MITTA JA INTEGRAALI: HARJOITUS 1: ESIMERKKIRATKAISUT (VERSIO 1)

Kurssin luennoi Tuomas Hytönen ja laskuharjoituksia pitää Timo Hänninen.

Laskuharjoitusten (kuten myös todistusten) päätarkoitus on edesauttaa matemaattista ymmärtämistä.

Pyrin siihen, että laskuharjoitustunnilla pääpaino on ideoiden selittämisessä, kun taas näissä esimerkkiratkaisuissa se on ideoiden kirjoittamisessa seikkaperäisiksi matemaattisiksi todistuksiksi.

Keskustele muiden kanssa: Matematiikassa jokaiseen paikkaan saapuu monta erinäistä reittiä. Nämä esimerkkiratkaisut ovat vain yksi mahdollinen tapa ratkaista tehtävät.

Tehtävissä 5 ja 6 tarkastellaan dyadisia välejä ja niiden ominaisuuksia. Dyadisten välien käsittely voi tuntua alkuun hankalalta, mutta tässäkin taitolajissa harjaantuu kokemuksen myötä. Tehtävien 5 ja 6 seikkaperäiset ratkaisut ovat pitkähköjä, mutta tärkeintä on hahmottaa geometrinen idea taustalla (piirrä itsellesi kuva dyadisista väleistä!).

Ratkaisujen esitiedot

Näissä ratkaisuissa käytetään muun muassa seuraavia perustietoja ja -havaintoja. Varmista itsellesi, että ymmärrät niistä jokaisen. Muun muassa seuraavia analyysin perusasioita käytetään:

- (Rationaalipisteiden tiheys reaalisuoralla) Olkoon $a < b$ reaalilukuja. Tällöin löytyy rationaaliluku q, jolle pätee $a < q < b$.
- (Lukujonojen raja-arvo) Olkoon $a < b$ reaalilukuja. Olkoon a_n reaalilukujono, jolle pätee $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Tällöin $a_n < b$ kaikilla riittävän suurilla n (eli on olemassa luonnollinen luku N siten, että $a_n < b$ kaikilla $n \geq N$).
- (Funktion raja-arvo) Olkoon $a < b$ reaalilukuja. Olkoon $a(\epsilon) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funktio siten, että $\lim_{\epsilon\to 0} = a$. Tällöin $a_n < b$ kaikilla riittävän pienillä ϵ (eli on olemassa reaaliluku E siten, että $a(\epsilon) < b$ kaikilla $0 < \epsilon \leq E$).
- (Puoliavointen välien sisältyvyys päätepisteiden avulla). Tarkastellaan välejä $I := [a_I, b_I)$ ja $J := [a_J, b_J)$. Tällöin $I \subseteq J$, jos ja vain jos $a_J \leq a_I$ ja $b_I \leq b_J$.

Kokonaislukujen käsittelyssä seuraavat havainnot ovat käytössä:

- Olkoon n suurin kokonaisluku, joka täyttää jonkin ehdon. Tällöin luku $(n+1)$ ei täytä tätä ehtoa, koska se on aidosti suurempi kuin n.
- (Aito ja epäaito epäyhtälö kokonaisluvuille) Olkoon m ja n kokonaislukuja. Tällöin $m < n$ jos ja vain jos $m + 1 \leq n$.

Numeroituvuuden suhteen käytän ratkaisuissa seuraavaa termistöä:

- (Lukumääräisesti ekvivalentit joukot) Joukot A ja B ovat *lukumääräisesti ekvivalentit* (englanniksi *numerically equivalent*), jos on olemassa bijektio $f : A \to B$.

- (Numeroituvuus) Joukko A on *numeroituva*, jos se on lukumääräisesti ekvivalentti jonkin $\mathbb{N}$:n osajoukon kanssa. Erityisesti:
  - Joukko A on *äärellinen*, jos se on lukumääräisesti ekvivalentti joukon $\{n \in \mathbb{N} : n \leq N\}$ kanssa jollakin $N \in \mathbb{N}$.
  - Joukko A on *numeroituvasti ääretön*, jos se on lukumääräisesti ekvivalentti joukon $\mathbb{N}$ kanssa.

