MITTA JA INTEGRAALI: HARJOITUS 3: ESIMERKKIRATKAISUT (VERSIO 1)

Kurssin luennoi Tuomas Hytönen ja laskuharjoituksia pitää Timo Hänninen.

Tehtävä 1. Laske
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sqrt[3]{x}}{1+nx}\,\mathrm{d}x.$$

Ratkaisu. Määritellään funktio
$$f_n(x) := \frac{n\sqrt[3]{x}}{1+nx} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{n}+x}.$$
Huomataan, että funktio f_n on integroituva Riemannin mielessä, koska se on jatkuva. Näin ollen se on myös integroituva Lebesguen mielessä ja molemmissa mielissä lasketut integraalit ovat yhtäsuuret. Huomataan, että funktiojono f_n on kasvava, koska
$$f_n(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{n}+x} \le \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{n+1}+x} = f_{n+1}(x).$$
Lisäksi pätee
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{n}+x}\Big) = x^{1/3}\cdot x^{-1} = x^{-2/3}.$$
Monotonisen konvergenssin lauseen ja analyysin peruslauseen mukaan
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{-2/3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 D_x(3x^{1/3})\,\mathrm{d}x = 3\cdot 1^{1/3} - 3\cdot 0^{1/3} = 3,\end{aligned}$$
missä D_x tarkoittaa derivaattaa muuttujan x suhteen kohdassa x.

Tehtävä 2. Laske
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\log\Big(1+\frac{x^5}{n}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Ratkaisu (jonka esitti oppilas perjantaisissa laskuharjoituksissa). Määritellään funktio
$$f_n(x) := n\log\Big(1+\frac{x^5}{n}\Big).$$
Huomataan, että funktio f_n on integroituva Riemannin mielessä, koska se on jatkuva. Näin ollen se on myös integroituva Lebesguen mielessä ja molemmissa mielissä lasketut integraalit ovat yhtäsuuret.

Pyritään käyttämään monotonisen konvergessin lausetta. Tätä varten on osoitettava, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on kasvava ja laskettava rajafunktio $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tehdään nämä differentiaalilaskennan avulla.

Lasketaan ensin rajafunktio $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Jotta voidaan käyttää differentiaalilaskentaa, tarkastellaan tilannetta, jossa indeksi $n\in\mathbb{N}$ on luonnollisen luvun sijaan reaaliluku $t \in (0,\infty)$. Kiinnitetään $x \in [0,1]$. Huomataan, että funktio $f_t(x)$ voidaan kirjoittaa osamääränä

$$f_t(x) = \frac{\log\left(1 + \frac{x^5}{t}\right)}{1/t} =: \frac{g(t)}{h(t)},$$

missä $g(t) := \log\left(1 + \frac{x^5}{t}\right)$ ja $h(t) := \frac{1}{t}$. Huomataan, että $\lim_{t\to\infty} g(t) = \log 1 = 0$ ja $\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{1}{\infty} = 0$, joten tässä tapauksessa osamäärän raja-arvoa ei voida laskea osoittajan ja nimittäjän raja-arvojen osamääränä. Huomataan, että sekä osoittaja että nimittäjä ovat derivoituvia välillä $(0,\infty)$ ja raja-arvo $\lim_{t\to\infty} \frac{g'(t)}{h'(t)}$ osataan laskea:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g'(t)}{h'(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{x^5}{1 + \frac{x^5}{t}} = x^5.$$

Näin ollen l'Hospitalin säännön mukaisesti pätee, että

$$\lim_{t\to\infty} f_t(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{h(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{g'(t)}{h'(t)} = x^5.$$

Todistetaan sitten, että funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ on kasvava eli että kullakin kiinteällä x pätee, että $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$. Jotta voidaan käyttää differentiaalilaskentaa, tarkastellaan tilannetta, jossa indeksi n on luonnollisen luvun sijaan reaaliluku t. Osoitetaan, että funktio $t \mapsto f_t(x)$ on kasvava. Kiinnitetään $x \in [0,1]$. Tarkastellaan funktiota $g(t) := t\log\left(1 + \frac{x^5}{t}\right)$. Koska funktio $g(t)$ on derivoituva, se on kasvava täsmälleen silloin, kun $g'(t) \ge 0$. Lasketaan

$$g'(t) = D_t(t\log(1 + \frac{x^5}{t})) = \log(1 + \frac{x^5}{t}) - \frac{\frac{x^5}{t}}{1 + \frac{x^5}{t}}.$$

