HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitus-8 (6.4.2016)

1. Määritelmä: Brownin liike $(W(t) : t \geq 0)$ filtraatiossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ on $\mathbb{R}$-arvoinen stokastinen prosessi jolla

   (a) (W_t) on $\mathbb{F}$-sopiva

   (b) $W(0) = 0$

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$ ja $0 \leq s \leq t$, $(W_t - W_s)$ on P-riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s$ ja Gaussinen, odotusarvolla $E_P((W_t - W_s)) = E_P\big((W_t - W_s)\big|\mathcal{F}_s\big) = 0$ ja varianssilla $E_P\big(W_t - W_s)^2\big) = E_P\big(W_t - W_s)^2\big|\mathcal{F}_s\big) = t - s$.

   (d) P-melkein varmasti jokaiselle ω:lle polut $t \mapsto B_t(\omega)$ ovat jatkuvia.

   (a) Osoita: jos (W_t) on Brownin liike filtraatiossa $\mathbb{F}$, se on Brownin liike myös omassa filtratiossa $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W : t \geq 0)$, jossa $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(s) : 0 \leq s \leq t) \subseteq \mathcal{F}_t$.

   (b) Osoita että Covarianssi$_P\big(W(t), W(s)\big) = E_P(W(t)W(s)) = t \wedge s$. Olkoon $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$, ja $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ Brownin liikkeen virittämä filtraatio.

   (c) Osoita että $W(t)$ on $(P, \mathbb{F})$-martingaali.

2. Lévy konstruktiossa määritellään Brownin liike $(W(t) : t \in D)$ joukolle $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, jossa $D_n = \big\{k2^{-n} : 0 \leq k \leq 2^n\big\}$ ovat dyadisten lukujen joukkoja. Voidaan osoittaa että koska P-melkein varmasti polku $W(t, \omega)$ on jatkuva D:ssa ja D on tiheä $[0, 1]$ välissa siitä seuraa että on olemassa Brownin liike $(W(t) : t \in [0, 1])$ joka on jatkuva $[0, 1]$ välissa.

   Brownin liike konstruoidaan rekursiolla jokaiselle dyadisille joukolle D_n seuraavalla tavalla:

   Olkoon $(G_d(\omega) : d \in D)$ P-riippumattomia standardi Gaussisia satunnaismuuttujaa, joilla $E(G_d) = 0$ ja $E\big(\{G_d\}^2\big) = 0$,

   Tasolla $D_0 = \{0, 1\}$ määritellään $W(0) = W_0(0) = 0$, $W(1) = W_0(1) = G_1$ ja muilla pisteillä lineaarisella interpolaatiolla

   $$W_0(t) = tG_1$$

   Induktiivisesti, olkoon $k2^{n-1} = 2k2^{-n} \leq (2k+1)2^n \leq (2k+2)2^{-n} = (k+1)2^{n-1} \in D_n$, jossa $(2k+1)2^{-n} \in D_n \setminus D_{n-1}$. Silloin kun olemme jo konstruoineet rekursiivisesti

   $$W(k2^{n-1}) = W_{n-1}(k2^{n-1}), \forall k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1},$$

voidaan määritellä seuraavan tason pisteille $(2k+1)2^{-n} \ \in D_n \setminus D_{n-1}$ $\forall k = 0, 1 \ldots, n-1$

$$W((2k+1)2^{-n}) = \tag{0.1}$$
$$W_n((2k+1)2^{-n}) = \frac{W(k2^{n-1}) + W((k+1)2^{n-1})}{2} + G_{(2k+1)2^{-n}} 2^{-(n+1)/2}$$

ja kaikissa muissa pisteissä $t \notin D_n$ määritellään $W_n(t)$ interpoloimalla lineaarisesti arvoja $(W(t) : t \in D_n)$.