Määritelmistä havaitaan esimerkiksi kyseisen relaation *transitiivisuus*: Jos joukko A on lukumääräisesti ekvivalentti joukon B kanssa (eli on olemassa bijektio $f : A \to B$) ja joukko B on lukumääräisesti ekvivalentti joukon C kanssa (eli on olemassa bijektio $g : B \to C$), niin tällöin joukko A on numeroituvasti ekvivalentti joukon C kanssa (koska yhdistetty kuvaus $g \circ f : A \to C$ on bijektio).

Ratkaisut

Jokaisesta näistä ratkaisuista voidaan hahmotella kuva, joka valottaa ratkaisun perusajatusta ja jonka pohjalta todistukset on kirjoitettu - koeta hahmotella tällainen kuva itsellesi!

Tehtävä 1. Osoita, että jokainen avoin väli voidaan esittää suljettujen välien yhdisteenä.

Ratkaisu. Kiinnitetään (mielivaltainen) avoin väli (a, b). Valitaan lukujonot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ siten, että

- $a < a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ja
- $b_n < b$ ja $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(Esimerkiksi voidaan valita $a_n := a + \frac{1}{n}$ ja $b_n := b - \frac{1}{n}$.) Osoitetaan, että tällöin

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Todistetaan joukkoyhtäsuuruus todistamalla sisältyvyys kumpaankiin suuntaan.

Osoitetaan ensin, että $(a, b) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Havaitaan, että $(a, b) \supseteq [a_n, b_n]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, koska $a < a_n$ ja $b_n < b$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa tarkasteltu sisältyvyys.

Osoitetaan sitten, että $(a, b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Kiinnitetään (mielivaltainen) $x \in (a, b)$. Tämä tarkoittaa, että $a < x < b$. Koska $a < x$ ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin $a_n < x$ kaikilla riittävän suurilla n. Samalla tapaa, koska $x < b$ ja $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, niin $x < b_n$ kaikilla riittävän suurilla n. Siten erityisesti $a_m < x < b_m$ jollakin (riittävän suurella) m, joten $x \in [a_m, b_m] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Tehtävä 2. Osoita, että mitään suljettua väliä ei voida esittää avointen välien yhdisteenä.

Ratkaisu. Osoitetaan, että mitään suljettua väliä ei voida esittää avointen välien yhdisteenä. Osoitetaan väite todeksi vastaoletuksen avulla. Kiinnitetään mielivaltainen suljettu väli $[a, b]$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa kokoelma avoimia välejä $\{(c_i, d_i)\}_{i\in I}$ (missä I on jokin indeksijoukko) siten, että

$$[a, b] = \bigcup_{i\in I} (c_i, d_i).$$

Tarkastellaan lukua a. Koska vastaoletuksen nojalla $a \in \bigcup_{i\in I} (c_i, d_i)$, niin yhdistelmän määritelmän nojalla $a \in (c_i, d_i)$ jollakin $i \in I$. Näin ollen $c_i < a$. Valikoidaan jokin reaaliluku x siten, että $c_i < x < a$. Tällöin toisaalta $c_i < x < a < d_i$, joten $x \in (c_i, d_i) \subseteq \bigcup_{i\in I}(c_i, d_i)$, ja toisaalta $x < a$, joten $x \notin [a, b]$. Siis kaikkiaan $x \in \bigcup_{i\in I}(c_i, d_i)$ ja $x \notin [a, b]$, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen $[a, b] = \bigcup_{i\in I}(c_i, d_i)$ kanssa.

Tehtävä 3. Reaalilukujen joukkoa A sanotaan *avoimeksi*, jos jokaisella pisteellä $x \in A$ on olemassa jokin $r > 0$ siten, että $(x - r, x + r) \subseteq A$. Osoita, että yhtäpitävä avoimuuden määritelmä saadaan, jos vaaditaan, että jokaisella pisteellä x on olemassa jokin avoin väli $J = (a, b)$ siten, että $x \in J \subseteq A$.