Huomataan, että derivaatta $g'(t)$ on äärettömyydessä ei-negatiivinen, koska

$$\lim_{t\to\infty} g'(t) = \log(1 + \frac{x^5}{\infty}) - \frac{\frac{x^5}{\infty}}{1 + \frac{x^5}{\infty}} = \log 1 = 0.$$

Näin ollen arvion $g'(t) \ge 0$ toteamiseksi riittää osoittaa, että $g'(t)$ on laskeva, koska tällöin laskevuuden nojalla $g'(t) \ge g'(s)$ kun $t \ge s$, mistä ottamalla rajankäynti $s \to \infty$ saadaan $g'(t) \ge \lim_{s\to\infty} g'(s) = 0$. Koska $g'(t)$ on derivoituva, se on laskeva täsmälleen silloin, kun $g''(t) \le 0$. Todetaan tämä suoralla laskulla:

$$g''(t) = D_t\Big(\log(1 + \frac{x^5}{t}) - \frac{\frac{x^5}{t}}{1 + \frac{x^5}{t}}\Big) = -\frac{x^5}{t^2}\left(\frac{1}{1 + \frac{x^5}{t}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{x^5}{t}\right)^2}\right) < 0.$$

Olemme nyt siis osoittaneet, että $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^5$ ja että $f_n \le f_{n+1}$. Näin ollen voidaan soveltaa monotonisen suppenemisen lausetta:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x = \int_0^1 D_x(\frac{1}{6}x^6)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.$$

Tehtävä 3. Olkoot $f,g : \Omega \to [0,\infty]$ funktioita. Todista ensin, että jokaisella reaaliluvulla $\alpha > 0$ pätee

$$\{fg > \alpha\} = \bigcup_{\beta\in\mathbb{Q}_+} \{f > \beta\} \cap \{g > \frac{\alpha}{\beta}\}.$$

Totea tämän avulla, että mitallisten ei-negatiivisten funktioiden tulo on mitallinen.

Ratkaisu. Todistetaan joukkoyhtäsuuruus todistamalla sisältyvyydet kumpaankin suuntaan.

Ensin todistetaan "$\supseteq$". Olkoon $x \in \bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}_+} \{f > \beta\} \cap \{g > \frac{\alpha}{\beta}\}$, mikä tarkoittaa, että $f(x) > \beta$ ja $g(x) > \frac{\alpha}{\beta}$ jollakin $\beta \in \mathbb{Q}_+$. Täten $f(x)g(x) > \beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} > \alpha$, mikä tarkoittaa, että $x \in \{fg > \alpha\}$.

Sitten todistetaan "$\subseteq$". Olkoon $x \in \{fg > \alpha\}$, mikä tarkoittaa, että $f(x)g(x) > \alpha$. Erityisesti $g(x) > 0$, koska muutoin pätisi $f(x)g(x) = 0$. Täten $f(x) > \frac{\alpha}{g(x)}$. Koska rationaaliluvut ovat tiheässä, niin löytyy $\beta \in \mathbb{Q}_+$, jolle pätee $f(x) > \beta > \frac{\alpha}{g(x)}$. Näin ollen $f(x) > \beta$ ja $\beta > \frac{\alpha}{g(x)}$ eli $g(x) > \frac{\alpha}{\beta}$. Kaikkiaan ollaan todettu, että $x \in \{f > \beta\} \cap \{g > \frac{\alpha}{\beta}\}$ jollakin $\beta \in \mathbb{Q}_+$, mikä tarkoittaa, että $x \in \bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}_+} \{f > \beta\} \cap \{g > \frac{\alpha}{\beta}\}$.

