MITTA JA INTEGRAALI: HARJOITUS 2: ESIMERKKIRATKAISUT (VERSIO 1)

Kurssin luennoi Tuomas Hytönen ja laskuharjoituksia pitää Timo Hänninen.

Tehtävissä 1,3,4,5 oletetaan, että tarkastellaan yleistä mitta-avaruutta $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Muistutetaan mieliin mitan ominaisuuksista käytetyt nimitykset:

- *Täysadditiivisuus* ja *σ-additiviisuus* kumpikin tarkoittavat mitan määritelmässä esiintyvää ominaisuutta:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{mikäli } A_1, A_2, \ldots \text{ ovat erillisiä mitallisia joukkoja.}$$

- *Monotonisuus* tarkoittaa ominaisuutta:

$$\mu(A) \leq \mu(B) \quad \text{mikäli } A \text{ ja } B \text{ mitallisia joukkoja, joille } A \subseteq B.$$

Useissa tehtävissä käytetään joukkojen käsittelyn perustietotaitoa (joka on tähdellistä käydä läpi itselleen!), kuten:

- $A \cap B = \varnothing \iff$ Jos $x \in A$, niin $x \notin B$. $\iff$ Jos $x \in B$, niin $x \notin A$.
- $A \subseteq B \iff A^c \supseteq B^c$.

Tehtävä 1. Olkoot $A_n, n = 1, 2, \ldots$, mitallisia joukkoja. Osoita, että

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ratkaisu. Olkoot $A_n, n = 1, 2, \ldots$, mitallisia joukkoja. Jotta voidaan käyttää mitan σ-additiivisuutta, pyritään kirjoittamaan nämä joukot ja niiden yhdiste erillisten apujoukkojen avulla. Huomataan (piirrä Vennin diagrammi!), että

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Big(A_N \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n\Big),$$

ja lisäksi joukot $A_N \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n$, $N = 1, 2, \ldots$, ovat erillisiä. Todistetaan seikkaperäisesti tämä joukkoja koskeva huomio seuraavana apulauseena:

Lemma 1. Olkoot $A_1, A_2, \ldots$ joukkoja. Tällöin joukot $A_N \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n$, $N = 1, 2, \ldots$, ovat erillisiä ja lisäksi pätee

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Big(A_N \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n\Big).$$

Lemman todistus. Erillisyys nähdään seuraavasti: Osoitetaan, että jos $x \in A_N \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n$, niin $x \notin A_M \setminus \bigcup_{m=1}^{M-1} A_m$. Tarkastellaan tapausta $N > M$ (tapaus $N < M$ voidaan käsitellä samaan tapaan). Oletetaan, että $x \in A_N \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n$. Tällöin joukon $A_N \setminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n$ lausekkeen nojalla $x \notin A_n$ millään $n = 1, \ldots, M, \ldots, N-1$. Erityisesti $x \notin A_M$ ja siten $x \notin A_M \setminus \bigcup_{m=1}^{M-1} A_m$.

Yhtäsuuruuden suunta "$\supseteq$" on selvä, ja suunta "$\subseteq$" nähdään seuraavasti: Olkoon $x \in \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$. Tällöin yhdisteen määritelmän nojalla $x \in A_N$ jollakin N. Valitaan pienin tällainen N. Siten

$$\begin{aligned} & x \in A_N \quad \text{ja} \quad x \notin A_n \text{ millään } n = 1, \dots, N-1. \\ \iff & x \in A_N \quad \text{ja} \quad x \notin \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n \\ \iff & x \in A_N \smallsetminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n. \end{aligned}$$

□

Lisäksi apujoukot $A_N \smallsetminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n$, $N = 1, 2, \dots$, ovat mitallisia, koska ne on saatu mitallisista joukoista $A_1, A_2, \dots$ numeroituvilla (tässä tapauksessa äärellisillä) joukko-operaatioilla (yhdisteen, leikkauksen ja komplementin ottaminen).

