HY Johdatus Matemaattiseen Rahoitusteoriaan II, kotitentti, kesä 2016

Kotitentti palautetaan kesän 2016 loppuun mennessä, aikaraja on 1 syyskuuta. Saa pyytää neuvoa luennoitsijalta.

1. Olkoon $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0,T]\}$ jossa $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s) : 0 \le s \le t)$ ja $W(t)$ on Brownin liike todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

   Olkoon

$$S(t) = S_0 \exp\biggl(\int_0^t \sigma(u) dW(u) + \int_0^t \bigl(r(u) - \frac{1}{2}\sigma(u)^2 \bigr) du \biggr)$$

   jossa $r(u)$ ja $\sigma(u)$ ovat deterministisia, ja

$$B(t) = B_0 \exp\biggl(\int_0^t r(u) du \biggr)$$

   Oletaame että

$$\int_0^T |r(u)| du < \infty \text{ ja } \int_0^T \sigma(t)^2 dt < \infty \ .$$

   (a) Osoita että P on riskineutraali mitta Black ja Scholesin markkinamallissa $\bigl(B(t), S(t)\bigr)$, silloin kun valitaan numerääriksi $B(t)$.

   (b) Mikä on riksi neutraali mitta $Q \sim P$ markkinamallissa $\bigl(B(t), S(t)\bigr)$ silloin kun valitaan osake $S(t)$ numerääriksi ? Laske osamäärä prosessi $\frac{dQ_t}{dP_t}$ σ-algebralla $\mathcal{F}_t$ $\forall t \in [0,T]$.

   (c) Mikä on prosessin $W(t)$:n drifti riksi neutraalin mitan Q suhteen ? (Vihje: käytä Girsanovin kaava).

2. Kun integrandi $h(u)$ on $\int_0^T h_k(u)^2 du < \infty$, Ito integraali kutsutaan myös Wiener integraaliksi

$$W(h) := \int_0^T h(s) dW(s) \sim \mathcal{N}\biggl(0, \int_0^t h(s)^2 ds\biggr)$$

   on Gaussinen satunnaismuuttuja. Silloin $W(h)$ satunnaismuuttujan Malliavin derivaatta on

$$D_t W(h) = h(t), \quad \text{fl} t \in [0,T] \ .$$

Malliavin derivaatalle pätee derivoinnin ketjusääntö:

Kun $g(x_1,\dots,x_m)$ on derivoituva ja $h_k(u)$ ovat deterministia jolla $\int_0^T h_k(u)^2du < \infty$, ja satunnaismuuttuja

$$G(\omega) = g\Bigg(\int_0^T h_1(u)dW(u),\dots,\int_0^T h_m(u)dW(u)\Bigg) \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$$

sen Malliavin derivaatta saadaan derivoinnin ketjusäännöllä

$$D_tG(\omega) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} g\Bigg(\int_0^T h_1(u)dW(u),\dots,\int_0^T h_m(u)dW(u)\Bigg)h_k(t)$$

ja sanotaan että $D_tG(\omega) \in L^2\big(\Omega\times[0,T],\mathcal{F}\otimes\mathcal{B}([0,T])\big)$ kun

$$E_P\Bigg(\int_0^T \big(D_tG\big)^2dt\Bigg) < \infty$$

Malliavin derivaatta on lineaarinen, $D_t(aF+bG) = aD_tF + bD_tG$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$ (deterministisia).

Sen lisääksi jos jonolle $G_n \in L^2(\Omega)$ on olemassa Malliavin derivaatta $D_tG_n(\omega) \in L^2(\Omega\times[0,T])$

$G_n(\omega) \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} G(\omega) \in L^2(\Omega)$

ja $D_tG_n(\omega) \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} \eta_t(\omega) \in L^2(\Omega)\times[0,T]$,

silloin $G(\omega)$:lla on Malliavin derivaatta $D_tG(\omega) = \eta_t(\omega)$.

Näin Malliavin derivaatan määritelmää yleistetään.