Todetaan lopuksi, että mitallisten ei-negatiivisten funktioiden tulo on mitallinen. Olkoot $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ mitallisia funktioita. On osoitettava, että funktio $fg : \Omega \to [0, \infty]$ on mitallinen. Mitallisuuden määritelmän nojalla funktio fg on mitallinen täsmälleen silloin, kun joukko $\{fg > \alpha\}$ on mitallinen jokaisella $\alpha > 0$. Aiemmin todetun perusteella jokaisella reaaliluvulla $\alpha > 0$ pätee

$$\{fg > \alpha\} = \bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}_+} \{f > \beta\} \cap \{g > \frac{\alpha}{\beta}\}.$$

Huomataan, että jokaisella $\beta \in \mathbb{Q}_+$ joukko $\{f > \beta\}$ on mitallinen, koska funktio f on mitallinen, ja joukko $\{g > \frac{\alpha}{\beta}\}$ on mitallinen, koska funktio g on mitallinen. Näin ollen joukko $\bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}_+} \{f > \beta\} \cap \{g > \frac{\alpha}{\beta}\}$ on mitallinen, koska se on mitallisten joukkojen numeroituva yhdiste. Täten joukkoyhtäsuuruuden nojalla myös joukko $\{fg > \alpha\}$ on mitallinen.

Tehtävä 4. Olkoot E_j erillisiä joukkoja, joilla $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Olkoon kullakin j annettu funktio $f_j : E_j \to \mathbb{R}$, joka on mitallinen E_j:llä eli $\{x \in E_j : f_j(x) > \alpha\}$ on mitallinen joukko jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$. Asettamalla $f(x) = f_j(x)$ kun $x \in E_j$ saadaan koko avaruudella Ω määritelty funktio. Osoita, että näin saatu funktio f on mitallinen.

Ratkaisu. Olkoot E_j erillisiä joukkoja, joilla $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Huomaa, että tämä tarkoittaa, että jokaisella $x \in \Omega$ löytyy täsmälleen yksi E_j siten, että $x \in E_j$.

Olkoon kullakin j annettu funktio $f_j : E_j \to \mathbb{R}$, joka on mitallinen E_j:llä, mikä tarkoittaa, että $\{x \in E_j : f_j(x) > \alpha\}$ on mitallinen joukko jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$. Määritellään funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(x) := f_j(x)$ kun $x \in E_j$. Koska jokaisella $x \in \Omega$ löytyy täsmälleen yksi E_j siten, että $x \in E_j$, niin näin määritelty funktio f on tosiaan funktio (eli se liittää jokaiseen lähtöjoukon alkioon täsmälleen yhden maalijoukon alkion).

Osoitetaan, että funktio f on mitallinen. On osoitettava, että jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$ pätee, että tasojoukko $\{f > \alpha\}$ on mitallinen. Kiinnitetään (mielivaltainen) $\alpha \in \mathbb{R}$. Muistutetaan mieliin, että merkintä $\{f > \alpha\}$ tarkoittaa $\{f > \alpha\} := \{x \in \Omega : f(x) >$

$\alpha\}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
\{f > \alpha\} &= \Omega \cap \{f > \alpha\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap \{f > \alpha\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in E_j : f(x) > \alpha\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in E_j : f_j(x) > \alpha\} \quad \text{funktion } f \text{ määritelmän nojalla } f = f_j \text{ joukossa } E_j
\end{aligned}$$

Oletuksen nojalla joukko $\{x \in E_j : f_j(x) > \alpha\}$ on mitallinen. Näin ollen tasojoukko $\{f > \alpha\}$ saadaan numeroituvana yhdisteenä mitallisista joukoista, joten se on mitallinen.

Tehtävä 5. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus, jolla kaikki nollamittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia: Jos $E \subseteq F$, $F \in \mathcal{F}$ ja $\mu(F) = 0$, niin myös $E \in \mathcal{F}$. Totea, että tällöin myös $\mu(E) = 0$.

Olkoon $N \subseteq \Omega$ nollamittainen (eli $\mu(N) = 0$). Olkoon $g : N^c \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio. Olkoon f funktio, joka yhtyy g:hen N^c:lla eli $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in N^c$. Osoita, että f on mitallinen koko Ω:lla.

Ratkaisu. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus, jolla kaikki nollamittaisten joukkojen osajoukot ovat mitallisia.

Ensimmäinen tehtävänanto on osoittaa, että jokaisen nollamittaisen joukon osajoukon mitta on nolla. Olkoon $F \in \mathcal{F}$ sellainen, että $\mu(F) = 0$. Olkoon $E \subseteq F$. Oletuksen nojalla $E \in \mathcal{F}$. On osoitettava, että $\mu(E) = 0$. Koska $E \subseteq F$, niin mitan monotonisuuden nojalla pätee

$$\mu(E) \leq \mu(F) = 0,$$

joten $\mu(E) = 0$.