Ratkaisu. Esitetään ratkaisu väitteenä ja sen todistuksena.

Väite. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ joukko ja $x \in A$ sen piste. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) On olemassa jokin $r > 0$ siten, että $(x - r, x + r) \subseteq A$.
(ii) On olemassa jokin väli (a, b) siten, että $x \in (a, b) \subseteq A$.

Todistus. Suunta "(i) $\implies$ (ii)" seuraa havaitsemalla, että ehdon (i) mukainen väli $(x - r, x + r) \subseteq A$ kelpaa ehdon (ii) mukaiseksi väliksi, sillä se toteuttaa ehdon $x \in (x - r, x + r) \subseteq A$.

Todistetaan seuraavaksi suunta "(ii) $\implies$ (i)". Oletetaan, että ehto (ii) pätee. Ehdon (ii) nojalla on olemassa jokin avoin väli (a, b) siten, että $x \in (a, b)$ ja $(a, b) \subseteq A$.

Tarkastellaan parametrista $\epsilon > 0$ riippuvaa lukua $x - \epsilon$ (eli funktiota $\epsilon \mapsto x - \epsilon$). Yhdistämällä havainnon $\lim_{\epsilon\to 0}(x - \epsilon) \to x$ ja ehdon $a < x$ saadaan, että $a < (x - \epsilon)$ kaikilla riittävän pienillä ϵ. Vastaavalla tavalla saadaan, että $(x + \epsilon) < b$ kaikilla riittävän pienillä ϵ.

Voidaan siis valita jokin (riittävän pieni) ϵ siten, että $a < x - \epsilon$ ja $x + \epsilon < b$ eli $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq (a, b)$. Ehdon (ii) nojalla $(a, b) \subseteq A$. Kaikkiaan $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq A$. □

Tehtävä 4. Osoita:

(a) Jokainen avoin joukko voidaan esittää avointen välien yhdisteenä.
(b) Sama onnistuu, vaikka käytettäisiin vain sellaisia välejä, joiden päätepisteet ovat rationaalilukuja.

Ratkaisu. Esitetään ratkaisu väitteenä ja sen todistuksena.

Väite. *Jokainen avoin joukko voidaan esittää avointen välien yhdisteenä. Erityisesti näiden välien päätepisteet voidaan valita rationaaliluvuiksi.*

Todistus. Kiinnitetään mielivaltainen avoin joukko A. Avoimen joukon määritelmän nojalla kutakin pistettä $x \in A$ kohden on olemassa avoin väli I siten, että $x \in I \subseteq A$. Valitaan kutakin $x \in A$ kohden eräs tällainen väli I_x. Osoitetaan, että

$$A = \bigcup_{x\in A} I_x.$$

Todistetaan tämä joukkoyhtäsuuruus todistamalla sisältyvyydet.

Suunta "$\supseteq$" seuraa, kun muistetaan, että $A \supseteq I_x$ kaikilla $x \in A$ joukkojen $\{I_x\}_{x\in A}$ valinnan perusteella.

Suunta "$\subseteq$" seuraa, kun muistetaan, että joukkojen $\{I_x\}_{x\in A}$ valinnan perusteella kaikilla $x \in A$ pätee, että $x \in I_x$.

Todistetaan lopuksi, että välien $\{I_x\}_{x\in A}$ sijaan voidaan käyttää joitakin välejä $\{J_x\}_{x\in A}$, joiden päätepisteet ovat rationaalilukuja. Tarkastellaan kiinteää pistettä $x \in A$. Valinnan perusteella väli I_x on muotoa (a_x, b_x) joillakin reaaliluvuilla a_x, b_x, joille pätee $a_x < x < b_x$. Koska rationaaliluvut ovat tihessä, voidaan valita rationaaliluvut c_x, d_x siten, että $a_x < c_x < x < d_x < b_x$. Muodostetaan väli $J_x := (c_x, d_x)$. Nyt pätee $x \in J_x \subseteq I_x \subseteq A$. Siis seuraava ehto pätee:

- Jokaista $x \in A$ kohden on olemassa avoin väli J_x siten, että $x \in J_x \subseteq A$, ja lisäksi välin J_x päätepisteet ovat rationaalilukuja.