Osoitetaan nyt näiden apujoukkojen avulla, että $\mu\big(\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N\big) \le \sum_{N=1}^{\infty} \mu(A_N)$. Lasketaan:

$$\begin{aligned} \mu\Big(\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{N=1}^{\infty} \Big(A_N \smallsetminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n\Big)\Big) && \text{joukkojen yhtäsuuruus} \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \mu\Big(A_N \smallsetminus \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n\Big) && \sigma\text{-additiivisuus erillisille joukoille} \\ &\le \sum_{N=1}^{\infty} \mu(A_N). && \text{monotonisuus.} \end{aligned}$$

Tehtävä 2. Osoita, että joukolla $\Omega = \mathbb{Q}$ ei ole olemassa mittaa $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, joka toteuttaa seuraavat ominaisuudet:

(a) $\mathcal{F}$ on σ-algebra, joka sisältää kaikki rationaalivälit $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, missä $a, b \in \mathbb{Q}$ ja $a < b$.
(b) $\mu((a, b] \cap \mathbb{Q}) = b - a$.

Ratkaisu. Oletetaan, että $\Omega = \mathbb{Q}$ ja $\mathcal{F}$ jokin $\mathbb{Q}$:n σ-algebra, joka sisältää kaikki rationaalivälit $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, missä $a, b \in \mathbb{Q}$ ja $a < b$. Olkoon $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mitta. Nyt on osoitettava, että mitta μ ei voi toteuttaa ehtoa

$$\mu((a, b] \cap \mathbb{Q}) = b - a \quad \text{kaikilla } a, b \in \mathbb{Q}, \text{ joilla } a < b. \tag{0.1}$$

Huomataan ensin, että oletuksen mukaisessa σ-algebrassa jokaisen rationaalipisteen yksikkö on mitallinen:

Lemma 2. Olkoon $\mathcal{F}$ joukon $\mathbb{Q}$ σ-algebra. Oletetaan, että jokainen puoliavoin rationaaliväli on mitallinen. Tällöin jokaisella $q \in \mathbb{Q}$ yksikkö $\{q\}$ on mitallinen.

Lemman todistus. Kiinnitetään $q \in \mathbb{Q}$. Valitaan jono rationaalilukuja q_n siten, että

$$\bullet\ q_n < q, \quad \bullet\ q_n < q_{n+1}, \quad \bullet\ \lim_{n\to\infty} q_n = q.$$

(Voidaan valita esimerkiksi $q_n := q - \frac{1}{n}$.) Määritellään joukkojono $I_n := (q_n, q] \cap \mathbb{Q}$. Huomataan (piirrä kuva!), että $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{q\}$. Osoitetaan tämä. Sisältyvyys "$\supseteq$" on selvä, ja sisältyvyys "$\subseteq$" nähdään seuraavasti: Olkoon $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}$ eli $q_n < x \le q$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$. Koska $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, niin rajankäynnillä saadaan $q \le x \le q$ eli $x = q \in \{q\}$.

Koska jokainen puoliavoin väli $I_n := (q_n, q] \cap \mathbb{Q}$ on oletuksen nojalla mitallinen, niin myös $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ on mitallinen, sillä mitallisuus säilyy numeroituvissa joukko-operaatioissa. Täten $\{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ on myös mitallinen. □

Osoitetaan nyt, että mitta μ ei voi täyttää ehtoa (0.1). Osoitetaan se vastaoletuksella: Oletetaan, että μ täyttää ehdon ja päädytään sitten ristiriitaan.

Osoitetaan ensin, että ehdosta seuraa, että $\mu(\{q\}) = 0$ jokaisella $q \in \mathbb{Q}$. Olkoon $q \in \mathbb{Q}$. Huomataan (kuten edellisen lemman todistuksessa), että $q \in (q - \frac{1}{n}, q] \cap \mathbb{Q}$. Lemman nojalla $\{q\}$ on mitallinen. Lisäksi väli $(q - \frac{1}{n}, q] \cap \mathbb{Q}$ on oletuksen nojalla mitallinen, koska $q - \frac{1}{n}$ on rationaaliluku. Mitan monotonisuuden ja oletetun ehdon (0.1) nojalla saadaan

$$\mu(\{q\}) \leq \mu((q - \frac{1}{n}, q] \cap \mathbb{Q}) = q - (q - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}.$$

Siis $\mu(\{q\}) \leq \frac{1}{n}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, joten (esimerkiksi ottamalla epäyhtälöstä rajankäynti $n \to \infty$) nähdään, että $\mu(\{q\}) = 0$.