Toinen tehtävänanto on osoittaa, että jos funktio f yhtyy mitalliseen funktioon lukuunottamatta jotakin nollamittaista joukkoa, niin tällöin myös f on mitallinen. Olkoon N nolla-mittainen joukko eli $\mu(N) = 0$. Oletetaan, että funktio $g : N^c \to \mathbb{R}$ on mitallinen. Oletetaan, että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in N^c$. Osoitetaan, että tällöin funktio f on mitallinen. Mitallisuuden määritelmän nojalla funktio f on mitallinen täsmälleen silloin, kun $\{f > \alpha\}$ on mitallinen jokaisella $\alpha \in \mathbb{R}$. Kiinnitetään (mielivaltainen) $\alpha \in \mathbb{R}$. Huomataan, että:

$$\{f > \alpha\} = (N \cap \{f > \alpha\}) \cup (N^c \cap \{f > \alpha\}).$$

Koska $N \cap \{f > \alpha\} \subseteq N$ ja $\mu(N) = 0$, niin oletuksen nojalla joukko $N \cap \{f > \alpha\}$ on mitallinen, sillä se on nolla-mittaisen joukon osajoukko. Koska oletuksen nojalla $f = g$ joukossa N^c, niin $N^c \cap \{f > \alpha\} = N^c \cap \{g > \alpha\}$. Oletuksen nojalla funktio $g : N^c \to \mathbb{R}$ on mitallinen, joten joukko $N^c \cap \{g > \alpha\}$ on mitallinen. Kaikkiaan ollaan saatu, että joukko $\{f > \alpha\}$ on mitallinen, koska se on mitallisten joukkojen yhdiste.

Tehtävä 6. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen funktio, jolla on äärellinen integraali eli $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Tarkastellaan mittaa $\phi : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, joka määritellään asettamalla

$$\phi(E) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu \quad \text{kaikilla } E \in \mathcal{F}.$$

Osoita, että tällä mitalla on seuraava jatkuvuusominaisuus: Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos joukolle $E \in \mathcal{F}$ pätee $\mu(E) < \delta$, niin $\phi(E) < \epsilon$.

Ratkaisu. Todistetaan aivan alkuun pieni aputulos:

Lemma 1 (Ei-negatiivisen funktion integraalin äärettömän vakion siirtosääntö)**.** Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen. Tällöin

$$\int \infty \cdot f \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

Todistus. Huomaa, että funktiojono $f_N(x) := Nf(x)$ on kasvava ja $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \infty \cdot f(x)$. Luentomuistiinpanoissa on todistettu, että ei-negatiivisen funktion integraalille pätee äärellisen vakion siirtosääntö (Lemma 5.5.). Monotonisen konvergenssin lauseen ja äärellisen vakion siirtosäännön nojalla:

$$\int \infty \cdot f \, \mathrm{d}\mu = \int \lim_{N\to\infty} (Nf) \, \mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \int Nf \, \mathrm{d}\mu = (\lim_{N\to\infty} N) \int f \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

□

Tämän aputuloksen avulla havaitaan: Jos mitallisen joukon E μ-mitta on nolla, niin tällöin myös sen ϕ-mitta on nolla eli $\phi(E) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$, koska

$$\phi(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E \infty \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \int_E \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(E).$$

Todistetaan tehtävänannon mukainen jatkuvuusominaisuus:

Väite. *(Ratkaisutapa 1) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ äärellinen mitta (eli $\nu(\Omega) < \infty$). Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

(i) Jokaisella mitallisella joukolla E pätee $\nu(E) = 0$ mikäli $\mu(E) = 0$.

(ii) Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jokaisella mitallisella joukolla E pätee $\nu(E) < \epsilon$ mikäli $\mu(E) < \delta$.

Huomio. Huomaa, että mitalla $\nu(E) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ on ominaisuus (i): Jos $\mu(E) = 0$, niin $\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \infty \cdot \mu(E) = \infty \cdot 0 = 0$. Lisäki ominaisuus (ii) on juuri tehtävänannon mukainen jatkuvuusominaisuus. Täten tämä väite kattaa tehtävänannon väitteen.