Sanasta sanaan kuten edellä (mutta käyttämällä nyt välejä J_x välien I_x sijaan) voidaan osoittaa, että $A = \bigcup_{x\in A} J_x$. □

Dyadiset välit

Väliä, joka on muotoa $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ joillakin $j \in \mathbb{Z}$ ja $k \in \mathbb{Z}$, sanotaan *dyadiseksi väliksi*. Huomaa, että tällainen väli voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) = 2^{-j}([0,1) + k).$$

Siten parametri j määrää välin $I := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ pituuden $\ell(I) = 2^{-j}$ ja parametri k sen sijainnin reaalisuoralla. Käytetään kaikkien dyadisten välien kokoelmasta merkintää $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D} := \{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\},$$

ja 2^{-j} pituisten dyadisten välien kokoelmasta merkintää $\mathcal{D}^j$,

$$\mathcal{D}^j := \{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Todistetaan ensin seuraava lemma, joka on kätevä dyadisten välien käsittelyssä:

Lemma 1. (Kunkin pituiset dyadiset välit osittavat reaalisuoran) Kullakin kiinteällä parametrilla $j \in \mathbb{Z}$, kokoelma $\mathcal{D}^j$ (eli ne dyadiset välit, joiden pituus on 2^{-j}) on $\mathbb{R}$:n ositus (eli kokoelma $\mathcal{D}^j$ koostuu erillisistä joukoista, joiden yhdiste on $\mathbb{R}^d$).

Todistus. Kiinnitetään välin pituus eli parametri j. Huomataan, että osituksen määritelmän nojalla $\mathcal{D}^j$ on $\mathbb{R}$:n ositus täsmälleen silloin, kun jokaisella $x \in \mathbb{R}$ löytyy täsmälleen yksi $I \in \mathcal{D}^j$ siten, että $x \in I$. Osoitetaan tämä väittämä todeksi. Kiinnitetään $x \in \mathbb{R}^d$.

Osoitetaan ensin, että löytyy jokin $I \in \mathcal{D}^j$ siten, että $x \in I$. Tarkastellaan väliä $I(k) := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) =: [a_{I(k)}, b_{I(k)})$. Valitaan luvuksi k suurin kokonaisluku, jolle pätee

$$a_{I(k)} := 2^{-j}k \le x.$$

Täten luvulle $(k+1)$, joka on aidosti suurempi kuin k, pätee vastakkainen epäyhtälö eli

$$x < 2^{-j}(k+1) =: b_{I(k)}.$$

Siis kaikkiaan $a_{I(k)} \le x < b_{I(k)}$ eli $x \in I(k)$. Siis väli $I(k) \in \mathcal{D}^j$ on eräs etsitty väli.

Osoitetaan seuraavaksi, että väli $I(k) \in \mathcal{D}^j$ on ainoa. Toisin sanoen, näytetään, että kaikille $l \neq k$ pätee $x \notin I(l)$. Tarkastellaan tapauksissa:

- Jos $l < k$ (mistä seuraa $l + 1 \le k$, koska kyse on kokonaisluvuista), niin $b_{I(l)} := 2^{-j}(l+1) \le 2^{-j}k \le x$, joten $x \notin I(l)$.
- Jos $k < l$ (mistä seuraa $(k+1) \le l$, koska kyse on kokonaisluvuista), niin $x < 2^{-j}(k+1) \le 2^{-j}l =: a_{I(l)}$ eli $x \notin I(l)$.

□

Tehtävä 5. Osoita:

(a) Jokaisella dyadisella välillä I on olemassa täsmälleen yksi dyadinen väli $\hat{I}$, joka toteuttaa ehdot $\ell(\hat{I}) = 2\ell(I)$ ja $I \subseteq \hat{I}$.
(b) Dyadisia välejä on numeroituva määrä.