Nyt olemme valmiita löytämään ristiriidan. Olkoot a ja b rationaalilukuja, joille $a < b$. Lasketaan välin $(a, b] \cap \mathbb{Q}$ pituus kahdella eri tavalla ja päädytään ristiriitaan. Toisaalta mitan oletetun ehdon (0.1) nojalla

$$\mu((a, b] \cap \mathbb{Q}) = b - a,$$

toisaalta

$$\begin{aligned}
\mu(\mu((a,b] \cap \mathbb{Q})) &= \mu\Big(\bigcup_{q \in (a,b] \cap \mathbb{Q}} \{q\}\Big) && \text{joukkojen yhtäsuuruus} \\
&= \sum_{q \in (a,b] \cap \mathbb{Q}} \mu(\{q\}) && \sigma\text{-additiivisuus, huomioiden } \mathbb{Q}\text{:n numeroituvuus} \\
& && \text{ja yksikön } \{q\} \text{ mitallisuus} \\
&= \sum_{q \in (a,b] \cap \mathbb{Q}} 0 = 0 && \text{mitalle } \mu \text{ osoitettu ominaisuus } \mu(\{q\}) = 0.
\end{aligned}$$

Näin ollaan saavutettu ristiriita $0 < b - a = 0$.

Tehtävä 3. Osoita: Olkoot $A_1, A_2, \ldots$ mitallisia. Jos $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ ja $\mu(A_1) < \infty$, niin

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Ratkaisu. Huomataan, että laskeva joukkojono ja sen leikkaus voidaan ilmaista nousevan joukkojonon ja sen yhdisteen avulla:

- Huomataan, että jos $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, niin $(A_1 \setminus A_1) \subseteq (A_1 \setminus A_2) \subseteq \ldots$.
- Lisäksi joukko-operaatioiden laskusääntöjen mukaisesti pätee, että

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n &= A_1 \setminus \Big(A_1 \setminus \big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\big)\Big) && \text{sääntö } A_1 \setminus (A_1 \setminus A) = A \text{ eli } A^{cc} = A \\
&= A_1 \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\Big) && \text{De Morganin laki.}
\end{aligned}$$

Muistetaan, että nousevalle joukkojonolle on jo todistettu seuraava vastaavanlainen tulos (luentomuistiinpanojen Lauseen 2.4 kohta (3)): Olkoot joukot $B_1, B_2, \ldots$ mitallisia. Jos $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$, niin $\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big)$. Pyritään palauttamaan tehtävänannon mukainen tulos tähän jo tunnettuun tulokseen.

Havaitaan tähän väliin pieni aputulos:

Lemma 3 (Sisäkkäisten joukkojen erotuksen mitta on mittojen erotus)**.** Olkoon A ja B mitallisia joukkoja, joille $A \subseteq B$. Oletetaan, että $\mu(A) < \infty$. Tällöin

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Lemman todistus. Huomataan, että $B = B \setminus A \cup A$, missä joukot $B \setminus A$ ja A ovat erillisiä. Täten joukkojen samuuden ja mitan additiivisuuden nojalla

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A \cup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A).$$

Näin ollen $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, missä huomioitiin oletus, että $\mu(A) < \infty$. $\square$

Oletuksen nojalla $\mu(A_1) < \infty$, joten jokainen seuraavassa laskussa esiintyvä joukko on mitaltaan äärellinen ja siksi epämielekästä erotusta $\infty - \infty$ ei esiinny. Nyt voidaan laskea:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \mu\Big(A_1 \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\Big)\Big) && \text{samat joukot} \\
&= \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\Big) && \text{joukkojen erotuksen mitta} \\
&= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) && \text{nousevan joukkojonon raja-arvo} \\
&= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) && \text{joukkojen erotuksen mitta} \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Tehtävä 4. Osoita, että mitan määritelmässä ehto $\mu(\varnothing) = 0$ voidaan lieventää muotoon: On olemassa ainakin yksi mitallinen joukko A, jolle $\mu(A) < \infty$.