Todistus. Todistetaan ensin, että ominaisuudesta (ii) seuraa ominaisuus (i). Oletetaan, että ominaisuus (ii) pätee: Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jokaisella mitallisella joukolla E pätee $\nu(E) < \epsilon$ mikäli $\mu(E) < \delta$. Olkoon E mitallinen joukko, jolle $\mu(E) = 0$. Täten $\mu(E) < \delta$ kaikilla $\delta > 0$, joten oletuksen nojalla $\nu(E) < \epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$. Siten $\nu(E) = 0$.

Todistetaan sitten, että ominaisuudesta (i) seuraa ominaisuus (ii) eli:

Ei ole olemassa mitallista joukkoa E, jolla $\nu(E) > 0$ vaikka $\mu(E) = 0$.

$\Longrightarrow$ Jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että jokaisella mitallisella joukolla E pätee $\nu(E) < \epsilon$ mikäli $\mu(E) < \delta$.

Osoitetaan tämä käänteisellä todistuksella (kontrapositiolla). Tällöin on siis osoitettava, että:

Jollakin $\epsilon > 0$ jokaisella $\delta > 0$ on olemassa mitallinen joukko E, jolle $\nu(E) \geq \epsilon$ vaikka $\mu(E) < \delta$.

$\Longrightarrow$ On olemassa mitallinen joukko E, jolla $\nu(E) > 0$ vaikka $\mu(E) = 0$.

Oletetaan siis, että jollakin $\epsilon > 0$ jokaisella $\delta > 0$ on olemassa mitallinen joukko E_δ, jolle $\nu(E_\delta) \geq \epsilon$ vaikka $\mu(E_\delta) < \delta$. Erityisesti (valitsemalla $\delta := 2^{-n}$ kun $n = 1, 2, \ldots$) on olemassa mitalliset joukot E_n siten, että $\nu(E_n) \geq \epsilon$ vaikka $\mu(E_n) \leq 2^{-n}$.

Tarkastellaan joukkoa (kuten Harjoitus 2:sen Tehtävä 5:ssä - tässä välissä on hyvä palauttaa mieleen kyseisen tehtävän ratkaisu!)

$$E := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n.$$

Osoitetaan, että joukko E on etsimämme mitallinen joukko: Joukko, jolle pätee $\nu(E) > 0$ vaikka $\mu(E) = 0$.

Huomaa, että joukkojono $\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$ on vähenevä N suhteen. Joukkojen E_n konstruktion nojalla

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Näin ollen mitan monotonisen suppenemisen perusteella (luentomuistiinpanojen Lauseen 2.4. kohta (4)) pätee

$$\mu(E) = \mu\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\Big) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(E_n) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} = 0.$$

Huomaa, että oletuksen nojalla $\nu(\Omega) < \infty$. Näin ollen mitan monotonisen suppenemisen ja ominaisuuden $\nu\big(\bigcup_{n=N} E_n\big) \geq \nu(E_N) \geq \epsilon$ perusteella

$$\nu(E) = \nu\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\Big) \geq \lim_{N\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\Big) \geq \epsilon.$$

$\square$

Esitetään tehtävänannon mukaiselle jatkuvuusominaisuudelle vaihtoehtoinen todistus:

Väite (Ratkaisutapa 2)**.** *Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mitta-avaruus. Olkoon $f : \Omega \to [0, \infty]$ mitallinen funktio. Määritellään mitta $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ asettamalla*

$$\nu(E) := \int_E f \,\mathrm{d}\mu \quad \textit{kaikilla } E \in \mathcal{F}.$$

Oletetaan, että $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \infty$; toisin sanoen oletetaan, että mitta ν on äärellinen eli $\nu(\Omega) < \infty$. Tällöin jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa äärellinen luku $N_\epsilon > 0$ siten, että

$$\nu(E) \leq N_\epsilon \mu(E) + \epsilon \quad \textit{kaikilla } E \in \mathcal{F}.$$

Huomio. Huomaa, että luvulle $N_{\epsilon/2}$ pätee arvio

$$\nu(E) \leq N_{\epsilon/2}\mu(E) + \epsilon/2 \quad \text{kaikilla } E \in \mathcal{F}.$$

Täten arvion perusteella valinnalla $\delta_\epsilon := \epsilon/(2N_{\epsilon/2})$ toteutuu tehtävänannon mukainen jatkuvuusominaisuus: Jokaisella $\epsilon > 0$ pätee, että $\nu(E) < \epsilon$ mikäli $\mu(E) < \delta_\epsilon$.