Huomautus. Osan (a) mukaista dyadista väliä $\hat{I}$ kutsutaan I:n *dyadiseksi vanhemmaksi.*

Ratkaisu, osa (a). Kiinnitetään väli $I := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$. Todistetaan, että on olemassa täsmälleen yksi dyadinen väli $\hat{I}$, joka toteuttaa ehdot $\ell(\hat{I}) = 2\ell(I)$ ja $I \subseteq \hat{I}$.

Tarkastellaan mielivaltaista dyadista väliä $J := [2^{-l}m, 2^{-l}(m+1))$. Lähdetään selvittämään, mitä vaadittavat ehdot oikeastaan edellyttävät parametreilta l and m.

Ehto $\ell(J) = 2\ell(I)$ voidaan kirjoittaa auki:

$$\ell(J) = 2\ell(I) \iff 2^{-l} = 2 \cdot 2^{k} \iff l = k+1.$$

Näin ollen tämä ehto määrää yksikäsitteisesti paremetrin l. Valitaan siis $l := k+1$.

Tarkastellaan sitten välejä $J = [2^{-j+1}m, 2^{-j+1}(m+1)) =: J(m)$ parametrin m suhteen, joka on vielä valitsematta. Valitaan luvuksi m suurin kokonaisluku siten, että

$$a_{J(m)} := 2^{-j+1}m \leq 2^{-j}k =: a_I.$$

Näin ollen luku $(m+1)$, joka on lukua m aidosti suurempi, toteuttaa vastakkaisen epäyhtälön

$$2^{-j}k < 2^{-j+1}(m+1),$$

mikä on yhtäpitää epäyhtälön $k < 2(m+1)$ kanssa, mikä puolestaan (koska kyse on kokonaisluvuista) on yhtäpitävää ehdon $(k+1) \leq 2(m+1)$ kanssa. Näin ollen

$$b_I := 2^{-j}(k+1) \leq 2^{-j}2(m+1) = 2^{-j+1}(m+1) =: b_{J(m)}.$$

Näin olemme löytäneet dyadisen välin $J(m)$ siten, että $I \subseteq J(m)$.

Todistetaan, että mikään muu valinta $m' \neq m$ ei kelpaa. Osoitetaan, että muilla valinnoilla välit $J(m')$ ovat erillisiä välistä $J(m)$, joten erityisesti ne eivät voi sisältää väliä $I \subseteq J(m)$, minkä vuoksi ne eivät kelpaa. Tarkastellaan erikseen tapaukset $m' < m$ ja $m' > m$.

Tarkastellaan ensin tapaus $m' < m$. Tällöin $m'+1 \leq m$, koska kyse on kokonaisluvuista. Siten

$$b_{J(m')} := 2^{-j+1}(m'+1) \leq 2^{-j+1}m =: a_{J(m)},$$

joten välit $J(m') := [a_{J(m')}, b_{J(m')})$ ja $J(m) := [a_{J(m)}, b_{J(m)})$ ovat erillisiä.

Tarkastellaan sitten tapaus $m < m'$. Tällöin $m+1 \leq m'$, koska kyse on kokonaisluvuista. Siten

$$b_{J(m)} := 2^{-j+1}(m+1) \leq 2^{-j+1}m' := a_{J(m')},$$

joten välit $J(m) := [a_{J(m)}, b_{J(m)})$ ja $J(m') := [a_{J(m')}, b_{J(m')})$ ovat erillisiä.

