Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan, kevät 2016

Dario Gasbarra[1]

5. huhtikuuta 2016

[1]Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

My Thesis, paradoxically and a little provocatively, but nonetheless genuinely, is simply this:

PROBABILITY DOES' NOT EXISTS.

The abandonment of superstitious beliefs about the existence of Phlogiston , the Cosmic Ether, Absolute Space and Time, ..., or Faires and Witches was an essential step along the road on scientific thinking. Probability too, if regarded as something endowed with some kind of objective existence is no less a misleading misconception, an illusory attempt to exteriorize or materialize our true probabilitic beliefs.

Bruno De Finetti, Theory of Probability (1974).

Sisältö

Todennäköisyys = Hinta Bruno De Finetti (1906-1985) oli matemaatikko, taloustieteilijä ja filosofi. Hänen tieteenfilosofiassa torjutaan absoluttisen todennäköisyyden käsite. Sen sijaan todennäköisyydellä on puhtaasti operaativinen merkitys. Todennäköisyydet ovat aina suhteellisia, meidän tiedon tilasta riippuen.

Epävarmassa maailmassa, tapahtumat voidaan luokitella kahteen luokkaan, $\mathcal{V} = \{$ *varmat tapahtumat* $\}$ ja $\mathcal{E} = \{$ *epävarmat tapahtumat* $\}$.

Kun tapahtuma $E \in \mathcal{V}$ on varma ja $F \supseteq E$ eli F tapahtuu aina silloin kun E tapahtuu, seuraa että myös $F \in \mathcal{V}$ on varma. Tapahtuma E on mahdoton jos sen komplemnetti tai negaatio E^c (joka tapahtuu silloin kun E ei tapahdu) on varma.

Merkitään luokka $\mathcal{N} = \{$ *mahdottomat tapahtumat* $\}$ ja sanotaan että tapahtumat E, F ovat keskenään *ei sopivia* kun niiden yhteensattuma on mahdoton, eli $(E \cap F) \in \mathcal{N}$. Huomataan myös että jokaiselle tapahtumalle E, $(E \cup E^c) \in \mathcal{V}$. Kun E ja F ovat tapahtumia, $(E \cup F)$ merkitsee tapahtuman jossa E tai F tapahtuvat.

Eräs vedonlyöntimeklari ottaa vastaan vetoja tapahtumista $E_1, \dots, E_n$, jotka ovat keskenään ei-sopivia, siis $(E_i \cap E_j) \in \mathcal{N}$ (mahdoton tapahtuma) kun $i \neq j$. Tarkemmin, meklarin on pakko ottaa vastaan mitä tahansa vetoja (myös negatiivisilla panoksilla) tapahtumista E_i, $i = 1, \dots, n$, ja niiden yhdisteistä $(E_i \cup E_j), (E_i \cup E_j \cup E_k), \dots$ jne.

Meklari valitsee kuitenkin vetojen hinnat (tulkinta: **todennäköisyydet**) $Pr(E_i), Pr(E_i \cup E_j), Pr(E_i \cup E_j \cup E_k) \dots$ jne.

Merkinnät: $p_i := Pr(E_i)$, ja "satunnaissuure" $\mathbf{1}_{E_i}$ on tapahtuman E_i:n indikaattori joka saa arvon 1 jos "sattuma" E_i tapahtuu, muuten 0.

Pr lyhennys sopii hyvin molemmille englanninkielisille sanoille

Price = hinta ja **Pr**obability = todennäköisyys.

Vastapuolen voitto on satunnaissuure

$$V = (\mathbf{1}_{E_1} - p_1)y_1 + \cdots + (\mathbf{1}_{E_1} - p_n)y_n$$

jossa $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on vastapuolen vapaasti valittavissa oleva vedonlyöntistrategia.

Jos meklari on johdonmukainen, hän määrää vedonlyönnin hinnat siten että vastapuolelle ei syntyisi *arbitraasimahdollisuuksia* , eli tilaisuuksia joissa voi tehdä riskitönta voittoa.

Teoreema 0.0.1. *(Tämä on väite eikä määritelmä !)*
Arbitraasivapausoletuksesta seuraa välittömästi:

1. *Vetojen hinnat ovat yksikäsitteisiä (yhden hinnan laki), vedolle* $\mathbf{1}_{E_i}$ *on vain yksi hinta* $Pr(E_i) \in [0,1]$.
2. *Jos* $E_i \in \mathcal{V}$ *(varma tapahtuma),* $Pr(E_i) = 1$ *ja vastaavasti jos* $E_i \in \mathcal{N}$ *(mahdoton tapahtuma), niin* $Pr(E_i) = 0$.
3. *Hinnat (eli todennäköisyydet) ovat (äärellisesti)-additiivisia.*

Todistus :

1. Jos vedolle $\mathbf{1}_E$ olisi kaksi hintaa, $p_1 > p_2$, vastapuoli voisi ostaa meklarilta mielivaltainen suuri määrää $x > 0$ vedonlyöntilippua hinnalla p_1 ja myydä takaisin meklarille x vedonlyöntilippua hinnalla p_2. Vastapuolen voitto (meklarin tappio) on kaikissa tapauksissa

$$(\mathbf{1}_E - p_1)x - (\mathbf{1}_E - p_2)x = (p_1 - p_2)x$$

2. Jos E on varma tapahtuma, ja vedolle $\mathbf{1}_E$ on hinta $p \neq 1$, vastapuolelle syntyy varmasti voitto

$$(\mathbf{1}_E - p)x = (1 - p)x$$

Kun $p > 1$ (vastaavasti $p < 1$) vastapuoli saa mielivaltainen suuri voittoa valitsemalla $x < 0$ (vastaavasti $p > 1$). Jos E on mahdoton tapahtuma, vastapuolen voitto on varmasti

$$(\mathbf{1}_E - p)x = -px$$

jossa $x < 0$ on mielivaltainen.

3. Olkoon ensin $n = 2$, $(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{N}$,

sen lisäksi oletamme että $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{V}$ (eli on varma tapahtuma). Siitä seuraa $Pr(E_1 \cup E_2) = 1$. Lineaarisella systeemillä

$$\begin{cases} V(E_1) = (1-p_1)y_1 - p_2 y_2 = & \text{vastapuolen voitto kun } E_1 \text{ tapahtuu} \\ V(E_2) = -p_1 y_1 + (1-p_2)y_2 = & \text{vastapuolen voitto kun } E_2 \text{ tapahtuu} \end{cases}$$

on ratkaisu mille tahansa voitto-vektorille $(V(E_1), V(E_2))$ jos ja vain jos kertoimien matriisi on kääntyvä, eli

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 \\ -p_1 & (1-p_2) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 \neq 0$$

Estääkseen vastapuolta tekemistä riskitöntä voittoa, on välttämätöntä että

$$Pr(E_1) + Pr(E_2) = 1 = Pr(E_1 \cup E_2).$$

Kun $n > 2$, $E_i \cap E_j \in \mathcal{N}$ kun $i \neq j$ ja, $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{V}$ (eli on varma), meklari on johdonmukainen jos ja vain jos

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 & \dots & -p_n \\ -p_1 & (1-p_2) & \dots & -p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & (1-p_n) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 - \cdots - p_n = 0$$

Tämä determinantti lasketaan induktiolla tai lineaari-algebran Sylvesterin lemman kautta:

Lemma 0.0.1. *Jos A on $n \times m$ ja B on $m \times n$ matriisi, ja I_n on $n \times n$ identiteetti matriisi,*

$$\det\Big(I_n + AB\Big) = \det\Big(I_m + BA\Big)$$

Yleisemmin, kun $(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{N}$, koska $\big(E_1 \cup E_2 \cup (E_1 \cup E_2)^c\big) \in \mathcal{V}$, seuraa

$$1 = Pr(E_1) + Pr(E_2) + Pr((E_1 \cup E_2)^c) = Pr(E_1) + Pr(E_2) + \big(1 - Pr(E_1 \cup E_2)\big)$$

siis $Pr(E_1 \cup E_2) = Pr(E_1) + Pr(E_2)$ $\square$

Huomataan että todellisuudessa, vedonlyönnti firmojen hinnat eivät ole tässä mielessä johdonmukaisia, mutta vastapuolen strategiat ovat rajoitettuja, pelaajalle sallitaan vain pitkiä posititioita (long position) jossa pelaaja saa ostaa positiivista määrää vedonlyöntilippuja eikä voi pakottaa vedonlyönnin meklaria ostamaan takaisin samoja vedonlyöntilippuja samoilla hinnoilla. Toisaalta vedonlyöntimeklari asettamalla vedonlyöntihintoja pystyy tekemaan arbitraasia jos löytää asiakkaita. Koska alalla on kilpailua, käytännössä vedonlyönnin meklarille jää pientä marginaalia. Silloin kun eri meklarit käyttävät eri kertoimia, joskus voi syntya arbitraasi-mahdollisuuksia asiakkaille myös pitkien positioiden kautta.

Oletetaan että meklari on hinnoitellut johdonmukaisesti keskenään eisopivia tapahtumia $E_1, \dots, E_n$ ja niiden yhdisteitä hinnoilla $Pr(E_1), \dots, Pr(E_n)$, jossa P on äärellisesti additiivinen.

Käsitellään vielä monimutkaisempaa vedonlyöntisopimusta (“satunnaissuuretta”)

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}_{E_i} = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbf{1}_{E_x}$$

jossa

$$E_x := \bigcup_{1 \le i \le n : x_i = x} E_i = \big(\text{“}X \text{ saa arvon } x\text{“} \big).$$

ja $E_x = \emptyset$ jos $x \neq x_i \; \forall i$. Vedonlyönninsopimus X maksaa vastapuolelle etukäteen sovittua summaa $x_i \in \mathbb{R}$ silloin kun “sattuma” E_i tapahtuu.

Tämä sopimus on “toistettavissa” vedonlyönnin strategialla $(x_1, \dots, x_n)$.

Koska arbitraasivapaassa hinnoittelusysteemissä hinnat ovat yksikäsitteisiä , seuraa että X:n ainoa johdonmukainen hinta (tulkinta: satunnaissuureen **odotusarvo**, englanniksi Expectation) on

$$\mathbb{E}_{Pr}(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i Pr(E_i) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x Pr(E_x) \; .$$

- Odotusarvo on lineaarinen: kun a, b ovat vakioita ja X, Y satunnaisia,

$$E_{Pr}(aX + bY) = aE_{Pr}(X) + bE_{Pr}(Y)$$

- Odotusarvo on positiivinen: jos $(X \ge 0)$ on varma tapahtuma Pr todennäköisyyden suhteen, eli $Pr(X \ge 0) = 1$, seuraa

$$E_{Pr}(X) \ge 0$$

Huomautus 0.0.1. *Olkoon*

$$\mathcal{X} \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{1}(E_i) \; : n \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

vedonlyönninsopimusten osajoukko.

Matemaattisessa rahoitusteoriassa, karakterisoidaan arbitraasivapaita hintasysteemejä

$$c = (c(X) : X \in \mathcal{X})$$

Lause 0.0.1. *(Rahoitusteorian ensimmäinen päälause) Hintasysteemi $c(\cdot)$ on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa hinnoittelu-todennäköisyys Pr, jolla $Pr(E) = 0 \iff E \in \mathcal{N}$, ja kaikille $X \in \mathcal{X}$*

$$c(X) = \mathbb{E}_{Pr}(X) = \sum_x xPr(X = x).$$

Yleisesti silloin kun on olemassa hinnoiteilu-todennäköiosyys Pr ei tarvitse olla yksikäsitteinen, voi olla useita hinnoittelutodennäköisyyksia jotka generoivat samaa hintasysteemia $c(\cdot)$.

Todistus *($\Longleftarrow$): Olkoon $X_1, \dots, X_m$ satunnaisuureita ja Pr hinnoittelutodennäköisyys, joka määrä hintasysteemiä*

$$c_k = E_{Pr}(X_k) = \sum_{x \in \mathbb{R}} xPr(X_k = x), \quad k = 1, \dots, m.$$

Tässä oletamme että $\{\ x : Pr(X_k = x) > 0\}$ on äärellinen, $\forall k = 1, \dots, m$.

Olkoon $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ vedonlyönti strategia jolla tapahtuma

$$\left\{ \sum_{k=1}^m y_k(X_k - c_k) \geq 0 \right\} \in \mathcal{V}$$

on varma. Toisaalta, odotusarvon lineaarisuudesta, koska $c_k = E_{Pr}\big(X_k\big)$,

$$E_{Pr}\left(\sum_{k=1}^m y_k(X_k - c_k) \right) = \sum_{k=1}^m y_k \left(E_{Pr}\big(X_k\big) - c_k \right) = 0\ .$$

Tästä seuraa että tapahtuma

$$\left\{ \sum_{k=1}^m y_k(X_k - c_k) > 0 \right\} \in \mathcal{N}$$

on mahdoton, koska muuten

$$Pr\left(\sum_{k=1}^m y_k(X_k - c_k) > 0 \right) > 0$$

josta seuraa ristiriita

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^m \left(E_{Pr}(X_k) - c_k \right) = E_{Pr}\left(\sum_{k=1}^m y_k(X_k - c_k) \right) \\ &= E_{Pr}\left(\left(\sum_{k=1}^m y_k(X_k - c_k) \right) \mathbf{1}\left\{ \sum_{k=1}^m y_k(X_k - c_k) > 0 \right\} \right) > 0. \end{aligned}$$

Implikaatio ($\Longrightarrow$) *osoitetaan kohta konveksianalyysin argumentilla* $\square$

Arbitraasi-vapaassa tilanteessa, hinnoittelu-todennäköisyyden Pr:n avulla, määrittelemällä

$$c(Y) = \mathbb{E}_{Pr}(Y) = \sum_i y_i Pr(E_i)$$

laajennetaan alkuperäistä hintasysteemiä säilyttämällä arbitraasivapautta.