Ratkaisu. Olkoon Ω joukko ja $\mathcal{F}$ joukon Ω σ-algebra. Oletetaan, että $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ on kuvaus, joka on täysadditiivinen. On osoitettava, että tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.
(ii) Jollekin $A \in \mathcal{F}$ pätee $\mu(A) < \infty$.

Huomataan, että (i):stä seuraa (ii), koska tällöin voidaan valita $A = \varnothing$ kohtaan (ii), sillä $\varnothing \in \mathcal{F}$ σ-algebran määritelmän nojalla. Osoitetaan sitten, että (ii):sta seuraa (i).

Oletetaan, että on olemassa joukko $A \in \mathcal{F}$, jolle $\mu(A) < \infty$. Osoitetaan, että tällöin $\mu(\varnothing) = 0$. Huomataan, että seuraavat yhtälöt ovat yhtäpitäviä (ja siten tosia, koska ensimmäinen niistä on tosi täysadditiivisuuden nojalla):

$$\begin{aligned}
&\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots) = \mu(A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\varnothing) && \sigma\text{-additiivisuus} \\
\iff\ & 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\varnothing) && \text{koska } \mu(A) < \infty \\
\iff\ & \mu(\varnothing) = 0.
\end{aligned}$$

Tehtävä 5. Olkoot $A_n, n = 1, 2, \ldots,$ mitallisia joukkoja. Olkoon

$$A := \{x \in \Omega : x \text{ kuuluu äärettömän moneen joukkoon } A_n\}.$$

(a) Esitä joukko A joukkojen A_n ja tavallisten joukko-operaatioiden (yhdiste, leikkaus, komplementti) avulla.
(b) Osoita: Jos $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, niin $\mu(A) = 0$.

Ratkaisu, kohta (a). Olkoon $x \in \Omega$. Huomataan, että seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:

$$\begin{aligned} &\text{Piste } x \text{ kuuluu äärettömän moneen joukkoon } A_n. \\ \iff &\text{Jokaisella luvulla } N \text{ on olemassa luku } n \geq N \text{ siten, että } x \in A_n. \end{aligned}$$

On monta eri tapaa nähdä näiden väittämien yhtäpitävyys. Se, mikä näistä tavoista on itselleen selkein on henkilökohtaista. Esitetään kohta kaksi eri seikkaperäistä todistusta yhtäpitävyydelle, mutta ratkaistaan ensin kohta (a) olettaen, että yhtäpitävyys tiedetään. Kirjoitetaan jälkimmäinen väittämä joukkomerkintöjen avulla hyödyntäen yhdisteen ja leikkauksen määritelmiä:

$$\begin{aligned} &\text{Jokaisella luvulla } N \text{ on olemassa luku } n \geq N \text{ siten, että } x \in A_n. \\ \iff &\text{Jokaisella luvulla } N \text{ pätee } x \in \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n. \\ \iff &\text{Pätee } x \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n. \end{aligned}$$

Siis ollaan saatu:

$$\{x \in \Omega : x \text{ kuuluu äärettömään moneen joukkoon } A_n\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n.$$

Esitetään nyt kaksi eri todistusta yhtäpitävyydelle:

Lemma 4. Olkoon $x \in \Omega$ ja A_n, missä $n = 1, 2, \ldots$, joukon Ω osajoukkoja. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:

(i) Piste x kuuluu äärettömän moneen joukkoon A_n.
(ii) Jokaisella luonnollisella luvulla N on olemassa luonnollinen luku $n \geq N$ siten, että $x \in A_n$.

