HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitus-9 (13.4.2016)

Määritelmä: Brownin liike $(W(t) : t \geq 0)$ filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ on $\mathbb{R}$-arvoinen stokastinen prosessi jolla

- (W_t) on $\mathbb{F}$-sopiva
- $W(0) = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ja $0 \leq s \leq t$, $(W_t - W_s)$ on P-riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s$ ja Gaussinen, odotusarvolla
  $E_P((W_t - W_s)) = E_P\big((W_t - W_s)\big|\mathcal{F}_s\big) = 0$
  ja varianssilla $E_P\big(W_t - W_s)^2\big) = E_P\big(W_t - W_s)^2\big|\mathcal{F}_s\big) = t - s$.
- P-melkein varmasti jokaiselle ω:lle polut $t \mapsto B_t(\omega)$ ovat jatkuvia.

1. Olkoon W_t Brownin liike $\mathbb{F}$ filtraatiossa P todennäköisyyden suhteen. Osoita että $M_t = (W_t^2 - t)$ ja $Z_t(\theta) = \exp\big(\theta W_t - \theta^2 t/2\big)$ jossa $\theta \in \mathbb{R}$ ovat $(\mathbb{F}, P)$-martingaaleja.

   Laske kvadrattiset kovariaatiot $[M, M]_t$, $[M, W]_t$, $[Z(\theta), Z(\theta')]_t$,$[Z(\theta), W]_t$, $[Z(\theta), M]_t$.

2. Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{R}_+)$ jatkuva polku jolla on kvadrattinen variaatio $[X]_t = [X, X]_t$, ja $t \mapsto A_t \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ derivoituva jatkuvalla derivaatalla.

   Osoita että A on rajoitetusti heilähtelevä eli on kahden ei-vähenevien funktioiden erotus, ja siksi $[A, A] = 0$

3. Olkoon $Y_t = A_t + X_t$. Koska kvadrattinen variaatio on bilineaarinen,

   $$[Y, Y]_t = [X, X]_t + [A, A]_t + 2[A, X]_t,$$

   silloin kun oikean ja vasemman puoleen termit ovat olemassa, ja

   $$[Y, Y]_t = [X, X]_t \text{ silloin kun } [A, A]_t = 0.$$

   Muista Iton kaava:

   $$\int_0^t F_x(X_s)dX_s = F(X_t) - F(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^t F_{xx}(X_s)d[X, X]_s \qquad (0.1)$$

   Muistetaan myös että jos $Z_t = \int_0^t F_x(X_s)dX_s$,

   $$[Z, Z]_t = \big[F(X.), F(X.)\big]_t = \int_0^t F_x(X_s)^2 d[X, X]_s$$

Laske poluttaiset Ito integraalit

(a)

$$\int_0^t X_s^n dX_s$$

eli kirjoita poluttainen Ito integraali muotoon $\int_0^t F_x(X_s)dX_s$ ja käytä Iton kaava (0.1).

(b)

$$\int_0^t \exp(\sigma X_s^n)dX_s$$

(c)

$$\int_0^t \sin(\sigma X_s)dX_s,$$

(d)

$$\int_0^t \cos(\sigma X_s)dX_s,$$

(e)

$$\int_0^t Y_s^n dY_s$$

(f)

$$\int_0^t \exp(\sigma Y_s^n)dY_s$$

(g)

$$\int_0^t A_s^n dA_s$$

(h)

$$\int_0^t \exp(\sigma A_s^n)dA_s$$

(i)

$$\int_0^t \sin(\sigma A_s) dA_s,$$

(j)

$$\int_0^t \cos(\sigma A_s) dA_s,$$

(k)

$$\int_0^t Y_s^n dX_s$$

(l)

$$\int_0^t \exp(\sigma Y_s^n) dX_s$$

Laske myös yllä olevien Ito-integraalien qvadrattinen variaatio.

4. Olkoon X_t, Y_t jatkuvat polut jolla on kvadrattiset variaatiot $[X, X]_t$ $[Y, Y]_t$ ja ristivariaatio $[X, Y]_t$ olemassa. Käytä poluttaista Iton kaavaa osoittakseen osoittais-integroinnin kaava

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + [X, Y]_t$$