Kun on olemassa, hinnoittelutodennäköisyys Pr *ei tarvitse olla yksikäsitteinen, siis jos hinta-systeemi* $(c(X) : X \in \mathcal{X})$ *on arbitraasi-vapaa, sillä voi olla useita arbitraasi-vapaita laajennuksia.*

Huomautus 0.0.2. *Tässä johdannossa emme ole vielä paljastaneet että Kolmogorovin todennäköisyyden aksioomeissa tapahtumat* E_i *tulevat olemaan jonkun pistetapahtumien avaruuden* Ω*:n osajoukkoja. Sen sijaan De Finetti kannatti minimaalista lähestymistapaa, jossa pistetapahtumien avaruutta* Ω *ei edes tarvita.*

Arbitraasi-vapaus ja hintasysteemi

Määritelmä 0.0.1. *Olkoon* V *vektoriavaruus (esimerkiksi* $V = \mathbb{R}^d$*).*

Joukko $\mathcal{C} \subseteq V$ *on konveksi jos ja vain jos*

$$x, y \in \mathcal{C},\ 0 \le \alpha \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \big(\alpha x + (1-\alpha) y\big) \in \mathcal{C}.$$

Tarkastellaan yksinkertäinen markkinamalli, kahdella ajanhetkellä $t \in \{\ 0, 1 = T\}$, jossa $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ on äärellinen joukko maailmantiloja. Osakken arvo hetkellä $t = 0$ on $S_0(\omega) = \pi(S)$ deterministinen, ja osakkeen arvo hetkellä $t = 1$ on ω:sta riippuen $S_1(\omega) \ge 0$ €.

Voidaan olettaa että $\forall i$, pistetapahtumat $\{\ \omega_i\}$ ovat mahdollisia.

Koska on kyse sijoitukseista, oletetetaan myös että $S_1(\omega) \ge 0\ \forall \omega \in \Omega$. Sijoitus voi menettää kokonaan arvonsa mutta ei saa olla koskaan negatiivinen.

Lause 0.0.2. $\pi(S)$ *on arbitraasi hinta yhdelle osakkeelle* S *jos ja vain jos*

$$P(S_1 \ge \pi(S)) = 1 \textit{ ja } P(S_1 > \pi(S)) > 0 \textit{ vai } P(S_1 \le \pi(S)) = 1 \textit{ ja } P(S_1 < \pi(S)) > 0$$

Näytämme että jos näin ei tapahdu, on olemassa arbitraasi-vapaa hinnoittelu systeemi Pr kaikille Ω:n tapahtumille, jolla $Pr(\omega_i) > 0\ \forall i$ ja $\pi(S) = E_{Pr}(S)$.

Olkoon $\mathcal{Q}$ todennäköisyysvektoreiden avoin alijoukko

$$\mathcal{Q} = \{Q : Q(\omega_i) > 0\ \forall i = 1, \dots, n \text{ ja } \sum_{i=1}^{n} Q(\omega_i) = 1\}, \text{ ja vastaavat hinnat}$$

$$\mathcal{C} = \Big\{ E_Q(S_1) = \sum_{i=1}^{n} S_1(\omega_i) Q(\omega_i) : Q \in \mathcal{Q} \Big\}$$

Väite on osoitettu kun näytämme että $\pi(S) \in \mathcal{C}$.
Koska malli on arbitraasi vapaa on olemassa

$$\begin{aligned} &\omega_1 \text{ jolla } Pr(\omega_1) > 0, \quad a = S_1(\omega_1) - \pi(S) < 0 \\ &\text{ja } \omega_2 \neq \omega_1 \text{ jolla } Pr(\omega_2) > 0, \quad b = S_1(\omega_2) - \pi(S) > 0, \end{aligned}$$

ja koska $\mathcal{C}$ on konveksi, seuraa (harjoitustehtävä !) että

$$\mathcal{C} \supseteq (a + \pi(S), b + \pi(S)) \ni \pi(S) \ .$$

Vihje Olkoon $\widehat{Q}(\omega_1) = \frac{b}{b-a}$, $\widehat{Q}(\omega_2) = -\frac{a}{b-a}$, ja $\widehat{Q}(\omega_j) = 0$ kun $j \neq 1, 2$. Seuraa

$$E_{\widehat{Q}}(S_1) = \sum_{i=1}^{n} S_1(\omega_i) \widehat{Q}(\omega_i) = S_1(\omega_1) \widehat{Q}(\omega_1) + S_1(\omega_2) \widehat{Q}(\omega_2) =$$
$$a \bigg(\frac{b}{b-a} \bigg) - b \bigg(\frac{a}{b-a} \bigg) = 0$$

jossa $\widehat{Q} \in \overline{\mathcal{Q}} \setminus \mathcal{Q}$ koska $\widehat{Q}(\omega_i) = 0$ kun $\omega_i \notin \{1, 2\}$.
Osoitetaan sitten (harjoitustehtävä) että on olemassa jono $Q^{(n)} \in \mathcal{Q}$ jolla kun $n \to \infty$

$$Q^{(n)}(\omega_i) > 0 \text{ ja } Q^{(n)}(\omega_i) \to \widehat{Q}(\omega_i),\ \forall i = 1, \dots, n$$

ja $E_{Q^{(n)}}(S_1) \to E_{\widehat{Q}}(S_1) = \pi(S)$.
Huomautus Kun kaikkien mahdottomien tapahtumien joukko on kiinnitetty, sen jälkeen satunnaisuudella ei ole enää minkäläistä roolia: todennäköisyydet ovat johdonmukaisia hintasysteemeja ja jokaisella mahdollisella tapahtumalla (jolla on positiivinen todennäköisyys) tule olemaan aidosti positiivisia hintoja. Johdonmukaisia hintasysteemeja voi olla useita.

Seuraavaksi käsittelemme markkinamallia jossa on useita osakkeita, ja siihen tarvitaan konveksianalyysin työkaluja.

Erottavan hypertason lause $\mathbb{R}^d$:ssa.

Lemma 0.0.2. *(Föllmer ja Shiedin kirjasta, Proposition A.1)*
Olkoon $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ konveksi joukko jolla $0 \notin \mathcal{C}$. On olemassa $\rho \in \mathbb{R}^d$ jolla

$$(x, \rho) := x \cdot \rho := \sum_{i=1}^{d} x_i \rho_i \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

ja on olemassa $x_0 \in \mathcal{C}$ jolla $x_0 \cdot \rho > 0$.
Sen lisääksi jos $0 \notin \overline{\mathcal{C}}$, seuraa että on olemassa $\rho \in \mathbb{R}^d$ jolla $x \cdot \rho > 0$ $\forall x \in \mathcal{C}$.

Geometrinen tulkinta: on olemassa erottava hypertaso

$$H = \left\{ \ z :\in \mathbb{R}^d : z \cdot \rho = 0 \right\}$$

joka sijoituu konveksijoukon $\mathcal{C}$ ja pisteen 0:n välissä.
Tod. Merkitään $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ (euklidinen normi), ja $\overline{\mathcal{C}}$ on joukon $\mathcal{C}$:n sulkema.
Huomataan että

$$0 \notin \overline{\mathcal{C}} \iff \inf_{x \in \mathcal{C}} |x| > 0 \iff \inf_{x \in \overline{\mathcal{C}}} |x| > 0,$$

ja siinä tapauksessä on olemassa $y \in \overline{\mathcal{C}}$ jolla $|y| = \inf_{x \in C} |x| > 0$. Koska konveksi joukon sulkeuma $\overline{\mathcal{C}}$ on konveksi (harjoitustehtävä), seuraa $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned}
&|(x-y)\alpha + y|^2 \geq |y|^2 > 0 \\
\iff &(x-y, x-y)\alpha^2 + (y,y) + 2\alpha(x-y,y) \geq (y,y) > 0 \\
\iff &(x-y, x-y)\alpha \geq 2(y-x, y)
\end{aligned}$$

kun $\alpha \downarrow 0$, seuraa $(x,y) \geq (y,y) > 0$, siis voidaan ottaa $\rho = y$.
Käsitellään nyt tapausta jolloin $\inf_{x \in \mathcal{C}} |x| = 0$. Voidaan olettaa että C joukon virittämä lineaarinen aliavaruus on koko $\mathbb{R}^d$, eli

$$L = \left\{ \ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k : m \in \mathbb{N}, \ \lambda_k \in \mathbb{R}, x_k \in C \right\} \ = \mathbb{R}^d$$

muuten jatkamme todistusta aliavaruudessa $L \simeq \mathbb{R}^\ell$ jollakin $\ell < d$.
Osoitan että kun $\mathcal{C}$ on konveksi ja $0 \notin \mathcal{C}$, siitä seuraa että $\overline{\mathcal{C}} \subsetneq \mathbb{R}^d$.

Olkoon $\{e_1,\dots,e_d\} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathbb{R}^d$:n kanta, jossa e_i eivät ole välttämättä ortogonaalisia mutta virittävät $\mathbb{R}^d$. Näytämme että

$$\xi := -\sum_{i=1}^d e_i \notin \overline{\mathcal{C}}$$

Muuten olisi olemassa jono $(\xi^{(n)} : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{C}$

$$\xi^{(n)} = \sum_{i=1}^d \lambda_i^{(n)}\, e_i \to \xi \text{ kun } n \to \infty \ , \quad \iff \quad \lambda_i^{(n)} \to -1 \; i = 1,\dots,d.$$

Kun n on tarpeeksi suuri $\lambda_i^{(n)} < 0 \; \forall i = 1,\dots,d$. Tästä seuraa

$$0 = \left(\frac{1}{1-\sum_{j=1}^d \lambda_j^{(n)}}\, \xi^{(n)} + \sum_{i=1}^d \frac{-\lambda_i^{(n)}}{1-\sum_{j=1}^d \lambda_j^{(n)}}\, e_i \right) \in \mathcal{C},$$

jossa 0 on konveksi kombinaatio vektoreista $\xi^{(n)}, e_1,\dots,e_d \in \mathcal{C}$, joka on konveksi joukko. Koska oletettiin $0 \notin \mathcal{C}$, tästä seuraa $\xi \notin \overline{\mathcal{C}}$.

Koska $\overline{\mathcal{C}} \neq \mathbb{R}^d$, jonolle $\zeta_n = \frac{\xi}{n} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{C}}$ jolla $\forall n$

$$\inf_{x \in \mathcal{C}} |x - \zeta_n| > 0$$

ja $\zeta_n \to 0$.

Jokaiselle n:lle joukko

$$\mathcal{C}_n = (\mathcal{C} - \zeta_n) := \left\{ \; x - \zeta_n : \zeta_n \in \mathcal{C} \right\}$$

on konveksi joka toteuttaa lemman ensimmäisen osan oletusta $\inf_{x\in\mathcal{C}_n} |x| > 0$. Siitä seuraa että on olemassa $\rho_n \in \mathbb{R}^d$, jolla

$$(\rho_n, x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}_n$$

Kertomalla positiiivisella skalaarilla voidaan olettaa että $\forall n$, $|\rho_n| = 1$.

Koska yksikkö-pallon pinta $\mathcal{S}^{d-1}$ on kompakti, Heine-Borelin lemmasta seuraa että on olemassa suppeneva alijono $\rho_{n_k} \to \rho$, jolla $|\rho| = 1$, ja $\forall x \in \mathcal{C}$

$$\rho \cdot x = \lim_{k\to\infty} \rho_{n_k} \cdot x = \lim_{k\to\infty} \rho_{n_k} \cdot (x - \zeta_{n_k}) \geq 0$$

koska ja $|\zeta_{n_k}| \to 0$.

Koska $|\rho| = 1$, $\rho \neq 0$, ja koska $L = \mathrm{span}(\mathcal{C})$ on d-ulotteinen, ei voi olla $(x,\rho) = 0 \; \forall x \in \mathcal{C}$, muuten olisi $\mathcal{C} \subseteq \rho^\perp$ jossa hypertaso $\rho^\perp$ on $(d-1)$-ulotteinen. Siksi on olemassa $x_0 \in \mathcal{C}$ jolla $(\rho \cdot x_0) > 0$ □

Huomautus Erottavan hypertason lause yleistyy ääretönulotteisessa vektoriavaruudessa Hahn-Banachin lauseeksi, palataan siihen myöhemmin.