Ratkaisu, osa (b). Esitetään seuraavaksi kohdan (b) ratkaisu. Todistetaan ensin, että parametrit $j \in \mathbb{Z}$ ja $k \in \mathbb{Z}$ määräävät yksikäsitteisesti dyadisen välin $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$. Oletetaan, että

$$[2^{-j_1}k_1, 2^{-j_1}(k_1+1)) = [2^{-j_2}k_2, 2^{-j_2}(k_2+1)).$$

On osoitettava, että tällöin $j_1 = j_2$ ja $k_1 = k_2$. Oletuksen nojalla välien pituudet $2^{-j_1}(k_1+1) - 2^{-j_1}k_1 = 2^{-j_1}$ ja $2^{-j_2}(k_2+1) - 2^{-j_2}k_2 = 2^{-j_2}$ yhtyvät, joten $2^{-j_1} = 2^{-j_2}$

eli $j_1 = j_2$. Myös päätepisteet $2^{-j_1}k_1$ ja $2^{-j_2}k_2$ yhtyvät, joten erityisesti (käyttäen jo huomattua yhtäsuuruutta $j_1 = j_2$) $2^{-j_1}k_1 = 2^{-j_1}k_2$ eli $k_1 = k_2$. Siis kuvaus

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathcal{D} \\ (j,k) &\mapsto [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) \end{aligned}$$

on bijektio. Muistetaan, että joukot A ja B ovat *lukumääräisesti ekvivalentit* jos on olemassa bijektio $f : A \to B$. Tehdään seuraavat huomiot:

- Joukot $\mathcal{D}$ ja $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit.
- Joukot $\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{N}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit, koska määritelmän edellyttämäksi bijektioksi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ voidaan valita esimerkiksi kuvaus
$$f(n) := \begin{cases} 2n & \text{jos } n > 0, \\ 2(-n) + 1 & \text{jos } n \leq 0. \end{cases}$$
- Siten myös joukot $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit, koska määritelmän edellyttämäksi bijektioksi voidaan valita esimerkiksi kuvaus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (m,n) \mapsto (f(m), f(n)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, missä $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ on edellä mainittu bijektio.
- Joukot $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit, eli joukko $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön, mikä on todistettu Holopaisen muistiinpanojen alkuosassa.

Kaikkiaan ollaan siis todettu, että

- $\mathcal{D}$ ja $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja $\mathbb{N}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit, koska
  - joukot $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit ja
  - joukot $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit.

  (Vaihtoehtoisesti voitaisiin suoraan todistaa, että $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{N}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit muodostamalla bijektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.)

Siten $\mathcal{D}$ ja $\mathbb{N}$ ovat lukumääräisesti ekvivalentit eli (numeroituvuuden määritelmän mukaan) $\mathcal{D}$ on numeroituvasti ääretön.

Tehtävä 6. Olkoon A avoin väli. Kutsutaan dyadista väliä I joukon J *maksimaaliseksi dyadiseksi osaväliksi*, jos $I \subseteq A$ ja $\hat{I} \nsubseteq A$. Osoita, että A on maksimaalisten dyadisten osaväliensä erillinen yhdiste.

Ratkaisu. Todistetaan seuraavat ominaisuudet:

Väite. *Olkoon A avoin väli. Tällöin pätee:*

(i) Jokaista pistettä $x \in A$ kohden löytyy dyadinen A:n osaväli, joka sisältää tämän pisteen (eli $I \in \mathcal{D}$ siten, että $x \in I \subseteq A$).

(ii) Jokaista dyadista A:n osaväliä I (eli $I \in \mathcal{D}$ ja $I \subseteq A$) kohden löytyy maksimaalinen dyadinen osaväli J (eli $J \in \mathcal{D}$, $J \subseteq A$, ja $\hat{J} \nsubseteq A$) siten, että $I \subseteq J$.

(iii) Maksimaaliset dyadiset A:n osavälit ovat erillisiä.

Oletetaan tovi, että nämä ominaisuudet on voimassa (mikä todistetaan kohta) ja katsotaan, kuinka niistä seuraa, että avoin väli A on maksimaalisten dyadisten osaväliensä erillinen yhdiste eli

$$A = \bigcup_{\substack{I \text{ on } A\text{:n maksimaalinen} \\ \text{dyadinen osaväli}}} I.$$

Huomataan, että ominaisuuden (iii) nojalla yhdisteen välit ovat erillisiä. Osoitetaan ensin suunta "$\subseteq$". Olkoon $x \in A$. Ominaisuuden (i) nojalla löytyy dyadinen A:n osaväli $I \in \mathcal{D}$ siten, että $x \in I$. Ominaisuuden (ii) nojalla löytyy maksimaalinen A:n dyadinen osaväli siten, että $I \subseteq J$. Kaikkiaan $x \in I \subseteq J$. Osoitetaan sitten suunta "$\supseteq$". Muistetaan, että yhdisteen jokainen väli I on A:n dyadinen osaväli eli $I \subseteq A$.