Väitteen todistus. Huomataan, että joukkojono $\{f > N\}$ on laskeva. Lisäksi pätee

$$\cap_{N=1}^{\infty}\{f > N\} = \{f = \infty\}.$$

Oletuksen nojalla $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Mitan monotonisen suppenemisen lauseen (Lause 2.4.) nojalla (tässä yhteydessä sovellettuna mittaan $E \mapsto \int_E f \,\mathrm{d}\mu$) saadaan

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{f>N\}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\cap_{N=1}^{\infty}\{f>N\}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{f=\infty\}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{f=\infty\}} \infty \,\mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(\{f = \infty\}).$$

Pätee, että joko $\mu(\{f = \infty\}) = 0$ tai $\mu(\{f = \infty\}) > 0$. Jälkimmäinen vaihtoehto aiheuttaisi, että $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \geq \lim_{N\to\infty} \int_{\{f>N\}} f \, \mathrm{d}\mu = \infty$, mikä on poissuljettu oletuksen $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \infty$ nojalla. Siten $\mu(\{f = \infty\}) = 0$. Näin ollen $\infty \cdot \mu(\{f = \infty\}) = \infty \cdot 0 = 0$, joten

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\{f>N\}} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän nojalla löytyy N_ϵ siten, että $\int_{\{f>N_\epsilon\}} f \, \mathrm{d}\mu < \epsilon$. Olkoon E mitallinen. Lasketaan:

$$\begin{aligned}
\int_E f \, \mathrm{d}\mu &= \int_{E\cap\{f\leq N_\epsilon\}} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{E\cap\{f>N_\epsilon\}} f \, \mathrm{d}\mu && \text{integraalin additiivisuus} \\
&\leq \int_E N_\epsilon \, \mathrm{d}\mu + \int_{\{f>N_\epsilon\}} f \, \mathrm{d}\mu && \text{integraalin monotonisuus} \\
&\leq N_\epsilon \int_E \mathrm{d}\mu + \epsilon && \text{vaatimus } \int_{\{f>N_\epsilon\}} f \, \mathrm{d}\mu < \epsilon \\
&\leq N_\epsilon \mu(E) + \epsilon && \int_E \mathrm{d}\mu := \int 1_E \, \mathrm{d}\mu := \mu(E).
\end{aligned}$$

□

Väite (Ratkaisutapa 3)**.** *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *mitta-avaruus. Olkoon* $f : \Omega \to [0, \infty]$ *mitallinen funktio, jolla on äärellinen integraali eli* $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \infty$*. Määritellään mitta* $\phi : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ *asettamalla*

$$\phi(E) := \int_E f \, \mathrm{d}\mu \quad \textit{kaikilla } E \in \mathcal{F}.$$

Tällöin jokaisella $\epsilon > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *siten, että jokaisella mitallisella joukolla* E *pätee* $\phi(E) < \epsilon$ *mikäli* $\mu(E) < \delta$*.*

Todistus. Seurataan tehtävänannon vihjeitä.

(a) Tehdään vastaoletus: On olemassa $\epsilon > 0$ siten, että jokaisella $\delta > 0$ on olemassa mitallinen joukko E_δ siten, että $\phi(E_\delta) \geq \epsilon$ vaikka $\mu(E_\delta) < \delta$. Valitaan nyt jokaista $\delta_n := \frac{1}{2^n}$, kun $n = 1, 2, \ldots$, kohden tällainen joukko E_n.

(b) Olkoon $F_n := \bigcup_{k\geq n} E_k$. Koska

$$F_n = \bigcup_{k\geq n} E_k = \Big(\bigcup_{k\geq n+1} E_k\Big) \cup E_n \supseteq \bigcup_{k\geq n+1} E_k = F_{n+1},$$

niin joukkojono on laskeva eli $F_n \supseteq F_{n+1}$.

