HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan II, Harjoitus-10 (20.4.2016)

1. Olkoon X_t, Y_t jatkuvat polut joilla on olemassa kvadrattiset kovariaatiot $[X,X]_t$, $[Y,Y]_t$ ja ristivariaatio $[X,Y]_t$.

   Osoita että

   $$Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t)\Big(z_0 + \int_0^t \exp(-X_s + \frac{1}{2}[X,X]_s)\, d\big(Y_s - [X,Y]_s\big)\Big)$$

   on lineaarisen poluttaisen differentiaali yhtälön ratkaisu

   $$dZ_t = Z_t dX_t + dY_t, \quad \text{alkuarvolla } Z_0 = z_0 \text{ , eli } Z_t \text{ joka toteuttaa}$$
   $$Z_t = z_0 + \int_0^t Z_s d\overleftarrow{X}_s + Y_t - Y_0$$

   jossa integraali on poluttainen etuperäinen integraali.

   Vihje:

   Muistetaan että kun X_t ja Y_t ovat jatkuvia ja rajoitetusti heilähteleviä, eli $\mathrm{Var}_{[0,t]}(X) < \infty$ $\mathrm{Var}_{[0,t]}(Y) < \infty$, lineaarisen differentiaali yhtälön ratkaisu on

   $$Z_t = z_0 \exp(Z_t) \quad \text{, kun } Y_t \equiv \text{vakio. ,} \quad \text{muuten}$$
   $$Z_t = \exp(X_t)\Big(z_0 + \int_0^t \exp(-X_s) dY_s\Big)$$

   (tarkista !),

   ja kun $Y_t \equiv$ vakio ja $\exists [X,X]_t > 0$, Ito Föllmerin kaavasta seuraa

   $$Z_t = z_0 \exp\big(X_t - \frac{1}{2}[X,X]_t\big)$$

   Käytä osittaisintegrointikaava

   $$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X,Y]_t$$

   yleisessä tapauksessa.

2. Ornstein Uhlenbeck prosessi X_t toteuttaa lineaarista Langevin yhtälöä

   $$dX_t = -\alpha X_t dt + dW_t, \quad X_0 = x$$

jossa W_t on Brownin liike. Osoita että

$$X_t = e^{-\alpha t} x + e^{-\alpha\ t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

on yhtälön (**??**) ratkaisu. Martingaali hajotelman avulla laske odotuisarvot $E(X_t)$ ja $E(X_t^2)$.

3. Olkoon X_t jatkuva polku jolla on kvadraattinen variaatio X_t.

   Olkoon

   $$X_t^* := \max_{0 \le s \le t} X_s$$

   joukseva maksimi. Osoita etta kuvaus $t \mapsto X_t^*$ on jatkuva.

   Olkoon $F(x,y) \in C^{1,2}$ eli $F_x(x,y), F_{xx}(x,y), F_y(x,y)$ ovat olemassa ja jatkuvia.

   Laske moniulotteisen Ito-Föllmerin kaavalla etuperäinen poluttainen integraali

   $$\int_0^t F_x(X_s, X_s^*) dX_s$$

   Lakse etuperäinen poluttainen integraali

   $$\int_0^t X_s^* dX_s$$

4. Olkoon $(W(t) : t \ge 0) \perp\!\!\!\perp (B(t) : t \ge 0)$ riippumattomia Brownin liike prosesseja. Olkoon $t_i^n = i2^{-n}$.

   Osoita että

   $$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \Big(W(t_i^n \wedge t) - W(t_{i-1}^n \wedge t) \Big) \Big(B(t_i^n \wedge t) - B(t_{i-1}^n \wedge t) \Big) \xrightarrow{L^2} 0$$

   jossa konvergenssi on $L^2(P)$:n mielessä.

   (Borel Cantelli lemman avulla voidaan osoitta että konvergenssi pätee myös P-melkein varmasti ja kvadrattinen ristivariaatio on $[W, B]_t = 0$).

5. Olkoon edelleen (W_t) ja (B_t) riippumattomia referenssi todennäköisyyden P:n suhteen.

   Käsitellaan aikajatkuva osakemalli jossa on kaksi oseketta:

$$
\begin{aligned}
dS_t &= S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) \quad , S_0 > 0 \\
dX_t &= X_t(b\, dt + a\, dB_t), \quad X_0 > 0
\end{aligned}
$$

   jossa $\mu, \sigma, a, b, \in \mathbb{R}$, $S_0, X_0 > 0$.

   Koska molemmat $S_t, X_t > 0$ $\forall t$ P-melkein varmasti jompikumpi osake kelpaa numerääriksi.

   Olkoon

$$
\widetilde{X}_t = X_t/S_t \text{ ja } \widetilde{S}_t = S_t/X_t
$$

   Laske Iton kaavan avulla (tai osittaisintegroinnilla) $\widetilde{X}_t$ prosessille (vastaavasti $\widetilde{S}_t$ prosessille) Iton differentiaali.

6. Millä σ, μ, a, b arvoilla $\widetilde{S}_t$ (vastaavasti $\widetilde{X}_t$) ovat martingaaleja P todennäköisyyden suhteen ?

7. Olkoon W_t Brownin liike ja $\int_0^t W_s dW_s = (W_t^2 - t)/2$ Ito integraali. Tarkista että Iton isometria on pätee:

$$
E\left(\int_0^t W_s dW_s\right) = \int_0^t E(W_s^2) ds
$$

8. Martingaali hajotelman avulla laske $E(W_t^4)$. Kirjoita ensin Iton differentiaali.