HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitus-11 (27.4.2016)

$W(t), t \in [0,T]$ on Brownin liike, $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W : t \in [0,T])$ on Brownin liike virittämä filtraatio jossa $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(s) : s \le t)$.

1. Olkoon $F(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, P)$.

   Jokaiselle $t \le T$, satunnaismuuttujalla F on säännöllinen ehdollisen todennäköisyys $P(F \in B|\mathcal{F}_t)(\omega)$, jolla $\forall \omega$ kuvaus $B \mapsto P(F \in B|\mathcal{F}_t)(\omega)$ jossa $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Borelin joukko) on todennäköisyys ja $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\omega \mapsto P(F \in B|\mathcal{F}_t)(\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallnen.

   Osoita että kun $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on kiinteä, $t \mapsto P(F \in B|\mathcal{F}_t)(\omega)$ on rajoitettu $\mathbb{F}^W$-martingaali.

   Oletamme että jokaiselle (ω, t) F:n ehdollisella jakaumalla on tiheys Lebesgue mitan suhteen eli kaikille rajoitetuille mitallisille testi funktiolle $g(y)$

   $$E_P(g(F)|\mathcal{F}_t)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x)P(F \in dy|\mathcal{F}_t)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(F)p_{t,T}(y,\omega)dy, \quad 0 \le t < T$$

   jossa $p_{t,T}(y,\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen ja kun $t = T$ $p_{T,T}(y,\omega) = \delta_{F(\omega)}(y)$ on Diracin delta.

   Osoita että melkein kaikille y:lle (Lebesgue mitan suhteen) $(t,\omega) \mapsto p_{t,T}(y,\omega)$ on myös $\mathbb{F}^W$- martingaali.

2. Oletamme nyt että $F(\omega) = X_T(\omega)$ jossa X_t on $\mathbb{F}^W$-sopiva Markov prosessi eli ehdollinen tiheysfunktio $p_{t,T}(\omega, y) = p_{t,T}(X_t(\omega), y)$ on $\sigma(X(t))$-mitallinen jossa $p_{t,T}(x,y) = p_{t,T}(y|X_t = x)$ on Borel mitallinen funktio.

   Oletetaan että $X(t)$:lla on jatkuva Markov prosessi jolla

   $$X(t) = X(0) + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t a(X(s))dW(s)$$

   Silloin kun $p_{t,T}(x,y)$ on $C^{1,2}$ muuttujen t ja x:n suhteen seuraa Iton kaavalta että

   $$p_{t,T}(X(t),y) = p_{0,T}(X(0),y) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p_{s,T}(X(s),y)a(X(s))dW(s)$$

Kun integraalien ja stokastisen integraalin järjestystä voi vaihtaa (stokastisen Fubinin lauseen oletuksia ovat voimassa) saadaan

$$
\begin{aligned}
&E(g(X_T)|\mathcal{F}_t)E(g(X_T)|X(t)) = \int_{\mathbb{R}} g(y)p_{0,T}(X(0),y)dy \\
&+ \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{\partial}{\partial x}p_{s,T}(X(s),y)dy \right) a(X(s))dW(s) \\
&= E(g(X(T))|X(0)=x_0) \\
&+ \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\log p_{t,T}(X(s),y) \right\} p_{s,T}(X(s),y)dy \right) a(X(s))dW(s) \\
&E(g(X_T)|X(0)=x_0) + \int_0^T E\left(g(X(T))\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\log p_{s,T}(X(s),X(T)) \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right) a(X(s))dW(s)
\end{aligned}
$$

(a) Olkoon $X_t = W_t$, eli $a(x) = 1$ ja $b(x) = 0$, ja $g(y) = \mathbf{1}(y \le K)$. Laske Ito Clarck esityslause satunnaismuuttujalle $F(\omega) = g(W_T(\omega)) = \mathbf{1}(W_T(\omega) \le K)$.

(b) Olkoon $S(t) = S(0)\exp\Big(aW(t) + (b - a^2/2)t \Big)$, joka on Iton lineaarisen SDY:n

$$dS(t) = S(t)\big(bdt + adW(t)\big).$$

Laske Ito Clarck esityslause satunnaismuuttujalle digitaaliselle optiolle $F(\omega) = g(S_T(\omega)) = \mathbf{1}(S_T(\omega) \le K)$.