Yleinen todennäköisyys avaruus Jatkossa $(\Omega, \mathcal{F})$ on abstrakti todennäköisyysavaruus, jossa $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ on tapahtumien σ-algebra, joka toteuttaa

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. kun $A \in \mathcal{F}$ myös $A^c = \Omega \setminus \mathcal{A} \in \mathcal{F}$,
3. kun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$, myös $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Todennäköisyysavaruus on varustettu todennäköisyysmitalla $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$, jolla $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, ja $\mathbb{P}$ on σ-additiivinen, eli kun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{F}$, ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ kun $i \neq j$, siitä seuraa että

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Huomataan myös että kun $B \subseteq A$ jossa $A \in \mathcal{F}$ ja $\mathbb{P}(A) = 0$, voidaan laajentaa todennäköisyyden määrittelyjoukkoa ja asettaa $\mathbb{P}(B) = 0$.

Merkitään

$$\mathcal{N}^{\mathbb{P}} = \big\{B \subseteq \Omega : \ \exists A \in \mathcal{F}, \text{ jolla } B \subseteq A \ \text{ ja } \mathbb{P}(A) = 0\big\}$$

on $\mathbb{P}$-nolla mittaisten tapahtumien joukko.

Satunnaismuuttuja $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ on mitallinen funktio, jolla

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \quad X^{-1}(B) := \big\{\omega : X(\omega) \in B\big\} \in \mathcal{F}.$$

jossa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \sigma\big(U \subseteq \mathbb{R}^m : \ U \text{ avoin } \big)$ on avoimien joukkojen virittämän σ-algebra.

Määritelmä 0.0.2. *Olkoon $\mathbb{P}$ ja Q todennäköisyysmittoja todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$. Sanotaan että $\mathbb{P}$ dominoi Q ja merkitään $\mathbb{P} \gg Q$ jos $\mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0$, eli $\mathcal{N}^{\mathbb{P}} \subseteq \mathcal{N}^{Q}$, ja sanotaan että $\mathbb{P}$ ja Q ovat ekvivalentteja ja merkitään $\mathbb{P} \sim Q$ silloin kun $\mathbb{P}(A) = 0 \iff Q(A) = 0$, eli $\mathcal{N}^{P} = \mathcal{N}^{Q}$.*

Kun Ω on numeroituva $P \sim Q$ jos ja vain jos $\forall \omega \in \Omega \ P(\omega) = 0 \iff Q(\omega) = 0$

Määritelmä 0.0.3. *Silloin kun $P \gg Q$ todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}$, on olemassa Radon-Nikodym mittojen derivaatta $Z(\omega) \geq 0$ joka on ei-negatiivinen satunaismuuttuja jollsa $E_P(Z) = 1$, ja mitan vaihto kaava pätee*

$$E_Q(X) = E_P(ZX)$$

kaikille satunnaismuuttujille $X(\omega) \geq 0$ *Q-melkein varmasti. Huomataan että* $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ja merkitään*

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = Z(\omega) \ .$$

$Z(\omega)$ *kutsutaan myös uskottavuusosamääräksi (englanniksi likelihood-ratio).*

Arbitraasi d-osakkeilla Olkoon

$$S_1(\omega) = (S_t^{(0)} = 1, S_t^{(1)}(\omega), \dots, S_t^{(d)}(\omega)) \in \mathbb{R}_+^{d+1} \ \mathbb{P}\text{-melkein varmasti}$$

satunnaisvektoreita todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, ja

$$S_0(\omega) \equiv \pi = (\pi_0 = 1, \pi_1 \dots, \pi_d) \in \mathbb{R}_+^{d+1} \quad \text{niiden hinta-vektori hetkellä } t = 0.$$

Merkintä: $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Tässä $t \in \{0, 1\}$ on aika parametri, $S_t^{(0)} \equiv 1$ on riskitön nolla korkoinen pankkitilitalletus, josta voidaan myös lainata rahaa nolla korolla. Tulkitsemme että $S_t^{(k)}$ ovat osakkeiden hintoja ja siksi ovat ei-negatiivisia, siis $\mathbb{P}\big(S_1(\omega)^{(k)} \geq 0\big) = 1$ kaikille komponenteille.

Sijoitus-strategia tai salkku (englanniksi: portfolio) kuvaa osakepainojen vektori $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Salkun arvo on varallisuus prosessi V_t jolla

$$V_0 = \xi \cdot \pi = \xi_0 + \sum_{i=1}^{d} \xi_i \pi_i \quad \text{hetkellä } t = 0$$

$$V_1(\omega) = \xi \cdot S_1(\omega) = \xi_0 + \sum_{i=1}^{d} \xi_i S_1^{(i)}(\omega) \quad \text{hetkellä } t = 1$$

Määritelmä 0.0.4. *1.* ξ *on arbitraasi salkku kun* $V_0 \leq 0$,

$$\mathbb{P}\big(\xi \cdot V_1 \geq 0\big) = 1 \quad \textit{ja} \quad \mathbb{P}\big(\xi \cdot V_1 > 0\big) > 0$$

2. Kun arbitraasi-salkkuja ei ole olemassa, sanotaan että markkimalli

$$\big(S^{(0)} = 1, S_1^{(1)}, \dots, S_1^{(d)}; \pi_0 = 1, \pi_1, \dots, \pi_d\big)$$

on arbitraasi-vapaa

Huomataan että arbitraasi salkkun määritelmä riippuu todennäköisyysmitasta vain nolla-mittaisten joukkojen kokoelman $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$ kautta, joka ei muutu kun korvataan $\mathbb{P}$ ekvivalenttilla todennäköisyymitalla $Q \sim \mathbb{P}$.

Teoreema 0.0.2. *(Rahoitusteorian ensimmäinen päälause, versio 1): Yllä määritelty markkinamalli on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa riskineutraali todennäköisyysv Q (eli vedonlyönti hintavektori tapahtumille $\{\omega_i\}$: $i = 1, \dots, n$) jolla $Q \sim \mathbb{P}$ (eli $\mathcal{N}^Q = \mathcal{N}^{\mathbb{P}}$) ja*

$$E_Q(S_1^{(k)}) = S_0^{(k)} = \pi_k, \quad k = 1, \dots, d \, .$$

Silloin sanotaan että Q on riskineutraali todennäköisyysmitta. Riskineutraaleja todennäköisyysmittoja voi olla useita. Siinä tapauksessa on myös olemassa riskineutraali todennäköisyys Q^* jolla $\frac{dQ^*}{d\mathbb{P}}$ on rajoitettu.

Tod. ($\Longleftarrow$): Jos Q on riskineutraali todennäköisyys, ja $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d)$ on salkku, jolla

$$V_0 = \xi \cdot \pi = \xi_0 + \sum_{k=1}^{d} \xi_k S_0^{(k)} = 0,$$

seuraa

$$E_Q(\xi \cdot (S_1 - \pi)) = \xi \cdot E_Q(S_1 - \pi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad E_Q(\xi \cdot S_1) = 0$$

Silloin jos

$$\xi \cdot S_1(\omega) \geq 0, \qquad \mathbb{P}\text{-melkein varmasti}$$

seuraa että myös

$$\xi \cdot S_1(\omega) \geq 0, \qquad Q\text{-melkein varmasti}$$

ja koska

$$E_Q(\xi \cdot S_1) = V_0 = 0$$

siitä seuraa että

$$\xi \cdot S_1(\omega) = 0, \qquad Q \text{ ja } \mathbb{P}\text{-melkein varmasti}$$

siis ξ ei voi olla arbitraasisalkku $\square$. ($\Longrightarrow$): Osoitamme että kun riskineutraalimitta ei ole olemassa, on olemassa arbitraasisalkku. Määritellään osakesalkun voittovektori

$$Y(\omega) = (Y^{(1)}(\omega), \dots, Y^{(d)}(\omega)) = (S_1(\omega) - \pi) \in \mathbb{R}^d$$

Oletamme ensin että $E_P(|Y|) < \infty$.

Olkoon

$$\mathcal{Q} = \Big\{ Q \text{ todennäköisyys jolla } Q \sim \mathbb{P}, \text{ ja } \frac{dQ}{dP}(\omega) \text{ on rajoitettu } \Big\}$$
$$\mathcal{C} = \Big\{ \; E_Q(Y) : \; Q \in \mathcal{Q} \Big\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

jossa oletuksesta seuraa että $E_Q(|Y|) < \infty \; \forall Q \in \mathcal{Q}$. Huomataan että joukot $\mathcal{Q}$ ja $\mathcal{C}$ ovat konvekseja.

Kun $\mathbf{0} \notin \mathcal{C}$, erottavan hypertason lauseen nojalla on olemassa erottava hypertaso $\xi \in \mathbb{R}^d$ jolla

$$\inf_{x \in \mathcal{C}} \{\xi \cdot x\} = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \Big\{ \; \xi \cdot E_Q(Y) \Big\} \geq 0,$$

ja on olemassa $\widehat{Q} \in \mathcal{Q}$ jolla

$$\xi \cdot E_{\widehat{Q}}(Y) = E_{\widehat{Q}} \left(\sum_{k=1}^{d} \xi_k Y^{(k)} \right) > 0$$

Tästä seuraa että

$$\widehat{Q} \Big(\sum_{k=1}^{d} \xi_k Y^{(k)} > 0 \Big) > 0$$

ja siksi myös

$$Q \Big(\sum_{k=1}^{d} \xi_k Y^{(k)} > 0 \Big) > 0 \quad \forall Q \in \mathcal{Q},$$

eritysisesti myös kun $Q = \mathbb{P}$.

Osoitamme että

$$\sum_{k=1}^{d} \xi_k Y^{(k)}(\omega) \geq 0 \qquad \mathbb{P} \text{ ja } Q \text{ melkein varmasti } \forall Q \in \mathcal{Q}$$

josta seuraa että ξ on arbitraasi salkku.

Olkoon

$$A = \left\{ \omega : \sum_{k=1}^{d} \xi_k Y^{(k)}(\omega) < 0 \right\}$$

Määritellään jono

$$W_n(\omega) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A^c}(\omega) + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \mathbf{1}_A(\omega) \quad n \in \mathbb{N}$$

jossa $A^c = \Omega \setminus A$. Saadaan

$$E_{\mathbb{P}}(W_n) = \frac{1}{n}(1 - \mathbb{P}(A)) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbb{P}(A)$$

ja määritellään todennäköisyysmittojen jono $\{Q_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{Q}$ mitan vaihto kaavalla

$$Q_n^*(d\omega) = \frac{W_n(\omega)}{E_{\mathbb{P}}(W_n)}\mathbb{P}(d\omega)$$

Nyt

$$E_{Q_n^*}\big(\xi \cdot Y\big) = \frac{E_{\mathbb{P}}((\xi \cdot Y)W_n)}{E_{\mathbb{P}}(W_n)} \geq 0$$

koska $Q_n^* \in \mathcal{Q}$. Kun $n \to \infty$

$$W_n(\omega) \longrightarrow \mathbf{1}(\omega \in A) \quad \mathbb{P} \text{ melkein varmasti}$$

ja koska $0 \leq W_n(\omega) \leq 1$ dominoidun kovergenssin lauseesta seuraa

$$E_{Q_n^*}\big(\xi \cdot Y\big)E_{\mathbb{P}}(W_n) = E_{\mathbb{P}}\big((\xi \cdot Y)W_n\big) \longrightarrow E_{\mathbb{P}}\big((\xi \cdot Y)\mathbf{1}_A\big) \geq 0$$

josta seuraa $\mathbb{P}\big(\xi \cdot Y \geq 0\big) = 1$.

Yleisemmin, jos $E_{\mathbb{P}}(|Y|) = \infty$, on helppoa konstruoida todennäköisyysmitan $\widetilde{P} \sim P$ jolla $E_{\widetilde{P}}(|Y|) < \infty$, nimittäin kun otetaan

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP}(\omega) = \frac{c}{1 + |Y|} \text{ jossa } c = E_P\big((1 + |Y|)^{-1}\big)^{-1}$$

seuraa että

$$E_{\widetilde{P}}(|Y|\ ) = c\ E_{\mathbb{P}}\left(\frac{|Y|}{1 + |Y|}\right) \leq c < \infty$$

ja edellinen todistus sovelletaan todennäköisyysmitalle $\widetilde{P}$.

Tästä seuraa että

$$\overline{\xi} = \left(\xi_0 := -\sum_{k=1}^{d} \xi_i S_0^{(k)}, \xi_1, \dots, \xi_d\right) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

on arbitraasisalkku □

0.1 Numeräär i

Tähän asti osakkeiden arvot esiteltiin euroina, ja implisiittisesti oletettiin seuraavaa:

On käytettävissä riskitön instrumentti $S_t^{(0)}$, jolla on hinta 1€ hetkellä $t = 0$ ja samaa arvoa 1€ hetkellä $t = 1$, esimerkiksi yhden euron kolikoilla on selläinen ominaisuus. Sijoitus $S_t^{(0)}$ instrumentiin vastaa korotonta pankkitalletusta tai lainaa riippuen siitä pidetäänkö salkussa positiivista tai negatiivista määrä.

Oikeasti rahalla on myös hinta: kun lainaan tänään 1€ pankilta tänään, tai vastaavasti sijoitan 1€ pankkitalletukselle, joudun huomeanna maksamaan $(1+r_L)$€ pankille, vastaavasti huomenna saan takaisin $(1+r_T)$€, jossa r_L ja r_T ovat ennalta sovittuja korko lainalle,vastaavasti pankkitalletukselle.