Seuraavaksi todistetaan väitetyt ominaisuudet.

Todistus. Kiinnitetään mielivaltainen avoin väli A.

Todistetaan ensin ominaisuus (i). Kiinnitetään piste $x \in A$. Koska A on avoin joukko, niin avoimuuden määritelmän mukaisesti löytyy $r > 0$ siten, että $(x-r, x+r) \subseteq A$. Koska kunkin (ja minkä tahansa) pituiset dyadiset välit osittavat $\mathbb{R}$:n (Lemma 1), niin erityisesti löytyy väli $I \in \mathcal{D}$ siten, että $x \in I$ ja $\ell(I) < r$. Täten $I \subseteq (x-r, x+r)$ [1]. Kaikkiaan $x \in I \subseteq (x-r, x+r) \subseteq A$ eli $x \in I$ ja $I \subseteq A$.

Todistetaan sitten ominaisuus (ii). Oletetaan, että I on A:n dyadinen osaväli eli $I \in \mathcal{D}$ ja $I \subseteq A$. Osoitetaan, että löytyy $J \in \mathcal{D}$ siten, että $I \subseteq J$ ja $\hat{J} \nsubseteq A$. Tehtävän 5 mukaan dyadisella välillä I on olemassa *dyadinen vanhempi* $\hat{I}$ (eli yksikäsitteinen väli $\hat{I}$, jolle pätee $\ell(\hat{I}) = 2\ell(I)$ ja $\hat{I} \supseteq I$). Tarkastellaan dyadisen vanhemman vanhempaa (eli isovanhempaa) ja niin edelleen: Määritellään

$$\begin{aligned} I^{(0)} &:= I, \\ I^{(1)} &:= \hat{I}, \\ I^{(n)} &:= \widehat{I^{(n-1)}} \qquad \text{jokaiselle } n = 2, 3, 4, \ldots. \end{aligned}$$

Tarkastellaan niitä esivanhempia, jotka ovat A:n osavälejä eli välejä $I^{(n)}$, joille pätee $I^{(n)} \subseteq A$. Sisältyvyyden vuoksi tällaisille väleille pätee ehto

$$\ell(I^{(n)}) \leq \operatorname{diam}(A), \tag{0.1}$$

missä merkintä $\operatorname{diam}(A)$ tarkoittaa avoimen välin A pituutta. Huomataan, että

$$\ell(I^{(n)}) =: \ell(\widehat{I^{(n-1)}}) = 2 \cdot \ell(I^{(n-1)}) = 2 \cdot 2 \cdot \ell(I^{(n-2)}) = \cdots = 2^n \ell(I).$$

Näin ollen ehto (0.1) on yhtäpitävää ehdon

$$2^n \ell(I) \leq \operatorname{diam}(A) \iff n \leq \log \frac{\operatorname{diam}(A)}{\ell(I)}$$

kanssa. Tämä ehtoo pätee vain äärellisen monelle $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen on olemassa vain äärellisen monta esivanhempaa $I^{(n)}$, joille pätee sisältyvyysehto $I^{(n)} \subseteq A$. Valitaan näistä suurin eli valitaan suurin luonnollinen luku, jolle pätee sisältyvyysehto $I^{(n)} \subseteq A$. Valinnan perusteella $I^{(n+1)}$ (koska luku $(n+1)$ on aidosti suurempi kuin n) ei täytä sisältyvyysehtoa, joten $I^{(n+1)} \nsubseteq A$. Huomaa, että $I^{(n+1)} := \widehat{I^{(n)}}$. Siis väli $J := I^{(n)}$ on etsitty väli: Sille pätee $I \subseteq J$, $J \subseteq A$ ja $\hat{J} \nsubseteq A$.