(c) Havaitaan, että $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\Big) = 0$, koska kuten Harjoitus 2:n Tehtävä 5:n ratkaisussa saadaan

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k\geq n} E_k\Big) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^\infty \mu(E_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{2^k} = 0.$$

(d) Huomataan, että myös $\phi\Big(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\Big) = 0$, koska

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\Big) &:= \int_{\bigcap_{n=1}^\infty F_n} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{\bigcap_{n=1}^\infty F_n} \infty \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \int_{\bigcap_{n=1}^\infty F_n} \mathrm{d}\mu \\
&= \infty \cdot \int 1_{\bigcap_{n=1}^\infty F_n} \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu\Big(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\Big) = \infty \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Huomaa, että kullakin $n = 1, 2, \ldots$ pätee, että

$$\phi(F_n) = \phi(F_n \cap F_j) + \phi(F_n \setminus F_j) = \phi(F_j) + \phi(F_n \setminus F_j)$$

kun $j \geq n$, koska jono F_n on laskeva. Soveltamalla tähän yhtälöön mitan monotonisen suppenemisen lausetta (tukeutumalla oletukseen $\phi(\Omega) := \int_\Omega f \, d\mu < \infty$) ja huomiota $\phi\big(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\big) = 0$ saadaan

$$\phi(F_n) = \lim_{j\to\infty} (\phi(F_j) + \phi(F_n \setminus F_j)) = \lim_{j\to\infty} \phi(F_j) + \lim_{j\to\infty} \phi(F_n \setminus F_j)$$

$$= \phi\Big(\bigcap_{j=1}^\infty F_j\Big) + \lim_{j\to\infty} \phi(F_n \setminus F_j) = 0 + \lim_{j\to\infty} \phi(F_n \setminus F_j) = \lim_{j\to\infty} \phi(F_n \setminus F_j).$$

(e) Huomaa, että vastaoletuksen nojalla $\phi(F_n) = \phi\big(\bigcup_{k=n}^\infty E_k\big) \geq \phi(E_n) \geq \epsilon$. Siis $\phi(F_n) > 0$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Koska $\lim_{j\to\infty} \phi(F_1 \setminus F_j) = \phi(F_1)$ ja $\phi(F_1) > \frac{1}{2}\phi(F_1)$, niin raja-arvon määritelmän nojalla löytyy n_1 siten, että $\phi(F_1 \setminus F_{n_1}) \geq \frac{1}{2}\phi(F_1)$. Samaan tapaan koska $\lim_{j\to\infty} \phi(F_{n_1} \setminus F_j) = \phi(F_{n_1})$ ja $\phi(F_{n_1}) > \frac{1}{2}\phi(F_{n_1})$, niin löytyy $n_2 > n_1$ siten, että $\phi(F_{n_1} \setminus F_{n_2}) \geq \frac{1}{2}\phi(F_{n_1})$. Jatkamalla näin löydetään $n_1 < n_2 < \ldots$ siten, että

$$\phi(F_{n_k} \setminus F_{n_{k+1}}) \geq \frac{1}{2}\phi(F_{n_k}).$$

(f) Koska joukkojono $(F_{n_k})_{k=1}^\infty$ on joukkojonon $(F_n)_{n=1}^\infty$ osajono ja joukkojono $(F_n)_{n=1}^\infty$ on laskeva, niin joukkojono $(F_{n_k})_{k=1}^\infty$ on myös laskeva. Näin ollen joukot $F_{n_k} \setminus F_{n_{k+1}}$ ovat erillisiä. Huomaa lisäksi, että jo aikaisemmin todetun perusteella $\phi(F_{n_k}) \geq \epsilon$. Näin ollen käyttämällä täysadditiivisuutta saadaan:

$$\phi\Big(\bigcup_{k=1}^\infty F_{n_k} \setminus F_{n_{k+1}}\Big) = \sum_{k=1}^\infty \phi(F_{n_k} \setminus F_{n_{k+1}}) \geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2}\phi(F_{n_k}) \geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2}\epsilon = \infty.$$

Toisaalta oletuksen nojalla

$$\phi\Big(\bigcup_{k=1}^\infty F_{n_k} \setminus F_{n_{k+1}}\Big) \leq \phi(\Omega) < \infty.$$

Näin ollaan löydetty ristiriita.

□