Vaikka reaalimaailmassa pankkilainan korko on pankkitallennuksen korkoa suurempi, $r_L \geq r_T$, tässä vaiheessa käsittelemme pelkistettyä mallia jossa lainan ja tallennuksen korot täsmäävät eli oletamme jatkossa että $r_L = r_T = r$.

Sen lisääksi oletetaan korolle että $r > -1$, koska positiivinen sijoitus velkakirjaan ei voi koskaan muuttua nollaksi tai pahemmin velaksi. Itse asiassa näin voi myös tapahtua jos pankki tai valtio menee konkurssiin, eikä pysty maksamaan lainoja takaisin, mutta tässä puhutaan ennalta sovituista koroista jossa r on determistinen (multiperioodi malleissa r tule olemaan ennustettava). Kaikkien rahoitusinstrumenttien arvot ovat aina ei-negativiisia, pahimmissa tapauksessa ne voi muuttua nollaksi.

Reaali-maailmassa tietenkin pankkilainan ja pankkitalletuksella on eri korkoja, ja useammin $r \geq 0$, toki on joskus tapahtunut tosi tilanteita jossa joidenkin valtioiden lainojen korko oli negatiivinen. Silloin puhutaan deflaatiosta.

Kun pankkilainasta tai pankkitalletuksesta maksetaan korkoa $r \neq 0$, arbitraasivapaassa maailmassa ei ole enää mahdollista saada korotonta lainaa muuten kun $r > 0$ voitaisiin rakentaa arbitraasi-salkkua jossa hetkellä $t = 0$ oteteaan korotonta lainaa, tallennetaan raha korolliselle talletustilille, maksetaan velkaa pois hetkellä $t = 1$ ja saadan korot voitoksi (kun $-1 < r < 0$ lainataan korolliselta tililta ja tallennetaan rahaa korottomalle tilille).

Voidaan myös luopua kokonoaan riskittömästä pankkitalletusinstrumenttista, ja korvata rahoitusinstrumentilla jolla $\mathbb{P}$-melkein varmasti on aina aidosti positiivinen arvo.

Määritelmä 0.1.1. *Olkoon* $(S_t^{(0)}(\omega), S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(d)}(\omega)) \in \mathbb{R}_+^{(d+1)}$ *rahoitusin-*

strumentteja (osakkeita tai pankkitilitalletuksia), jossa aikaparametri $t \in \{0,1\}$.

Kun $\mathbb{P}\big(\{\ \omega : S_t^{(0)}(\omega) > 0\}\big) = 1\ \forall t$, *voidaan valita* $S^{(0)}$ *numerääriksi (ranskaksi ja englanniksi numéraire) ja määritellä diskontattua osakevektoria* $\widetilde{S}_t(\omega) \in \mathbb{R}_+^{(d+1)}$, *jossa*

$$\widetilde{S}_t^{(0)}(\omega) \equiv 1, \quad \widetilde{S}_t^{(k)}(\omega) := \frac{S_t^{(k)}(\omega)}{S_t^{(0)}(\omega)}, \quad \forall k, t, \omega$$

siis diskontataan muiden instrumenttien arvot numeräärin instrumenttin suhteen.

Huomautuksia Erityisesti, jos $S_t^{(0)} = (1+r)^t$ on riskitön pankkitalletus deterministisella korolla $r > -1$, ja valitaan $S_t^{(0)}$ numerääriksi, diskontattu osakearvo on

$$\widetilde{S}_t^{(k)}(\omega) = \frac{S_t^{(k)}(\omega)}{(1+r)^t}$$

Olkoon $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d)$ salkku varallisuudella $V_t = \xi \cdot S_t$, ja olkoon $\widetilde{V}_t = \xi \cdot \widetilde{S}_t$ diskontatun salkun varallisuus.

Silloin ξ on arbitraasi salkku jos ja vain jos $\widetilde{V}_0 \le 0$ ja

$$\mathbb{P}(\widetilde{V}_1 \ge 0) = 1 \text{ ja } \mathbb{P}(\widetilde{V}_1 > 0) > 0$$

yksinkertaisesti koska $\widetilde{V}_t(\omega) \lesseqqgtr 0 \iff V_t(\omega) \lesseqqgtr 0$.

Rahoitusteorian ensimmäinen päälause saa tätä muotoa:

Teoreema 0.1.1. *(Rahoitusteorian ensimmäinen päälause, versio 2) Numerääri valinnalla* $S_t^{(0)}$ *jolla* $\mathbb{P}(S_t^{(0)} > 0) = 1\ \forall t$, *yllä määritelty osakemalli on arbitraasi-vapaa jos ja vain jos on olemassa riskineutraali mitta* Q *jolla* $Q \sim \mathbb{P}$ *ja*

$$E_Q\big(\widetilde{S}_1^{(k)}\big) = \widetilde{S}_0^{(k)} = \widetilde{\pi}_k := \frac{\pi_k}{\pi_0} \quad \forall k = 1, \dots, d$$

Kun riskineutraali todennäköisyysmitta $Q \sim \mathbb{P}$ *on olemassa, on myös olemassa riskineutraali mitta* $\widehat{Q}$ *jolla* $\frac{d\widehat{Q}}{d\mathbb{P}}$ *on rajoitettu.*

Sovelletaan suoraan Teoreema 0.0.2 diskontatuille osakkeen arvo prosessille

$$\big(\widetilde{S}_t^{(k)}, k = 0, 1, \dots, d, t = 0, 1\big)\ .$$

Jos $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ toteuttaa

$$\widetilde{V}_1 - \widetilde{V}_0 = \sum_{k=1}^{d} \xi_k \big(\widetilde{S}_1^k - \widetilde{S}_0^k\big) \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-melkein varmasti , ja}$$

$$\mathbb{P}\big(\widetilde{V}_1 - \widetilde{V}_0 > 0\big) = \mathbb{P}\Bigg(\sum_{k=1}^{d} \xi_k \big(\widetilde{S}_1^k - \widetilde{S}_0^k\big) > 0\Bigg) > 0 \ ,$$

siitä seuraa että

$$\bar{\xi} = \Bigg(\xi_0 = -\sum_{k=1}^{d} \xi_k \widetilde{S}_0^k, \xi_1, \ldots, \xi_d\Bigg) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

on salkku jolla

$$\widetilde{V}_0 = \bar{\xi} \cdot \widetilde{S}_0 = \sum_{k=0}^{d} \xi_k S_0^k = 0 = V_0,$$

$$V_1 = \bar{\xi} \cdot S_1 = \sum_{k=0}^{d} \xi_k S_1^k \geq \frac{V_0 S_1^0}{S_0^0} = 0 \quad \mathbb{P} \text{ m.v., ja } \mathbb{P}\big(V_1 > 0\big) > 0,$$

eli se on arbitraasi salkku $\square$.

Numeräärin vaihto Useammat numeräärivalinnat ovat mahdollisia, eli numerääriksi voidaan myös valita mikä tahansa riskillista instrumenttia $S_t^{(k)}$ silloin kun

$$P(S_t^{(k)}(\omega) > 0) = 1 \quad \forall t$$

Riskineutraali mittojen joukko

$$\mathcal{Q} : \Bigg\{ Q \sim P : E_Q\Bigg(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(k)}}\Bigg) = \frac{S_0^{(h)}}{S_0^{(k)}}, \quad \forall h \neq k \Bigg\}$$

riippuu numeräärin valinnasta.

Sen sijaan arbitraasivapaus ehto ei riipu numeräärin valinnasta, siis jos on olemassa riskineutraali todennäköisyysvektori Q numeräärin $S_t^{(0)}$:n suhteen, mitanvaihtokaavan avulla saadaan riskineutraali todennäköisyysvektoria Q' toisen numeräärin $S_t^{(k)}$ suhteen:

Kun $Q \sim P$ on riskineutraali hinnoittelu-todennäköisyys jolla

$$E_Q\Bigg(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(0)}}\Bigg) = \frac{S_0^{(h)}}{S_0^{(0)}}, \quad \forall h = 1, \ldots, d$$

ja $P(S_1^{(k)} > 0) = 1$ (joka pätee jos ja vain jos $Q(S_1^{(k)} > 0) = 1$, koska P ja Q:lla on samat nolla joukot), määritellään uskottavuusosamäärä

$$Z(\omega) := \frac{\widetilde{S}_1^{(k)}(\omega)}{E_Q(\widetilde{S}_1^{(k)})} = \frac{\widetilde{S}_1^{(k)}(\omega)}{\widetilde{S}_0^{(k)}} = \frac{S_1^{(k)}(\omega)}{S_1^{(0)}(\omega)} \frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}}, \text{ ja todennäköisyys}$$

$$Q'(d\omega) := \ Z(\omega)Q(d\omega) = \frac{\widetilde{S}_1^{(k)}(\omega)}{\widetilde{S}_0^{(k)}} Q(d\omega)$$

jossa $Z(\omega)\frac{dQ'}{dQ}(\omega)$ on uskottavuus osamäärä. Huomataan että Q' on todennäköisyys koska

$$Q'(\Omega) = \frac{E_Q(\widetilde{S}_1^{(k)})}{\widetilde{S}_0^{(k)}} = \frac{\widetilde{S}_0^{(k)}}{\widetilde{S}_0^{(k)}} = 1,$$

ja $Q' \sim Q \sim P$ (todennäköisyyksillä on samat nolla joukot) koska oletetusti

$$P\big(S_1^{(0)}(\omega) > 0\big) = Q\big(S_1^{(0)}(\omega) > 0\big) = P\big(S_1^{(k)}(\omega) > 0\big) = Q\big(S_1^{(k)}(\omega) > 0\big) = 1.$$

Seuraa mitan vaihto kaavan avulla, että Q' on riskineutraali numeräärin $S_t^{(k)}$:n suhteen:

$$E_{Q'}\left(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(k)}}\right) = \int_\Omega \frac{S_1^{(h)}(\omega)}{S_1^{(k)}(\omega)} Q'(d\omega) = E_Q\left(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(k)}} Z\right) =$$
$$\int_\Omega \frac{S_1^{(h)}(\omega)}{S_1^{(k)}(\omega)} Z(\omega)Q(d\omega) = \int_\Omega \frac{S_1^{(h)}(\omega)}{S_1^{(k)}(\omega)} \frac{S_1^{(k)}(\omega)}{S_1^{(0)}(\omega)} \frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}} Q(d\omega) =$$
$$\frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}} \int_\Omega \frac{S_1^{(h)}(\omega)}{S_1^{(0)}(\omega)} Q(d\omega) = \frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}} E_Q\left(\frac{S_1^{(h)}}{S_1^{(0)}}\right) = \frac{S_0^{(0)}}{S_0^{(k)}} \frac{S_0^{(h)}}{S_0^{(0)}} = \frac{S_0^{(h)}}{S_0^{(k)}} \ .$$

Arbitraasivapaa markkinamalli: Geometrinen karakterisaatio

Määritelmä 0.1.2. *Olkoon $Y(\omega) \in \mathbb{R}^d$ satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Borelin joukon $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ käänteiskuvaus on*

$$Y^{-1}(B) := \big\{\omega : X(\omega) \in B\big\},$$

Koska Y on mitallinen kuvaus $(\Omega, \mathcal{F})$ ja $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ välissä, seuraa että $Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ kun $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Satunnaismuuttujan Y jakauman avaruudella $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ on todennäköisyysmitta

$$P_Y(B) = \mathbb{P}(Y^{-1}(B)) = \mathbb{P}\big(\{\omega : Y(\omega) \in B\}\big)$$

Silloin $Q \overset{\mathcal{F}}{\sim} \mathbb{P}$ todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, uskottavuusosamäärällä $Z(\omega) = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}(\omega)$, seuraa että $Q \overset{\sigma(Y)}{\sim} \mathbb{P}$ myös samalla Ω avaruudella varustettuna pienemmällä σ-algebralla $\sigma(Y) \subseteq \mathcal{F}$, uskottavuusosamäärällä

$$\frac{dQ|_{\sigma(Y)}}{d\mathbb{P}|_{\sigma(Y)}}(\omega) = E_{\mathbb{P}}\big(Z\big|\sigma(Y)\big)(\omega),$$

on $\sigma(Y)$-mitallinen ja siksi on olemassa Borel mitallinen funktio $z : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ jolla $E_{\mathbb{P}}\big(Z\big|\sigma(Y)\big)(\omega) = z(Y(\omega))$, ja voidaan kirjoittaa

$$E_Q(Y) = \int_{\mathbb{R}^d} t\, Q_Y(dt) = E_{\mathbb{P}}(YZ) = E_{\mathbb{P}}(Y E_{\mathbb{P}}(Z|\ \sigma(Y)) = E_{\mathbb{P}}(Y z(Y)) = \int_{\mathbb{R}^d} t\, z(t) P_Y(dt)$$

jossa $z(t) = \frac{dQ_Y}{dP_Y}(t)$ on uskottavuusosamäärä $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ avaruudella.

Määritelmä 0.1.3. *Olkoon μ mitta avaruudella $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Mittan kantaja (engl. support) on pienin suljettu joukko C jolla $\mu(\mathbb{R}^d \setminus C) = 0$, eli*

$$\mathit{Support}(\mu) = \bigcap_{C \text{ suljettu } : \mu(\mathbb{R}^d + \setminus C) = 0} C$$

Huomataan että $\mu(\{y\}) > 0 \Longrightarrow y \in \text{Support}(\mu)$, mutta $\Longleftarrow$ implikaatio ei päde.