Lemman todistus, eräs tapa. Osoitetaan ensin suunta "(i) $\implies$ (ii)". Oletetaan, että piste x kuuluu äärettömän moneen joukkoon A_n. Kiinnitetään mielivaltainen N. Joukkoja A_n, joilla $n = 1, \ldots, N$, on vain äärellisen monta. Jos x kuuluisi vain näihin joukkoihin, niin tällöin x kuuluisi vain äärellisen moneen joukkoon, mikä ei ole mahdollista oletuksen nojalla. Täten x:n on kuuluttava johonkin joukkoon A_n kun $n = N+1, N+2, \ldots$.

Osoitetaan sitten suunta "(i) $\impliedby$ (ii)". Oletetaan, että jokaisella luvulla N on olemassa luku $n \geq N$ siten, että $x \in A_n$. Edetään rekursiivisesti:

- Lähdetään ensin liikkeelle luvusta $N_1 := 1$. Oletuksen nojalla on olemassa luku $n_1 \geq 1$ siten, että $x \in A_{n_1}$.
- Jatketaan sitten luvusta $N_2 := n_1 + 1$. Oletuksen nojalla on olemassa luku $n_2 \geq N_2$ siten, että $x \in A_{n_2}$. Huomaa, että $n_2 \geq N_2 := n_1 + 1 > n_2$, joten $n_2 > n_1$.
- Jatketaan sitten luvusta $N_3 := n_2 + 1$. Oletuksen nojalla on olemassa luku $n_3 \geq N_3$ siten, että $x \in A_{n_2}$. Huomaa, että $n_3 \geq N_3 := n_2 + 1 > n_2$, joten $n_3 > n_2$.

Näin jatkamalla saadaan ääretön jono $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ luonnollisia lukuja (luonnollisten lukujen osajono) siten, että $x \in A_{n_m}$ kaikilla $m = 1, 2, \ldots$. Siten x kuuluu äärettömän moneen A_n.

$\square$

Lemman todistus, eräs toinen tapa. Huomataan, että seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:

Piste x kuuluu korkeintaan äärellisen moneen joukkoon A_n.

$\iff$ On olemassa luku N siten, että $x \notin A_n$ millään luvulla $n \geq N$.

Näin ollen seuraat väittämät (edellisten väittämien negaatiot) ovat yhtäpitäviä:

Piste x kuuluu äärettömään moneen joukkoon A_n.

$\iff$ Ei ole totta, että on olemassa luku N siten, että $x \notin A_n$ millään luvulla $n \geq N$.

Jälkimmäinen väittämä voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi:

Ei ole totta, että on olemassa luku N siten, että $x \notin A_n$ millään luvulla $n \geq N$.

$\iff$ Jokaisella luvulla N on olemassa luku $n \geq N$ siten, että $x \in A_n$.

□

Ratkaisu, kohta (b). Käyttäen kohdan (a) ratkaisussa löydettyä esitystä joukolle A,

$$A = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n,$$

muotoillaan kohta (b) seuraavana väittämänä:

Väite. *Olkoon $A_n, n = 1, 2, \ldots,$ mitallisia joukkoja. Oletetaan, että*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Tällöin

$$\mu\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \Big) = 0.$$

Todistus. Muistetaan alkuun analyysin perustietotaidon nojalla [1], että summautuvan sarjan häntä suppenee nollaan eli

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Todistetaan seuraavaksi joukon $\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ mitalle arvio

$$\mu\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \Big) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{kaikilla } N = 1, 2, \ldots,$$

---

[1] Tämä voidaan nähdään esimerkiksi seuraavasti. Sarjan summan määritelmän ja oletuksen $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ mukaan merkintä $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ tarkoittaa sitä reaalilukua, jolle pätee

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

ja vastaavasti merkintä $\sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n)$ tarkoittaa sitä reaalilukua, jolle pätee

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=N}^{M} \mu(A_n) = \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n).$$

Huomaa, että $\sum_{n=N}^{M} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{M} \mu(A_n) - \sum_{n=1}^{N-1} \mu(A_n)$. Siten