Tästä rajankäynnistä ja lineaarisuudesta seureaa että $G(\theta,\omega) \in L^2(\Theta\times\Omega,\mathcal{A}\times\mathcal{F}_T,\alpha\times P)$ satunnaismuuttuja joka riippuu parametrista $\theta\in\Theta$, ja jokaiselle θ:lle on olemassa Malliavin derivaatta $D_tG(\theta,\omega) \in L^1(\Omega\times[0,T],dP\otimes dt)$, Malliavin derivaatan linearisuudesta seuraa että voidaan vaihtaa integroinnin ja Malliavin derivoinnin järjestystä

$$D_t\int_\Theta G(\theta)\alpha(d\theta) = \int_\Theta D_tG(\theta)\alpha(d\theta)$$

ainakin silloin kun $E\Bigg(\int_\Theta\int_0^T(D_tG)^2dt\ \alpha(d\theta)\Bigg) < \infty$.

Olkoon nyt $G(\omega) \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^W,P)$ satunnaismuuttuja, joka on mitallinen funktionaali Brownin liikkeestä ja sen Malliavin derivaatta $G_tF(\omega) \in$

$L^2(\Omega \times [0,T])$ on olemassa, silloin Ito Clark Ocone esityslause on voimassa:

$$G(\omega) = E_P(G) + \int_0^T E_P(D_t G | \mathcal{F}_t) dW(t) \tag{0.1}$$

Tätä kaavaa käytetään laskemaan optioiden hintoja ja suojausstrategiat Black ja Scholes $(B(t), S(t))$ markkinoilla.

Olkoon nyt

$$G(\omega) = \left(\exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log S(u,\omega) du \right) - K \right)^+ \tag{0.2}$$

aasialaistyyppinen optio, jossa $K > 0$ on lunastushinta.

Käytä Malliavin laskennan perusominaisuuksia (Malliavin derivaatan lineaarisuus ja ketjusääntö) ja Ito Clarck Ocone esitystä laskemaan option (0.2) hintaa ja suojausstrategiaa. Tässä laskussa voidaan olettaa että $\sigma(u) \equiv \sigma$ vakio $\forall u \in 0, T$.

Ratkaisu voisi olla myös odotusarvoja ja ehdollisen odotusarvon muodossa, jotka kuitenkin ovat laskettavissa loppuun asti.

3. Käsitellään Vasicekin malli korolle $r(t)$ jolla $r(0)$ on deterministinen alkuarvo ja

$$dr(t) = \big(b - ar(t)\big)dt + \sigma(t) dX(t) \tag{0.3}$$

jossa $X(t)$ on Brownin liike P-mitan suhteen, $\sigma(t)$ on deterministinen

Huomataan että tämä stokastisen differentiaali yhtälö on lineaarinen.

(a) Osoita että

$$r(t) = e^{-at} r(0) + b \int_0^t e^{-a(t-u)} du + \int_0^t e^{-a(t-u)} \sigma(u) dX(u) \tag{0.4}$$

on (0.3) stokastisen differentiaali yhtälön ratkaisu.

(b) Osoita että $r(t)$ on Gaussinen satunnaismuuttuja, lasken sen odotusarvo ja varianssia.

(c) Osoita että integraali

$$J(t) := \int_0^t r(u)du$$

on Gaussinen, laske sen odotusarvon ja varianssia.

(d) Laske hinta hetkellä $t < T$ nolla kuponki-bondille joka maksaa maturiteetti hetkellä T 1€ haltijalle.

$$p(t,T) = E_P\left(\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right) = E_P\left(\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\middle|\sigma(r(t))\right)$$

4. Käsitellään Black & Scholes markkinamalli $(B(t), S(t))$ jossa korko on satunnainen Vasicek prosessi (0.4) ja $X(t)$ (Vasicek mallissa) ja $W(t)$ (B-S mallissa) ovat P-riippumattomia Brownin liikeitä.

   Oletetaan että voidaan ostaa ja myydä jatkuvasti nolla kuponki bondeja maturiteetilla T hinnoilla $p(t,T)$ kun $t < T$.

   Laske option hinta ja suojaus-strategia asiaalaiselle optiolle tässä tilanteessa jossa korko on satunnainen. Vihje: muista numeräärin vaihto kaava jossa käytetään numerääriksi nollakuponki bondia $p(t,T)$, jossa $t < T$ ja $p(T,T) = 1$, viite on Tomas Bjork: Arbitrage Theory in Continuous Time Oxford Finance 2009, luku 26.

5. Ylimääräinen (vapaaehtoinen) tehtävä : sama kysymys kuten tehtävässä 4, olettamalla etta $X(t) = W(t)\ \forall t \in [0,T]$, eli sama 1-ulotteinen Brownin liike ajaa sekä osakeprosessin $S(t)$ että korkoprosessin $r(t)$.