Määritelmä 0.1.4. *Joukon $B \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksipeittö (engl. convex hull), on pienin konveksi joukko K jolla $K \supseteq B$.*

$$\begin{aligned}
\mathit{ConvexHull}(B) &= \bigcap_{K \text{ konveksi } : K \supseteq B} K \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_k \in B, \alpha_k > 0, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \right\}
\end{aligned}$$

Määritelmä 0.1.5. *Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksi joukko. Konveksi joukon suhteellinen sisus (engl. relative interior) on*

$$\mathit{RelativeInterior}(K) = \big\{x \in K : \forall y \in K,\ \exists \epsilon > 0 \text{ jolla } \big(x + (x-y)\varepsilon\big) \in K\big\}$$

Teoreema 0.1.2. *Markkinamallissa instrumentteilla $\big(S_t^0(\omega), S_t^1(\omega), \ldots, S_t^d(\omega)\big)$ jossa $S_t^0 > 0$ $\mathbb{P}$-m.v. valitaan numerääriksi, olkoon $Y(\omega) \in \mathbb{R}^d$ osakkeiden diskontattujen voittojen vektori komponenteilla*

$$Y^k(\omega) = \widetilde{S}_1^k(\omega) - \widetilde{S}_0^k = \frac{S_1^k(\omega)}{S_1^0(\omega)} - \frac{S_0^k}{S_0^0}$$

Markkinamalli on arbitraasivapaa jos ja vain jos

$$0 \in \mathcal{C} := \mathit{RelativeInterior}\Big(\mathit{ConvexHull}\big(\mathit{Support}(P_Y)\big)\Big) . \tag{0.1.1}$$

Ekvivalentti ehto on

$$\widetilde{S}_0 \in \mathit{RelativeInterior}\Big(\mathit{ConvexHull}\big(\mathit{Support}(P_{\widetilde{S}_1})\big)\Big) . \tag{0.1.2}$$

Todistus Kun $0 \in \mathcal{C}$, olkoon $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ salkku jolla

$$\mathbb{P}(\xi \cdot Y \geq 0) = P_Y(\{y : \xi \cdot y \geq 0\}) = 1.$$

Osoitamme että ξ ei ole abitraasi, eli $\mathbb{P}(\xi \cdot Y = 0) = 1$. Muuten on olemassa $\delta > 0$ jolla $\mathbb{P}(\xi \cdot Y > \delta) = P_Y(\{y : \xi \cdot y > \delta\}) > 0$. Koska $\{y : \xi \cdot y \geq 0\}$ on suljettu seuraa että

$$\big\{y : \xi \cdot y \geq 0\big\} \supseteq \mathrm{support}(P_Y) , \tag{0.1.3}$$

ja vastaoletuksesta seuraa että $\big\{y : \xi \cdot y = 0\big\} \not\supseteq \mathrm{support}(P_Y)$, eli on olemassa $y^* \in \mathrm{support}(P_Y)$ jolla $\xi \cdot y^* > 0$. Oletuksesta (0.1.2) seuraa että on olemassa $\varepsilon > 0$ jolla $-\varepsilon y^* \in \mathrm{ConvexHull}(\mathrm{support}(P_Y))$, eli on olemassa n ja $y_k \in \mathrm{support}(P_Y)$, $\alpha_k > 0$ $k = 1, \dots, n$ jolla

$$-\varepsilon y^* = \sum_{k=1} \alpha_k y_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

josta seuraa

$$0 > \sum_{k=1} \alpha_k \big(\xi \cdot y_k\big) ,$$

ja on olemassa $y_{\bar{k}} \in \mathrm{support}(P_Y)$ jolla $\xi \cdot y_{\bar{k}} < 0$, joka on ristiriidassa (0.1.3) kanssa.

Toisen suuntaan, oletetaan että on olemassa riskineutraali mitta $Q \sim P$ jolla $E_Q(|Y|) < \infty$ ja $E_Q(Y) = 0 \notin \mathcal{C}$. Erottavan hypertaso lauseen nojalla, $\exists \xi \in \mathbb{R}^d$ jolla $\xi \cdot y \geq 0$ $\forall y \in \mathcal{C}$ ja $\xi \cdot y^* > 0$ jollekin $y^* \in \mathcal{C}$. Tästä seuraa että $\xi \cdot y \geq 0$ $\forall y \in \overline{\mathcal{C}}$. ja siksi on olemassa $\bar{y} \in \mathrm{support}(P_Y)$ jolla $\xi \cdot \bar{y} > 0$, josta seuraa että $P_Y(\{y : \xi \cdot y\} = 0) < 1$, koska $\{y : \xi \cdot y = 0\}$ on suljettu.

Näin on todistettu että

$$P_Y(\{y : \xi \cdot y\} \geq 0) = 1 \quad \text{ja } P_Y(\{y : \xi \cdot y\} > 0) > 0$$

ja samoin pätee todennäköisyymitan $Q_Y(\cdot) = Q\big(\{\omega : Y(\omega) \in \ \cdot\}\big)$ suhteen, koska $\mathbb{Q} \sim P \Longrightarrow Q_Y \sim P_Y$. Tämä on ristiriidassa oletuksen $E_Q(Y) = 0$ kanssa.

Kommenti Kuten esitettiin, referenssi-todennäköisyysmitalla $\mathbb{P}$ ei ole enää mitään roolia markinammallin arbitraasin tarkasteluissa, sen jälkeen kun olemme kiinnittäneet $\mathbb{P}$-nolla mittaisten taphatumien joukon $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$. Sen lisääksi aribitraasi-vapaassa markkinamallissa diskontattujen instrumenttien hintoja ovat odotusarvoja hinnoitteilu todennäköisyysnmitan $Q \sim \mathbb{P}$. Hinnoittelu todennäköisyys ei tarvitse olla yksikäsitteinen, eli voi olla useita $Q \sim \mathbb{P}$ jolla

$$\widetilde{S}_0^{(k)} = E_Q\big(\widetilde{S}_1^{(k)}\big), \quad \forall k = 1, \dots, d\,.$$

Tästä käy myös ilmi että hinnoitteilu mitta Q saa olla ja useimmin on eri kuin objektivista referenssi mittaa $\mathbb{P}$ jolla ennustetaan tulevaisuutta: kun sijoittaja joutuu valitsemaan kahden sijoitusten välissä $S_t^{(1)}$, ja $S_t^{(2)}$ joilla objektiivisen $\mathbb{P}$ todennäköisyyden suhteen on samoja tuotonodotuksia, eli

$$E_{\mathbb{P}}\big(S_1^{(1)}\big) = E_{\mathbb{P}}\big(S_1^{(2)}\big)$$

mutta ensimmäinen instrumentti on toista instrumenttia riskilliempi varainssin mielessä,

$$\text{Varianssi}_{\mathbb{P}}\big(S_1^{(1)}\big) \le \text{Varianssi}_{\mathbb{P}}\big(S_1^{(2)}\big),^{1} \tag{0.1.4}$$

riskejä välttävä sijoittaja valitse sijoitukseksi $S_t^{(1)}$ mielummiin kun $S_t^{(2)}$, riksejä hakeutuva sijoittaja on se joka on valmis ottamaan riskeja suurempia voittoja taivottaen , ja valitse $S_t^{(2)}$ mielummiin kuin $S_t^{(1)}$. Riski-neutraalille sijoittajalle, riskit ovat yhdentekeviä ja vain tuotonodotuksilla on merkitystä, ja sijoitukset $S_t^{(1)}$ ja $S_t^{(2)}$ ovat yhtä hyviä. Markkinatilanteessa, kun ostajat ovat keskimäärin riskeja välttäviä, ja instrumenttien tuotolla on sama odotusarvo objektiivisen mitan $\mathbb{P}$:n suhteen riskillisemman instrumentti hinta pitää olla turvallisemman instrumenttia edullisempi jotta se menisi kaupaksi. Siinä tilanteessa ei voi käyttää objekitista $\mathbb{P}$ mittaa hinnoittelemaan Arbitraasivapaassa hintasysteemissa on välttämätöntä että diskontauille hinnoille

$$\widetilde{\pi}^{(k)} = \widetilde{S}_0^{(k)} = E_{\mathbb{Q}}\big(S_1^{(1)}\big)$$

jossa hinnoittelu todennäköisyyksilla Q ja $\mathbb{P}$ on samaa nolla mittaisia sceenarioita. Siksi käytetään eri mittoja ennustamiseen ja hinnoitteilemaan. Jos markkinat olisivat riski-neutraalisia, siinä mielessä että sijoituskia valitaan vain objektivisen tuoton odotusarvon perusteella eikä riskeistä välitetä, silloin objektiivinen mitta $\mathbb{P}$ ja hinnoitelu mitta Q täsmäisivät.

[1] varianssi voidaan korvata toisella riksien mittava funktionaalilla.

Luku 1

Optiot

Olkoon $\left(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d\right)$ arbitraasi vapaa markkinamalli. Tässä edelleen Ω on äärellinen, $\forall \omega\ P(\omega) > 0$ referenssi todennäköisyyden suhteen, $S_1^{(i)}(\omega), \pi_i \geq 0$, ja on ainakin yksi instrumentti joka on varmuudella aidosti positiivinen, olkoon $S_t^{(0)}$ kun $P(S_1^{(0)} > 0) = 1$.

Optio tai vaade (engl. option, contingent claim) on satunnaismuuttuja $F(\omega) \geq 0$.

Tyypillisesti $F(\omega) = f(S_1^{(0)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega))$, kuten eurooppalaiset osto (engl. call) ja myynti (engl. put) optiot

$$F^{\text{osto}}(\omega) = \left(S_1^{(1)}(\omega) - k\right)^+ , \qquad F^{\text{myynti}}(\omega) = \left(k - S_t^{(1)}(\omega)\right)^+$$

lunastushinnalla (engl. strike or exercise price) $k > 0$.

Eurooppalaisen option haltijalle on oikeus ilman velvollisuutta ostaa (myydä) ajanhetkellä $t = 1$ yhden osakkeen $S^{(1)}$ ennalta sovittuun hintaan k.

Jos hetkellä $t = 1$ osakkeen markkinarvo on suurempi kuin lunastushinnan k, osto-option haltija käytää optionsa, ostaa osakkeen ennalta sovittuun hintaan k, ja voittaa $(S_1^{(1)} - k)$ kun myy sen heti markkinahinnalla.

Toisaalta jos $S_1^{(1)}(\omega) \leq k$, option haltija ei käytä optionsa, ja optio $F^{\text{osto}}(\omega)$ tulee arvottomaksi.

Kysymys kuuluu, mikä on option $F(\omega)$ hinta alkuhetkellä $t = 0$?

Optiot kaupattiin pörseissä satoja vuosia, on hämmästyttävää että option hinnoittelun periaate ymmärrettiin oikein vastaa vuonna 1973, Fisher Black ja Myron Scholesin paperissa *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Tästä hyvästä Robert Merton ja M. Scholes saivat taloustieteen Nobelin palkinnon vuonna 1997.

Merkintä Numeräärin valinnalla $S_t^{(0)} > 0$, diskontattu option arvo hetkellä $t = 1$ merkitään

$$\widetilde{F}(\omega) := \frac{F(\omega)}{S_1^{(1)}(\omega)},$$

ja diskontattu hinta hetkellä $t = 0$

$$\widetilde{c}(F) = \frac{c(F)}{\pi^0} = \frac{c(F)}{S_0^{(0)}}$$

Määritelmä 1.0.1. *Markkinamallissa*

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d\big)$$

ylisuojaus (engl. superhedging) on salkku $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ jolla

$$\xi \cdot S_1 \geq F \quad \mathbb{P}\text{-melkein varmasti}$$

ja alisuojaus (engl. underhedging) on salkku jolla

$$\xi \cdot S_1 \leq F \quad \mathbb{P}\text{-melkein varmasti}$$

Salkku $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ on F-option suojaus jos ja vain jos se on samaan aikaan sekä ylisuojaus että alisuojaus.

Teoreema 1.0.1. *Alkuhetkellä $t = 0$, $c(F) > 0$ on johdonmukainen hinta optiolle $F(\omega)$ arbitraasivapaassa markkinamallissa*

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d\big)$$

jos ja vain jos laajennettu markkinamalli

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega), F(\omega); \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d, c(F)\big)$$

on arbitraasivapaa. Silloin, numerääri valinnalla $\widetilde{S}_t^{(0)} > 0$ $\mathbb{P}$ a.s.,

$$\mathcal{P} := \big\{Q \sim \mathbb{P} : E_Q\big(\widetilde{S}_1^{(k)}\big) = \widetilde{S}_0^{(k)}\big\} \neq \emptyset$$

Ensimmäisen rahoitusteorian päälauseen perusteella tämä pätee jos ja vain jos

$$c(F) = S_0^{(0)} E_Q\left(\frac{F}{S_1^{(0)}}\right)$$

jollekin $Q \in \mathcal{P}$.

Todistus: suoraan ensimmäisen rahoitusteorian päälauseesta.