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) &= \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \sum_{n=N}^{M} \mu(A_n) = \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{M} \mu(A_n) - \sum_{n=1}^{N-1} \mu(A_n) \Big) \\ &= \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{M} \mu(A_n) - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0.\end{aligned}$$

mistä yhtäsuuruus $\mu\big(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\big) = 0$ seuraa ottamalla rajankäynti $N \to \infty$. Tämä arvio nähdään seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\Big)\Big) &\le \mu\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\Big) && \text{monotonisuus,} \\
& && \text{huomioiden, että } \bigcap_{N=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\Big) \subseteq \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \\
&\le \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) && \text{Tehtässä 1 todistettu } \textit{subadditiivisuus.}
\end{aligned}
$$

□

Tehtävä 6. Olkoon $\Omega = \mathbb{Z}_+ := \{1, 2, \ldots\}$, olkoon $\mathcal{F}$ sen kaikkien osajoukkojen kokoelma, ja olkoon μ *pistelaskurimitta*, eli $\mu(A) :=$ joukon A alkioiden lukumäärä.

(a) Totea, että jokainen funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty]$ on mitallinen.
(b) Osoita integraalin määritelmästä, että $\int_{\mathbb{Z}_+} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Ratkaisu. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ seuraava mitta-avaruus: $\Omega := \mathbb{Z}_+ := \{1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{F} := \{A \subseteq \mathbb{Z}_+\}$, ja μ on pistelaskurimitta (eli joukon A mitta $\mu(A)$ on sen alkioiden lukumäärä). Osoitetaan, että jokainen funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty]$ on mitallinen ja yhtäsuuruus

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

pätee.

Olkoon $f : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty]$ funktio. Todetaan ensin, että f on mitallinen: Mitallisuuden määritelmän mukaan f on mitallinen jos ja vain jos jokaisella $a \in [0, \infty)$ joukon $\mathbb{Z}_+$ osajoukko $\{n \in \mathbb{Z}_+ : f(n) > a\}$ on mitallinen. Tämä on oletuksiemme nojalla selvästi totta, koska valitsimme mitallisiksi joukoiksi kaikki joukon $\mathbb{Z}_+$ osajoukot.

Muistetaan, että ei-negatiivisen mitallisen funktion integraali määritellään pienimpänä alarajana:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sup\{\int s \,\mathrm{d}\mu : s : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty] \text{ yksinkertainen, } s \le f,\ s < \infty\}.$$

Käytetään vastedes merkintää

$$S_f := \{\int s \,\mathrm{d}\mu : s : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty] \text{ yksinkertainen, } s \le f,\ s < \infty\}.$$

Osoitetaan yhtäsuuruus $\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. On siis osoitettava, että luku $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ on lukujoukon $\{\int s \,\mathrm{d}\mu\}_{s \in S_f}$ pienin yläraja.

Funkio f voi saada arvon ääretön. Pistelaskurimitan ollessa kyseessä tämä tapaus on kätevää käsitellä erikseen: Oletetaan, että $f(n) = \infty$ jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty$. Tarkastellaan funktiota $s_N := N 1_{\{n\}} + 0 \cdot 1_{\{m \in \mathbb{Z}_+ : m \neq n\}}$, joka selvästi on yksinkertainen sekä täyttää ehdot $s_N \le f$ ja $s < \infty$. Siis $s \in S_f$. Ei-negatiivisen yksinkertaisen funktion integraalin määritelmän nojalla

$$\int S_N \,\mathrm{d}\mu = N \cdot \mu(\{n\}) + 0 \cdot \mu(\{m \in \mathbb{Z}_+ : m \neq n\}) = N \cdot 1 + 0 \cdot \infty = N.$$

Näin ollen

$$N = \int s_N \,\mathrm{d}\mu \le \sup_{s \in S_f} \int s \,\mathrm{d}\mu =: \int f \,\mathrm{d}\mu \quad \text{kaikilla } N = 1, 2, \ldots.,$$

joten $\int f \, \mathrm{d}\mu = \infty$. Siis tapauksessa, missä f saa arvon ääretön jossakin pistessä, pätee