Todistetaan lopuksi ominaisuus (iii). Todistetaan ensin seuraava lemma:

Lemma 2. (Dyadiset välit ovat joko sisäkkaiset tai erilliset) Olkoon I ja J dyadisia välejä. Tällöin pätee jompikumpi seuraavista vaihtoehdoista:

---

[1] Tämä nähdään esimerkiksi geometrisella päättelyllä kuvasta tai osoittamalla sisältyvyys tarkastelemalla välin $I := [a_I, b_I)$ reunapisteitä ja käyttämällä ehtoja $a_I \leq x < b_I$ ja $\ell(I) < r$ seuraavien arvioiden tekemiseksi:

$$x - r < x - \ell(I) < b_I - \ell(I) = a_I \quad \text{ja} \quad b_I = a_I + \ell(I) \leq x + \ell(I) < x + r.$$

- (Erillisyys) $I \cap J = \varnothing$.
- (Sisäkkäisyys) $I \subseteq J$ tai $J \subseteq I$.

Lemman todistus. Toisen välin pituus on pienempi tai yhtäsuuri kuin toisen. Oletetaan, että $\ell(I) \leq \ell(J)$ - vastakkainen tapaus käsitellään aivan samoin. Valitaan se I:n esivanhempi $I^{(n)}$, jonka pituus on yhtäsuuri kuin välin J [2]. Koska (Lemman 1 mukaisesti) kunkin pituiset dyadiset välit osittavat $\mathbb{R}$:n, niin joko $I^{(n)} = J$ tai $I^{(n)} \cap J = \varnothing$. Koska $I \subseteq I^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq I^{(n)}$, niin tapauksessa $I^{(n)} = J$ pätee $I \subseteq J$. ja tapauksessa $I^{(n)} \cap J = \varnothing$ pätee $I \cap J = \varnothing$. □

Todistetaan sitten ominaisuus (iii). Olkoon $I \neq J$ dyadisia A:n osavälejä. On osoitettava, että jos I ja J ovat maksimaalisia, niin $I \cap J = \varnothing$. Osoitetaan yhtäpitävästi (käänteinen todistus eli kontrapositio), että jos $I \cap J \neq \varnothing$, niin I tai J ei ole maksimaalinen.

Oletetaan, että $I \cap J \neq \varnothing$. Lemman 2 perusteella $I \subsetneq J$ tai $J \subsetneq I$ (tapaukset $I = J$ ja $I \cap J = \varnothing$ eivät tule kyseeseen oletusten perusteella). Tarkastellaan tapausta $I \subsetneq J$ - tapaus $J \subsetneq I$ voidaan käsitellä aivan samoin. Koska $I \subsetneq J$, niin $\hat{I} \subseteq J$ (tämä seuraa Lemman 2 todistuksesta). Muistetaan, että J on oletuksen mukaan A:n osaväli eli $J \subseteq A$. Koska $\hat{I} \subseteq J$ ja $J \subseteq A$, niin myös $\hat{I} \subseteq A$. Muistetaan, että toteamus "I on maksimaalinen A:n osaväli" tarkoittaa, että ehto $\hat{I} \nsubseteq A$ pätee. Täten I ei ole maksimaalinen A:n osaväli, koska sille pätee vastakkainen ehto.

□

[2] Näin voidaan valita, mikä nähdään esimerkiksi seuraavasti: Sekä välin I että J pituus on dyadinen eli muotoa 2^{-k}, $k \in \mathbb{Z}$. Oletuksen mukaan $\ell(I) \leq \ell(J)$, joten $\ell(J) = 2^n \ell(I)$ jollain $n \in \mathbb{N}$. Muistetaan, että $\ell(I^{(n)}) = 2^n \ell(I)$. Siis dyadiselle vanhemmalle $I^{(n)}$ pätee $\ell(I^{(n)}) = 2^n \ell(I) = \ell(J)$.