Teoreema 1.0.2. *Olkoon kuten ennen $F(\omega) \geq 0$ optio arbitraasivapaassa markkinamallissa*

$$\big(S_1^{(0)}(\omega), S_1^{(1)}(\omega), \ldots, S_1^{(d)}(\omega); \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_d\big)$$

jossa $\mathcal{P} \neq \emptyset$ on ekvivalenttien riskineutraalimittojen joukko.

Tässä markkinamallissa, option F arbitraasivapaiden hintojen joukko

$$\Pi(F) = \Big\{c(F) = S_0^0 E_Q\left(\frac{F}{S_1^{(0)}}\right) < \infty, \text{ ja } Q \in \mathcal{P} \text{ riskineutraali } \Big\} \neq \emptyset$$

on konveksi joukko, (koska $\mathcal{P}$ on konveksi ja odotusarvo on lineaarinen integroivan mitan suhteen), ja vaihtoehtoisesti

1. $\Pi(F) = \{\ c(F)\}$ *on pistejoukko, ja tämä tapahtuu jos ja vain jos F on toistettavissa, eli on olemassa (ei välttämättä yksikäsitteinen) salkku $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ jolla $\xi \cdot S_1 = F$ alkuhinnalla $c(F) = \xi \cdot S_0$.*

2. *vai $\Pi(F) = (c^{\downarrow}(F), c^{\uparrow}(F))$ on avoin väli, jossa*

$$\begin{aligned}
&c^{\downarrow}(F) = \inf \Pi(F)\\
&= \sup\big\{\xi \cdot S_0 : \ \xi \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ on alisuojaus, eli } \quad \xi \cdot S_1 \leq F \text{ , } \mathbb{Q}\text{-melkein varmasti } \big\}\\
&c^{\uparrow}(F) = \sup \Pi(F)\\
&= \inf\big\{\xi \cdot S_0 : \ \xi \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ on ylisuojaus, eli } \quad \xi \cdot S_1 \geq F, \ \mathbb{Q}\text{-m. v. } \big\}
\end{aligned}$$

Todistus. On selvää että jos salkku on toistettavissa, aino arbitraasivapaa hinta on toistavan salkkun hinta $c(F) = \xi \cdot S_0$, jolla $\xi \cdot S_1 = F$ $\mathbb{P}$-melkein varmasti. Jos ξ' on toinen toistava salkku jolla $\xi' \cdot S_1 = F$, $\mathbb{P}$-melkein varmasti, on myös välttämätöntä että $\xi' \cdot S_0 = \xi \cdot S_0$,$\mathbb{P}$-melkein varmasti, muuten syntyisi arbitraasi mahdollisuus.

Huomataan että jos ξ on ylisuojaussalkku joka ei ole alisuojaus, $\mathbb{P}(\xi \cdot S_1 \geq F) = 1$ ja $\mathbb{P}(\xi \cdot S_1 > F) > 0$, ja $c = \xi \cdot S_0$ on arbitraasi hinta optiolle F.

Tästä seuraa että myymällä optiota c hinnalla ja ostamalla salkkua ξ, voidaan rakentaa salkkua $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d, -1) \in \mathbb{R}^{d+2}$ laajennetussa markkina mallissa $\big(S_0^{(0)}, S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(d)}, c;\ S_1^{(0)}, S_1^{(1)}, \ldots, S_1^{(d)}, F\big)$, jolla

$$V_0 = \xi \cdot S_0 - c = 0 \quad \text{ ja } \quad V_1 = \xi \cdot S_1 - F \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-melkein varmasti },$$

jossa epäyhtälö on aito positiivisella $\mathbb{P}$-todennäköisyydellä. Samalla tavalla, jos ξ on alisuojaussalkku, joka ei ole ylisuojaus, sen hinta $\xi \cdot S_0$ on arbitraasihinta optiolle.

Toisinpäin, jos c on arbitraasihinta, on olemassa salkku $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d, \eta) \in \mathbb{R}^{(d+1)}$ laajennetussa markkinamallissa jolla $|\eta| = 1$ ja salkunarvolle pätee

$$\begin{aligned}
&V_0 = \xi \cdot S_0 + \eta c = 0, \\
&\mathbb{P}(V_1 \geq 0) = 1 \quad \text{ja } \mathbb{P}(V_1 > 0) = 1 \ \text{ jossa } \mathrm{V}_1 = \xi \cdot S_1 + \eta F.
\end{aligned}$$

Silloin kun $\eta = 1$ salkku $(-\xi)$ on alisuojaus, ja kun $\eta = -1$ salkku ξ on ylisuojaus.

Siis silloin kun c on arbitraasi hinta optiolle, se on myös ylisuojaus- tai alisuojaus-salkun hinta, riippuen siitä onko c alihinta tai ylihinta.

Seuraavaksi osoitamme silloin kun optio ei ole toistettavissa, arbitraasivapaiden hintojen joukko on avoin, ja koska se on konveksi joukko, se on avoin väli.

Olkoon $c = S_0^0 E_Q(\widetilde{F}) \in \Pi(C)$ arbitraasi vapaa hinta, $\widetilde{F} = F/S_1^0$ on diskontattu option arvo, ja $Q \in \mathcal{P}$ on riskineutraali hinnoitteilutodennäköisyys instrumenteille S_t^k, $k = 0, 1, \dots, d$. Olkoon

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{\ \widetilde{V} = \xi \cdot \widetilde{S}_1 : \xi \in \mathbb{R}^{d+1}\} = \text{LinearSpan}\big(\widetilde{S}_1^0, \widetilde{S}_1^1, \dots, \widetilde{S}_1^d\big) \subseteq L^1(Q)$$

salkun arvojen joukko, joka on $L^1(Q)$ avaruuden suljettu aliavaruus.

Jos F ei ole toistettavissa, $\widetilde{F} \notin \widetilde{\mathcal{V}}$, ja koska $\widetilde{\mathcal{V}}$ on suljettu ja konveksi, Hahn-Banachin lauseesta seuraa että on olemassa erottava hypertaso F ja $\widetilde{\mathcal{V}}$:n välissä, eli lineaarinen kuvaus $\ell : L^1(Q) \to \mathbb{R}$ jossa $\ell(X) = E_Q\big(WX\big)$ jollekin $W \in L^\infty(Q)$ jolla

$$\sup_{\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{V}}} \big\{ E_Q(\widetilde{V} W) \big\} < E_Q(\widetilde{F} W)$$

aidolla epäyhtälöllä. Koska $\widetilde{\mathcal{V}}$ on vektoriavaruus tästä seuraa että

$$E_Q(\widetilde{V} W) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{d+1} \text{ jossa } \widetilde{V} = \xi \cdot \widetilde{S}_1 \text{ ja } E_Q(\widetilde{F} W) > 0.$$

Skaalamalla voidaan myös olettaa että $|W(\omega)| \leq 1/2$ Q-melkein varmasti.

Olkoon P^* todennäköisyysmitta jolla

$$\frac{dP^*}{dQ} = Z(\omega) = 1 + W(\omega) \geq 1/2 > 0$$

Koska

$$E_Q(W \xi \cdot \widetilde{S}) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{d+1},$$

sijoittamalla kantavektoreita $\xi = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ kertaa}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{d-k \text{ kertaa}})$ seuraa $E_Q(\widetilde{S}^{(k)} W) = 0$ $\forall k = 0, 1, \dots, d$, erityisesti $E_Q(W) = 0$.

Tästä seuraa että $E_Q(Z) = 1$ ja P^* on todennäköisyysmitta. Koska $Z(\omega) > 0$ Q-m.v. seuraa että $P^* \sim Q$, ja

$$E_{P*}(\xi \cdot \widetilde{S}_1) = E_Q(\xi \cdot \widetilde{S}_1) + E_Q(W\xi \cdot \widetilde{S}_1) = E_Q(\xi \cdot \widetilde{S}_1)\xi \cdot \widetilde{S}_0$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^{(d+1)}$ josta seuraa että P^* on riskineutraali. Silloin

$$c^* := S_0^0 E_{P^*}\big(\widetilde{F}\big) = S_0^0 E_Q\big(\widetilde{F}\big) + S_0^0 E_Q\big(\widetilde{F}W\big) > S_0^0 E_Q\big(\widetilde{F}\big) = c$$

eli $c^* > c$ on myös arbitraasi vapaa hinta F-optiolle. Samoin voidaan osoittaa että on olemassa arbitraasi vapaa hinta $c_* < c$. Siksi $\Pi(F)$ on avoin ja konveksi, eli se on avoin väli □ □

Huomautuksia

1. Kun optio on toistettavissa, suojaussalkku ei tarvitse olla yksikäsitteinen.

2. Samoin, jos arbitraasi-vapaiden hinnoitelutodennäköisyyksien joukko $\mathcal{Q}$ on pistejoukko, myös option arbitraasivapaa hinta $c(F)$ on yksikäsitteinen, mutta arbitraasivapaa hinta $c(F)$ voi olla yksikäsitteinen arbitraasivapaa hinta vaikka arbitraasivapaiden hinnoitelutodennäköisyyksiä olisi useita.

Esimerkki
Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, jossa jokainen tapahtuma $\{\ \omega_i\}$ on mahdollinen, eli $P(\{\ \omega_i\}) > 0\ \forall i$ referenssi todennäköisyysmitan suhteen.

Tarkastellaan markkinamallia jossa on kaksi ajanhetkeä $t = 0, 1$, ja kaksi sijoitusintstrumenttia

$$S_t(\omega), U_t(\omega) \in \mathbb{R}_+$$

Olkoon

$$S_1(\omega_1) = 1\text{ €}, S_1(\omega_2) = 3/2\text{ €}, S_1(\omega_3) = 1/2\text{ €}$$
$$U_1(\omega_1) = 0\text{ €}, U_1(\omega_2) = 1/2\text{ €}, U_1(\omega_3) = 1\text{ €}$$

Tässä markkinamallissa ei ole riskittömiä instrumentteja käytössä.

Arbitraasi-vapaiden hintaparien joukko on (harjoitustehtävä) on avoin kolmio $\overset{\Delta}{ABC}$ kulmapisteillä $A = (1, 0), B = (3/2, 1/2), C = (1/2, 1)$.

Valitsemme mielivaltaisesti tästä joukosta hintaparia $(1, 1/2)$, joka on kolmion sisäpiste, ja asetetaan osakkeiden alkuhinnat hetkellä $t = 0$ $c(S) = 1, c(U) = 1/2$.

Tällä valinnalla markkinamalli $(S_1, U_1, F; c(S), c(U), c(F))$ on arbitraasivapaa. Olkoon

$$F(\omega) := \big(S_1(\omega) - U_1(\omega)\big)^+, \quad \text{jossa } x^+ = \max\{x, 0\}$$

vaihto (swap) optio, joka antaa haltijalle oikeus ilman velvollisuutta vaihtaa hetkellä $t = 1$ yhden $U_1(\omega)$ osakkeen yhtä $S_1(\omega)$ osaketta vastaan.

Laskemme option F arbitraasivaiden hintojen joukko $\mathcal{C}(F)$, markkinamallissa $(S_1, U_1; c(S), c(U))$.

Eli hintoja $c(F)$ jolla laajennettu markkinamalli $(S_1, U_1, F; c(S), c(U), c(F))$ pysyy arbitraasivapaana.

Valitaan numerääriksi S_t (U_t ei kelpaa numerääriksi koska $P(U_1 = 0) > 0$). Merkitään diskontatut instrumenttien arvot seuraavasti:

$$\widetilde{U}_t(\omega) = \frac{U_t(\omega)}{S_t(\omega)}, \quad \widetilde{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{S_1(\omega)}, \quad \widetilde{c}(U) = \frac{c(U)}{c(S)}, \quad \widetilde{c}(F) = \frac{c(F)}{c(S)}.$$

Lasketaan riskineutraali todennäköisyysvektoreiden joukko $\mathcal{Q}$ numeräärin S_t:n suhteen. Saadan yhtälö

$$\frac{1}{2} = \widetilde{c}(U) = E_Q(\widetilde{U}_1) = \sum_{i=1}^{3} Q(\omega_i)\widetilde{U}_1(\omega) = 0 \times (1 - x - y) + x \times \frac{1}{3} + y \times 2$$

jossa $x = Q(\omega_2)$ $y = Q(\omega_3)$, $Q(\omega_1) = 1 - x - y$, rajoituksilla $x, y > 0$, $(x + y) < 1$,

$$\begin{aligned}
&\iff 0 < x, \quad 0 < y = 1/4 - x1/6, \quad x + y = 1/4 + 5/6x < 1 \\
&\iff 0 < x, \quad x < 3/2, \quad x < 9/10 \iff 0 < x < 9/10
\end{aligned}$$

Siis markkinamallissa $(S_1, U_1; c(S) = 1, c(U) = 1/2)$ riskineutraalien hinnoittelutodennäköisyyksien joukko on

$$\mathcal{Q} = \Big\{ \; (q_1(x), q_2(x), q_3(x)) = (3/4 - x \times 5/6, \; x, \; 1/4 - x \times 1/6) \; : 0 < x < 9/10 \Big\}$$

Arbitraasivapaiden hintojen joukko F optiolle on

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}(F) := \left\{ c(S) E_Q\left(\frac{(S_1 - U_1)^+}{S_1} \right) : \quad Q \in \mathcal{Q} \right\} \\
&= \left\{ \ 1 \times \sum_{\omega=1}^{3} (1 - \widetilde{U}_1(\omega))^+ q_\omega(x) \ : \quad 0 < x < 9/10 \right\} \\
&= \left\{ \ (1-0)^+ \times q_1(x) + (1 - 1/3)^+ \times q_2(x) + (1-2)^+ \times q_3(x) \ : 0 < x < 9/10 \right\} \\
&= \left\{ q_1(x) + 2/3 \times q_2(x) \ : \ 0 < x < 9/10 \right\} \\
&= \left\{ 3/4 - x \times 5/6 + x \times 2/3 : \ 0 < x < 9/10 \right\} = \left\{ 3/4 - x \times 1/6 : \ 0 < x < 9/10 \right\} \\
&= (3/5, 3/4)
\end{aligned}$$

eli F optiolla on useita arbitraasivapaaitahintoja markkinamallissa $(S_1, U_1; c(S), c(U))$.

