \big|\int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu\big| = 0$, koska oletuksen nojalla $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Tehtävä 6. Laske perustellen

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^3 + (-\frac{1}{2})^n x} \,\mathrm{d}x.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + e^{n(x-1)})^{1/3}} \,\mathrm{d}x.$$

Ratkaisu. "(a)" Määritellään

$$f_n(x) := \frac{1}{x^3 + (-\frac{1}{2})^n x}.$$

Huomataan, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x^3}$.

Etsitään seuraavaksi integroituva dominoiva funktio. Huomataan, että

$$f_n(x) := \frac{1}{x^3 + (-\frac{1}{2})^n x} \leq \frac{1}{x^3 - \frac{1}{2}x}.$$

Huomataan, että millä tahansa vakiolla $0 < c < 1$ pätee, että

$$\begin{aligned} & x^3 - \frac{1}{2}x \geq cx^3 \\ \iff & (1-c)x^3 \geq \frac{1}{2}x \\ \iff & x^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-c} \\ \iff & x \geq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-c}}. \end{aligned}$$

Täten $x^3 - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}x^3$ kunhan $x \geq 1$. Näin ollen

$$\frac{1}{x^3 + (-\frac{1}{2})^n x} \leq \frac{1}{x^3 - \frac{1}{2}x} \leq 2\frac{1}{x^3} =: g(x) \qquad \text{kaikilla } x \geq 1.$$

Huomataan, että $0 \leq g(x)$, $0 \leq f_n \leq g(x)$, ja $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Koska f_n ja g ovat ei-negatiivisia Riemannin mielessä epäoleellisesti integroituvia funktioita, niin (Lauseen 9.2. nojalla) ne ovat myös Lebesguen mielessä integroituvia ja integraalit yhtyvät. Siis dominoidun suppenemisen lauseen edellytykset pätevät:

- Funktiot f_n ja g ovat integroituvia Lebesguen mielessä.
- Pätee $|f_n| \leq g$.

Täten soveltamalla dominoidun konvergenssin lausetta (Tehtävä 5) saadaan:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty x^{-3}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty D_x\big(\frac{1}{-2}x^{-2}\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

"(b)". Määritellään

$$f_n := \frac{1}{(x^2 + e^{n(x-1)})^{1/3}}.$$

Huomataan, että

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{kun } x \in [0,1) \\ 2^{-2/3} & \text{kun } x = 1 \\ 0 & \text{kun } x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Huomataan, että

$$f_n(x) := \frac{1}{(x^2 + e^{n(x-1)})^{1/3}} \leq \begin{cases} \frac{1}{(x^2)^{1/3}} & \text{kun } x \in [0,1] \\ \frac{1}{(e^{n(x-1)})^{1/3}} & \text{kun } x \in [1,\infty) \end{cases} \leq g(x) := \begin{cases} \frac{1}{(x^2)^{1/3}} & \text{kun } x \in [0,1] \\ \frac{1}{e^{(x-1)/3}} & \text{kun } x \in [1,\infty) \end{cases}$$

Huomataan, että $g \geq 0$, $|f_n| \leq g$, ja $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Koska f_n ja g ovat ei-negatiivisia Riemannin mielessä epäoleellisesti integroituvia funktioita, niin (Lauseen 9.2. nojalla) ne ovat myös Lebesguen mielessä integroituvia ja integraalit yhtyvät. Siis dominoidun suppenemisen lauseen edellytykset pätevät:

- Funktiot f_n ja g ovat integroituvia Lebesguen mielessä.
- Pätee $|f_n| \leq g$.

Huomataan, että koska pisteen Lebesguen mitta on nolla (eli $m(\{x_0\}) = 0$, missä m tarkoittaa Lebesguen mittaa), niin yksi piste ei vaikuta integraalin arvoon:

$$\int_{\{x_0\}} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)\int_{\{x_0\}} \mathrm{d}x = f(x_0)m(\{x_0\}) = f(x_0)\cdot 0 = 0.$$

Lasketaan käyttämällä dominoidun suppenemisen lausetta ja integraalin hajottamista osiin:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[0,1)} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{1\}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{(1,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[0,1)} x^{-2/3}\,\mathrm{d}x + \int_{\{1\}} 2^{-2/3}\,\mathrm{d}x + \int_{(1,\infty)} 0\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[0,1)} x^{-2/3}\,\mathrm{d}x + 0 + 0 \\
&= \int_{[0,1)} D_x(3x^{1/3})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[0,1]} D_x(3x^{1/3})\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 D_x(3x^{1/3})\,\mathrm{d}x = 3.
\end{aligned}$$