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty.$$

Oletetaan vastedes, että f saa vain äärellisiä arvoja. Osoitetaan ensin, että luku $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ on joukon $\{\int s \, \mathrm{d}\mu\}_{s \in S_f}$ yläraja. Olkoon $s : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty]$ yksinkertainen funktio. Muistetaan, että määritelmän mukaan tämä tarkoittaa, että funktio s voidaan kirjoittaa muodossa

$$s = \sum_{k=1}^{K} a_k 1_{A_k} \quad \text{jollakin } \mathbb{Z}_+\text{:n osituksella } A_1, A_2, \ldots, A_K.$$

Huomaa, että tämän lausekkeen nojalla pätee $s(n) = a_k$ kaikilla $n \in A_k$. Oletetaan, että $s \leq f$, mikä tarkoittaa, että $s(n) \leq f(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Muistetaan, että ei-negatiivisen yksinkertaisen funktion integraali määritellään asettamalla

$$\int s \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{K} a_k \mu(A_k).$$

Arvioidaan seuraavaksi tätä lukua ylhäältäpäin:

$$\begin{aligned}
\int s \, \mathrm{d}\mu &:= \sum_{k=1}^{K} a_k \mu(A_k) && \text{yksinkertaisen funktion integraalin määritelmä} \\
&= \sum_{k=1}^{K} a_k \sum_{n \in A_k} 1 && \text{pistelaskurimitalle pätee } \mu(A) := \sum_{n \in A} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{K} \sum_{n \in A_k} a_k \cdot 1 && \text{sarjan summan laskusäännöt} \\
&= \sum_{k=1}^{K} \sum_{n \in A_k} s(n) && \text{funktion } s \text{ määritelmän nojalla } s(n) = a_k \text{ kaikilla } n \in A_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{K} \sum_{n \in A_k} f(n) && \text{oletuksen mukaan } s(n) \leq f(n) \text{ kaikilla } n \in \mathbb{Z}_+ \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) && \text{ei-negatiivisten termien sarjan summa on riippumaton} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) && \text{summausjärjestyksestä, joten pätee } \sum_{k=1}^{K} \sum_{n \in A_k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \\
& && \text{ja } \sum_{n \in \mathbb{Z}} = \sum_{n=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

Todistetaan seuraavaksi, että luku $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ on joukon $\{\int s \, \mathrm{d}\mu\}_{s \in S_f}$ pienin yläraja. On siis osoitettava, että jos a on tämän joukon yläraja, niin tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq a$. Oletetaan, että a on tämän joukon yläraja.

Tarkastellaan yksinkertaista funktiota

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} f(n) 1_{\{n\}},$$

jolle pätee $s_N \leq f$, $s < \infty$ (koska oletimme, että f saa vain äärellisiä arvoja sen jälkeen, kun olimme tarkastelleet vastakkaisen tapauksen). Siten $s_N \in S_f$ kaikilla

$N = 1, 2, \ldots$. Yksinkertaisen funktion integraalin ja pistelaskurimitan määritelmän perusteella

$$\begin{aligned}\int s_N \,\mathrm{d}\mu &:= \sum_{n=1}^{N} f(n)\mu(\{n\}) + 0 \cdot \mu(\{m \in \mathbb{Z}_+ : m \geq N+1\}) \\ &= \sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot 1 + 0 \cdot \infty \\ &= \sum_{n=1}^{N} f(n).\end{aligned}$$

Koska a on joukon $\{\int s \,\mathrm{d}\mu\}_{s \in S_f}$ yläraja, pätee

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int S_N \,\mathrm{d}\mu \leq a \quad \text{kaikilla } N = 1, 2, \ldots.$$

Ottamalla tästä rajankäynti $N \to \infty$ saadaan $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq a$. Kaikkiaan näin ollaan todistettu, että $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ on lukujoukon $\{\int s \,\mathrm{d}\mu\}_{s \in S_f}$ pienin yläraja.