1.1 Täydellisuus

Teoreema 1.1.1. *Olkoon* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ *ja* $\big(S_t^{(0)}(\omega), \ldots, S_t^{(d)}(\omega)\big)$ *arbitraasivapaa markkinamalli jossa* $S_t^{(0} > 0$ $(P = 1)$.

- *Riskineutraalitodennäköisyys on yksikäsitteinen* $S_t^{(0)}$ *numeräärin suhteen (ja sitten jokaisella numeräärillä) jos ja vain jos*

- *Kaikki optiot eli satunnaismuuttujat* $\omega \mapsto F(\omega) \in \mathbb{R}$ *ovat toistettavissa.*

Silloin sanotaan että markkinamalli on täydellinen

Todistus $(\Longrightarrow)$ Koska riskineutraalimittojen joukko $\mathcal{Q} = \{Q\}$ on pistejoukko, jokaiselle optiolle arbitraasi-vapaa hinta on yksikäsitteinen ja optio on toistettavissa.

$(\Longleftarrow)$ Kun kaikki optiot ovat toistettavissa, $\forall A \subseteq \Omega$ option

$$F(\omega) = \frac{S_1^{(0)}}{S_0^{(0)}} \mathbf{1}_A(\omega)$$

arbitraasivapaiden hintojen joukko on yksikäsitteinen, eli

$$\begin{aligned}
&c(F) = S_0^{(0)} E_Q(\widetilde{F}) = Q(A) \quad \forall Q \in \mathcal{Q} \\
&\Longrightarrow \mathcal{Q} \quad \text{on pistejoukko} \qquad \square
\end{aligned}$$

Seuraus 1.1.1. *Olkoon* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ *jossa* $P(\omega_i) > 0$ $\forall i$ *ja arbitraasivapaa markkinamalli* $\big(S_t^{(0)}(\omega), \dots, S_t^{(d)}(\omega); t \in 0, 1\big)$.

Oletamme että satunnaismuuttujat $S_1^{(0)}(\omega), \dots, S_1^{(d)}(\omega)$ $\mathbb{R}^\Omega$ *vektoreina ovat* **lineaarisesti riippumattomia**

Markkinamalli on täydellinen jos ja vain jos $n = (d+1)$.

Todistus Satunnaismuuttujen joukko on $\mathbb{R}^\Omega \simeq \mathbb{R}^n$ n-ulotteinen lineaarinen avaruus. Toistettavien optioiden aliavaruus on

$$\mathrm{LinearSpan}\left\{ \sum_{i=0}^{d} \xi_i S_1^{(i)}(\omega) : \quad \xi_i \in \mathbb{R}^{(d+1)} \right\}$$

joka on $(d+1)$ ulotteinen kun vektorit $(S_1^{(i)}(\omega), \omega \in \Omega)$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon satunnaismuuttuja $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut välissä $[0,1]$. Olkoon $B_t \equiv 1$, $S_t(\omega) = 3/4 + U(\omega) \geq 0$ $F(\omega) = (1 - S_t)^+ + (U(\omega) - 5/4)^+$

(S_t, F) jakauman supporti koostuu segmenteista $AB \cup BC \cup CD$ jossa $A = (3/4, 1/4), B = (1,0), C = (5/4, 0), D = (7/4, 1/2)$.

Olkoon $S_0 = 6/4$, joka on arbitraasi vapaa hinta koska S_1 jakauman kantaja on $[3/4, 7/4]$.

Nähdään geometrisesti että silloin kun $S_0 = 6/4$, AV-hintojen joukko optiolle F on avoin väli Tästä seuraa $c^-(F) = 1/8$ ja $c^+(F) = \frac{1}{4} + \frac{3}{7}16 = 7/16$.

Lasketaan nyt ylisuojausstrategia optiolle. Piste $(6/4, 7/16)$ vastaa riskineutraali todennäköisyysmitta $(1-\alpha)\delta_A + \alpha\delta_B$, $\alpha = 3/4$ joka on jakauman kantajan ääripisteiden A, B konveksikombinaatio. Se on singulaarinen alkuperäisen todennäköisyysmitan P suhteen.

Siis Q^* on todennäköisyys jossa $Q^*(\omega = 0) = 1 - Q^*(\omega = 1) = \frac{1}{4}$. Kun kaikki muut a$\omega$:n arvojen suljetaan pois, malli tulee epätäydellisestä täydelliseksi.

Täydellisessa mallissa voidaan laskea option suojaus strategia ratkaisemalla lineaarista systeemiä

$$F(\omega) = \eta + \xi S_1(\omega), \qquad \omega \in \{0,1\}$$
$$\iff F(\omega) = 1/4 + 1/4U(\omega) = 1/16 + 14S_1(\omega), \quad \omega \in \{0,1\}$$

Siis $\eta = \frac{1}{16}, \xi = \frac{1}{4}$. Kun $\omega \in \{\,0,1\}$ option arvo on samaa kuin salkkun arvoa, muuten

$$F(\omega) \leq \eta + \xi S_1(\omega)$$

Valitaan myt arbitraasi vapaa hinta optiolle $F(\omega)$.Yksi vaihtoehto on $L^2(P)$ riskin minimointi objektivisen mitan P:n suhteen.

Olkoon $V_1(\omega) = \eta + \xi S_1(\omega)$, $V_0 = \eta + \xi S_0$. Etsimme salkkua $\pi = (\eta, \xi)$ joka minimoi suojauksen riskiä

$$E_P\big((V_1 - F)^2\big)$$

objektiivisen mitan P:n suhteen.

$$E_P\Bigg((\eta + \xi S_1 - F)^2\Bigg)$$

Huomataan että $\eta + \xi S_1(\omega)$ on paras (neliö virheen mielessä) lineaarinen estimaatori $F(\omega)$:lle joka riippuu lineaarisesti $S_1(\omega)$.

Kertoimet ovat

$$\xi = \frac{\mathrm{Cov}(F, S_1)}{\mathrm{Var}(S_1)}$$
$$\eta = E_P(F) - E_P(S_1)\xi$$

Luku 2

Diskreetti-aikainen malli

2.1 Informaation filtraatio

Jatkossa $(\Omega, \mathcal{F})$ abstrakti todennäköisyysavaruus, jossa $\mathcal{F}$ on σ-algebra, ja P referenssi-todennäkösyysmitta.

Määritelmä 2.1.1. *Kasvava ali-σ-algebroiden jono $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T})$ aikaindeksilla $\mathbb{T} = \mathbb{N}^+, \mathbb{R}^+$ kutsutaan filtraatioksi*

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, \quad 0 \leq s \leq t \in \mathbb{T}$$

Esimerkiksi yhden perioodi mallin filtraatiossa, $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathcal{F}_0 = \{ \emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ kun $t \geq 1$, mutta yleisesti alussa $\mathcal{F}_0 \supseteq \mathcal{N}^P$, eli $\mathcal{F}_0$ ei tarvitse olla P-triviaali.

σ-algebra $\mathcal{F}_t$ sisältää kaikki tapahtumat jotka ovat varmistuneet tai osoittautuneet mahdottomiksi hetken t:n menneessä. Filtraatio kuvaa informaation kasvua ajan menneessä.

Määritelmä 2.1.2.

- *Stokastinen prosessi on satunnaisvektoreiden kokoelma $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$ aika-parametreilla $\mathbb{T}$.*
- *Kun $\forall t \in \mathbb{T}$, $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen, sanotaan että (X_t) on $\mathbb{F}$-sopiva (engl. adapted).*
- *Diskreetti ajassa ($T \subseteq \mathbb{N}$), sanotaan myös että (X_t) on $\mathbb{F}$-ennustettava kun $\forall t \in \mathbb{T}$, $X_t(\omega)$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen.*

Tulkinta Jos X_t on $\mathbb{F}$-sopiva prosessi, kun filtraation $\mathbb{F}$ sisältämän informaatio on käytössä, t hetken arvo $X_t(\omega)$ paljastuu hetkellä t.

Jos X_t on $\mathbb{F}$-ennustettava, $X_t(\omega)$ arvo paljastuu jo hetkellä $(t-1)$.

Määritelmä 2.1.3. *Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali σ-algebra. Silloin $L^p(\Omega, \mathcal{G}, P) \subset L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on lineaarinen aliavaruus.*

Kun $p = 2$, avaruudella $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on skalaaritulo

$$\langle X, Y \rangle_{L^2} := E_P\big(XY\big)$$

Kun $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ määritellään ehdollinen odotusarvoa ehdolla $\mathcal{G}$ σ-algebraa (conditional expectation)

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) = (\Pi_{\mathcal{G}} X)(\omega)$$

jossa $\Pi_{\mathcal{G}}$ on satunnasimuuttujan X ortogonaalinen projektio aliavaruuteen $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ joka toteuttaa

$$E_P(YX) = E_P(Y \Pi_{\mathcal{G}} X) \quad \forall Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

Tämä määritelmää yleistyy tilanteeseen jossa $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jolla ei ole sisätuloa ja ei voi puhua ortogonaalisesta projektiosta. On kuitenkin olemassa ehdollinen odotusarvo

$$E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

jolla kaikille $Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ (olennaisesti rajoitettuja)

$$E_P(YX) = E_P\Big(Y E_P(X|\mathcal{G})\Big) \tag{2.1.1}$$

Vihje Kun $X(\omega) \geq 0$, jono

$$X_n(\omega) = X(\omega) \wedge n \in L^\infty \subseteq L^2$$

ja $E_P(|X_n - X|) \to 0$. Osoitetaan että $\Pi_{\mathcal{G}} X_n$ on Cauchy jono $L^1(P, \mathcal{G}, P)$ avaruudessa ja raja-arvo toteuttaa ehdollisen odotusarvon määritelmää (2.1.1).

2.1.1 Ehdollisen odotusarvon ominaisuudet

- $E_P(E_P(X|\mathcal{G})) = E_P(X)$,
- Kun $Y(\omega)$ on $\mathcal{G}$-mitallinen $E_P(XY|\mathcal{G}) = Y E_P(X|\mathcal{G})$.
- Kun $Y \overset{\perp\!\!\!\perp}{P} \mathcal{G}$, $E_P(Y|\mathcal{G}) = E_P(Y)$.
- Lineaarisuus:

$$E_P(aX + bY|\mathcal{G})(\omega) = aE_P(X|\mathcal{G})(\omega) + bE_P(Y|\mathcal{G})(\omega)$$

- Ehdollinen odotusarvo on ei-negatiivinen operaattori:
  Kun $X(\omega) \geq 0$ $(P = 1)$, seuraa $E(X|\mathcal{G})(\omega) \geq 0$ $(P = 1)$.

2.1.2 Mitanvaihto ehdolliselle odotusarvolle: abstrakti Bayesin kaava

Olkoon Q, P todennäköisyysmitat jossa Q dominoi P:n, ($P \ll Q$) σ-algebrassa $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$,

eli $Q(A) = 0 \Longrightarrow P(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{G}$.

Sillon on olemassa Radon-Nikodymin derivaatta $\frac{dP}{dQ}(\omega)$, joka on $\mathcal{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja $L^1(\Omega, \mathcal{G}, Q)$ avaruudessa, jolla

$$Z^{\mathcal{G}}(\omega) = Z^{\mathcal{G}}(P, Q)(\omega) = \frac{dP|\mathcal{G}}{dQ|\mathcal{G}}(\omega) \geq 0$$

eli on voimassa mitan vaihto kaava $\mathcal{G}$-mitalliselle satunnaismuuttujalle $X(\omega)$.

$$E_P(X) = E_Q(XZ(P, Q))$$

Huomataan että $Q(Z(\omega) \geq 0) = P(Z(\omega) > 0) = 1$, ja mitan vaihto kaavasta seuraa $E_Q(Z) = 1$,

Tilastotieteessa ja todennäköisyysteorias $Z(P, Q)$ kutsutaan myös uskottavuus osamääräksi (likelihood ratio).