(a) Osoita induktiolla että $\forall n \in \mathbb{N}$, $(W(d) : d \in D_n)$ ovat yhteisesti Gaussisia, $E_P\big(W(d)\big) = 0$ ja

$$E_P\big(W(d)W(d')\big) = d \wedge d', \quad \forall d, d' \in D. \tag{0.2}$$

Vihje: olkoon $d = (2k+1)2^{-n} \in D_n \setminus D_{n-1}$ ja $d' = (2h+1)2^{-m} \in D_m \setminus D_{m-1}$ jossa $0 \leq k < 2^{n-1}$, $h < 2^{m-1}$, $m \leq n$, ja oleta induktiohypoteesillä että (0.2) pätee kaikille $d, d' \in D_{n-1}$, käytä sitten esitys (0.1)

(b) Octave komennolla `levybm(14,2.0,true)`

jossa `levybm.m` on funktio

```
function  W=levybm(N,waiting,holding)
% by Dario Gasbarra 31.3.2016
% it plots the succesive steps of the Levy construction
% of Brownian motion on the dyadics
% example: >> levybm(14,2.0,true)
W= randn(1,1);
m=1;
 plot([0 1],[0, W]);
 title(strcat('Levy construction of Brownian path on the dyadics at level 0'))
 if holding
   hold on;
 end;
 pause(waiting);
 for(n=1:N)
m=2*m;
 X= reshape([W ; W],1,m);
W=sum( [[0 X(1:(m-1))];X],1)*0.5;
W(1:2:(m-1))=W(1:2:(m-1))+randn(1,m/2)/sqrt(2*m);
 plot( [0 (1:m)/m],[0 W]);
 title(strcat('Levy construction of Brownian path on the dyadics at level ',num2str(n)))
  drawnow;
 pause(waiting)
 end;
```

voit katsella miten Lévy konstruktio etenee.

(c) Piirrä myös prosessin $W_N(t)$ qvadrattinen variaatio $\big[W_N, W_N\big](t)$.

3. Kirjoita octave koodia joka approksimoi Monte Carlo menetelmällä $E_P(W(t))$ ja $E_P(W(t)W(s))$ $\forall t, s \in D_n$, jossa esimerkiksi $n = 14$.

4. Olkoon $\{\ G_i(\omega) : i \in \mathbb{N}\}$ P-riippumattomia Gaussisia satunnaismuuttujia joilla on odotusarvo $E_P(G_i) = 0$ ja varianssi $E_P(G_i^2) = 0$.

Olkoon $W^{(N)}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} G_i(\omega)$ palottain vakio prosessi.

(a) Laske $E(W^{(N)}(t))$ ja $E\big(W^{(N)}(t)W^{(N)}(s)\big)$ kun $t, s \in [0,1]$.

(b) Kirjoita octave funktioiden `randn` ,`cumsum` , `plot` avulla koodi joka simuloi ja piirtää $W^{(N)}(t)$ prosessin polku ja sen kvadrattinen variaatio $\big[W^{(N)}, W^{(N)}\big](t)$.

Octavessa ja matlabissa `help funktion-nimi` komennolla saat tietoa funktion käytöstä.

5. Olkoon $(X_i : i \in \mathbb{N})$ P-riippumattomia satunnaismuuttujaa joilla $p = P(X_i = u) = 1 - P(X_i = d)$ jossa $d < 0 < u$, ja N on suuri (esimerksiksi $N = 10000$.) Kun p on annettu, (esimerkisksi $p = 1/3$)

   (a) Etsi u, d ja arvoja joilla $E(X_i) = 0$ ja $E(X_i^2) = 1$.

   (b) Olkoon $B^{(N)}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} X_i(\omega)$ palottain vakio prosessi.

   (c) Kirjoita octave funktioiden `randn` ,`cumsum` , `plot` avulla koodi joka simuloi ja piirtää $B_t^{(N)}$ prosessin polku ja sen kvadrattinen variaatio $\big[B^{(N)}, B^{(N)}\big](t)$

   (d) Käytä keskeisen arvon lausetta perustelemaan miksi on odottavissa että jakauman mielessä prosessilla $(B_t^{(N)})$:lla on suunnilleen samat äärellisulotteiset jakaumat kuin Gaussisella prosessilla $(W_t^{(N)})$