Kun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ on ali σ-algebra ja $P \ll Q$ $\mathcal{G}$ σ-algebrassa, seuraa $P \ll Q$ on $\mathcal{A}$ σ-algebrassa, ja ehdollisen odotusarvon määritelmästä

$$Z^{\mathcal{A}}(P, Q) = E_Q(Z^{\mathcal{G}}(P, Q)|\mathcal{A}) \qquad (\text{ martingaalin ominaisuus})$$

Uskottavuusosamäärän avulla saadaan mitanvaihdon kaava ehdolliselle odotusarvolle:

Kun $P \ll Q$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on ali σ-algebra, ja X is $\mathcal{F}$-mitallinen , *abstrakti Bayesin kaava* pätee:

$$E_P(X|\mathcal{G}) = \frac{E_Q(XZ(P, Q)|\mathcal{G})}{E_Q(Z(P, Q)|\mathcal{G})}$$

Todistus ei ole vaikea: olkoon $B \in \mathcal{G}$, ja $Z = Z^{\mathcal{F}}(P, Q)$. Silloin

$$\begin{aligned} &E_P(X\mathbf{1}_B) = E_Q(ZX\mathbf{1}_B) = E_Q(E_Q(ZX\mathbf{1}_B|\mathcal{G})) = E_Q(E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1_B}) \\ &= E_Q\left(\frac{E_Q(Z|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})} E_Q(ZX|\mathcal{G})\mathbf{1}_B\right) = E_Q\big(Z\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_B\big) = E_P\big(\frac{E_Q(ZX|\mathcal{G})}{E_Q(Z|\mathcal{G})}\mathbf{1}_B\big) \end{aligned}$$

jossa käytettin mitan vaihton kaavaa odotusarvolle, ja ehdollisen odotusarvon määritelmää.

Esimerkki 2.1.1. *Harjoitustehtäväksi näytämme että todennäköisyyslaskennan elementaarinen Bayesin kaava seuraa tästä abstraktista kaavasta.*

Olkoon $(X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$ *satunnaisvektori jolla*

$$P(X \in dx, Y \in dy) = p_{X,Y}(x,y)dxdy$$

kanoonisessa avaruudessa $\Omega = \mathbb{R}^2$ *varustettuna* σ*-algebralla* $\mathcal{F} = \sigma(X,Y)$.

Merkitään marginaalit tiheysfunktiot

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x,y)dy, \quad p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x,y)dx, \quad \textit{joilla}$$
$$P(X \in dx) = p_X(x)dx, \quad P(Y \in dy) = p_Y(x)dy$$

Otamme dominoivaksi mitaksi jotakin tulomittaa, esimerkiksi

$$Q(dx, dy) = p_X(x)p_Y(y)dxdy$$

Huomataan että $P \ll Q$ *koska*

$$0 = Q_{X,Y}(A \times B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) \Longleftrightarrow P_{X,Y}(A \times \mathbb{R})P_{X,Y}(\mathbb{R} \times B) = 0$$
$$\Longleftrightarrow P_{X,Y}(A \times \mathbb{R}) = 0 \quad \textit{tai} \quad P_{X,Y}(\mathbb{R} \times B) = 0$$
$$\Longrightarrow P_{X,Y}(A \times B) = 0$$

Jos $D \in R^2$ *on Borel-mitallinen on olemassa jono nelikulmaisia joukkoja* $D_n = A_n \times B_n \uparrow D$, *ja monotonisen konvergenssin lauseesta seuraa että* $Q_{X,Y}(D) \Longrightarrow P_{X,Y}(D) = 0$ *pätee kaikille Borel-mitallisille joukoille* D. *RN-derivaatta on*

$$Z(P,Q) = \frac{dP}{dQ}(x,y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)} = z(x,y)$$

Kun ehdollistetaan ali-σ*-algebraan* $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, *abstraktista Bayesin kaavasta formula seuraa rajoitetuille mitallisille testifunktiolle* $f(x,y)$,

$$E_P(f(X,Y)|\sigma(Y))(\omega) = \frac{E_Q(f(X,Y)z(x,y)|\sigma(Y))(\omega)}{E_Q(z(x,y)|\sigma(Y))(\omega)}$$
$$= \frac{E_Q(f(X,y)z(X,y)}{E_Q(z(X,y)}\bigg|_{y=Y(\omega)} = \frac{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))z(x,Y(\omega))p_X(x)p_Y(y)dxdy}{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} z(x,Y(\omega))p_X(x)p_Y(y)dxdy}$$
$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))z(x,Y(\omega))p_X(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} z(x,Y(\omega))p_X(x)dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))\frac{p_{X,Y}(x,Y(\omega))}{p_X(x)p_Y(Y(\omega))}\ p_X(x)dx}{\int_{\mathbb{R}} \frac{p_{X,Y}(x,Y(\omega))}{p_X(x)p_Y(Y(\omega))}\ p_X(x)dx} =$$
$$\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))\frac{p_{X,Y}(x,Y(\omega))}{p_Y(Y(\omega))}\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)p(x|\ Y(\omega))dx$$

jossa ehdollisen jakauman tiheysfunktio on

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} p_{XY}(x',y)dx'}$$

2.2 Diskreetti-aikainen markkinamalli

Olkoon $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T}\}$, aikaindeksilla $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \ldots, T\} \subseteq \mathbb{N}$, ja $(d+1)$-ulotteinen osakeprosesessi

$$S_t(\omega) := \left(S_t^{(0)}(\omega), S_t^{(1)}(\omega), \ldots, S_t^{(d)}(\omega)\right) \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t \in \mathbb{T}$$

jossa $\forall t \in \mathbb{T}$, todennäköisyydellä $(P = 1)$,

$$S_t^{(0)}(\omega) > 0 \quad \text{ja } S_t^{(k)}(\omega) \geq \quad \forall k = 1, \ldots, (d+1)$$

Diskontatut osakkeiden arvot numeräärillä $S_t^{(0)}$ merkitään

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_t(\omega) &= \left(\widetilde{S}_t^{(1)}(\omega), \ldots, \widetilde{S}_t^{(1)}(\omega)\right) \in \mathbb{R}_+^d \quad \text{jossa} \\ \widetilde{S}_t^{(k)}(\omega) &= \frac{S_t^{(k)}(\omega)}{S_t^{(0)}(\omega)}, \quad k = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

Olkoon $\xi_t(\omega) := \left(\xi_t^{(0)}(\omega), \xi_t^{(1)}(\omega), \ldots, \xi_t^{(d)}(\omega)\right)$ sijoitus strategia. Salkun arvo hetkellä t on

$$V_t = \xi_t S_t = \sum_{i=0}^{d} \xi_t^{(i)} S_t^{(i)}$$

jossa $\xi_t S_t$ merkitsee skalaarituloa $\mathbb{R}^{d+1}$ avaruudessa.

Huomataan että sijoitusstrategiamme saa olla satunnainen.

Määritelmä 2.2.1. *Merkitään diskreetti aikainen martingaalimuunnos (tai stokastinen integraali)*

$$(\xi \cdot S)_t := \sum_{r=1}^{t} \xi_r (S_r - S_{r-1}) = \sum_{r=1}^{t} \xi_r \Delta_r$$

Lemma 2.2.1. *Diskreetti aikainen osittaisintegrointi kaava:*

$$\begin{aligned} V_t &= \xi_t S_t = V_0 + \sum_{r=1}^{t} \xi_r \Delta S_r + \sum_{r=1}^{t} S_{r-1} \Delta \xi_r \\ &= V_0 + (\xi \cdot S)_t + (S_- \cdot \xi)_t = V_0 + (\xi \cdot S)_t - C_t \end{aligned}$$

jossa $S_-(t) := S(t-1)$, *ja salkun kulutus prosessi on*

$$C_t := -(S_- \cdot \xi)_t = -\sum_{r=1}^{t} S_{r-1}(\xi_{r-1} - \xi_t)$$

Tulkinta: kun $\Delta C_t > 0$, ajanhetkien $(t-1)$ ja t:n välissä otetaan pois varallisuutta salkusta, kun $\Delta C_t < 0$ lisätään varallisuutta.

Määritelmä 2.2.2. *Sanotaan että salkku on itsensä-rahoittava tai omarahoitteinen (self-financing) jos* $\forall t$, $C_t \equiv 0$, *eli*

$$V_t = V_0 + (\xi \cdot S)_t = \xi_0 S_0 + \sum_{r=1}^{t} \xi_r \Delta S_r$$

$\forall t$ *todennäköisyydellä* $P = 1$.

Määritelmä 2.2.3. *Satunnaisprosessi* $(S_t : t \in \mathbb{N})$ *on* $(\mathbb{F}, P)$*-martingaali filtraation* $\mathbb{F}$ *ja todennäköisyysmitan* P*:n suhteen kun*

1. S_t *on* $\mathbb{F}$*-sopiva*

2. $$E_P(|S_t|\ ) < \infty \quad \forall t$$

3. $$E_P(S_t|\mathcal{F}_r) = S_r \text{ kun } 0 \le r \le t$$

Moniulotteinen prosessi on martingaali kun jokainen koordinatti on martingaali. Sanotaan myös että S_t *on yli- vai ali-martingaali (supermartingale, submartingale) kun*

$$E_P(S_t|\mathcal{F}_r) \le \quad (\text{ vastaavasti } \ge\ )\ S_r \text{ kun } 0 \le r \le t$$

Esimerkki 2.2.1. *Olkoon* $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ *satunnaismuuttujen jono todennäköisyysavaruudessa* $(\Omega, \mathcal{F})$. *Olkoon* P *ja* Q *todennäköisyyksia joiden suhteen satunnaismuuttujat* $(X_s : s = 1, \dots, n)$ *ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja*

$$P(X_1 \in dx) = f(x) Q(X_1 \in dx).$$

Olkoon $\mathcal{F}_s = \sigma(X_1, \dots, X_s)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_s : s = 1, \dots, n)$. *Seuraa*

$$Z_t(P, Q) = \prod_{s \in \mathbb{N}: s \le t} f(X_s(\omega)) = \prod_{s \in \mathbb{N}: s \le t} \frac{dP_X}{dQ_X}(X_s(\omega))$$

on $(Q, \mathbb{F})$*-martingaali.*

Teoreema 2.2.1. *Olkoon S_t $(P,\mathbb{F})$-martingaali ja ξ_t $\mathbb{F}$-ennustettava prosessi, jossa $\xi_t \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_{t-1},P)$.*

Silloin martingaali muunnos $(\xi \cdot S)_t$ on $\mathbb{F}$-martingaali.

Todistus Ehdollisen odotusarvon ominaisuudesta.

Huomautus Koska $\Delta S_t \in L^1(P)$ ehto $\xi_t \in L^\infty(P)$ takaa että

$$E_P\biggl(\xi_t \Delta S_t\biggr) < \infty$$

Jos $\xi_t \in L^0(P)$ on pelkästään mitallinen, voidaan määritellä *pysähdyshetkien* jono

$$\tau_n = \inf\{t \in \mathbb{T} : \ |\xi_{t+1}| > n\}$$

jossa $\tau_n(\omega) \uparrow \infty$ kun $n \to \infty$ (Huomataan että $\inf \emptyset := +\infty$) Koska ξ_t on $\mathbb{F}$-ennustettava, prosessi

$$\mathbf{1}(\tau_n > t)\xi_t \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_{t-1},P)$$

Tästä seuraa että pysähydetty prosessi

$$\bigl(\xi \cdot S\bigr)_t^{\tau_n} := \bigl(\xi \cdot S\bigr)_{t\wedge\tau_n} = \sum_{r=1}^{t} \mathbf{1}(\tau_n > r)\xi_r \Delta S_t$$

on martingaali. Eli seuraavan määritelmän mukaan diskreetti stokastinen integraali $(\xi \cdot S)_t$ on $(\mathbb{F},P)$-lokaali martingaali.

Määritelmä 2.2.4.

- *Olkoon $\tau(\omega) \in \mathbb{N}$ satunnainen ajanhetki. Sanotaan että τ on $\mathbb{F}$ pysähdyshetki jos ja vain jos*

$$\Bigl\{ \omega : \tau(\omega) \le t \Bigr\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

- *Olkoon $(M_t : t \in \mathbb{T})$ $\mathbb{F}$-sopiva prosessi. Sanotaan että (M_t) on $(\mathbb{F},P)$-lokaali martingaali jos on olemassa $\mathbb{F}$-pysähdyshetkien jono $\tau_n(\omega) \uparrow +\infty$ $(P=1)$ jolla jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, pysäyhdetty prosessi $(M_{t\wedge\tau_n} : t \in \mathbb{T})$ on $(\mathbb{F},P)$-martingaali.*

- *Sanotaan että satunnaisprosessilla $(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ jokin satunnaisprosessien ominaisuus pätee $\mathbb{F}$-lokaalisesti, jos on olemassa $\mathbb{F}$-satunnaishetkien jono $\tau_n(\omega) \uparrow \infty$,*

  jolla jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pyhsaydetylle prosessille $(X_{t\wedge\tau_n}(\omega) : t \in \mathbb{N})$ kyseinen ominaisuus on voimassa.

  Siis voidaan puhua $\mathbb{F}$-lokaalisista martingaaleista, $\mathbb{F}$-lokaalisesti rajoitetuista prosesseseista, $\mathbb{F}$-lokaalisesti neliö-integroituvista prosesseista ja niin edelleen.

Tehtävä 2.2.1. *$(P, \mathbb{F})$-martingaali on $(P, \mathbb{F})$-lokaali martingaaali.*

Lemma 2.2.2. *Olkoon $(S_t : t \in \mathbb{N})$ $(P, \mathbb{F})$-martingaali ja $(\xi_t : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{F}$-ennustettava. Silloin martingaali munnos $(\xi \cdot S)_t$ on aina $(P, \mathbb{F})$-lokaali martingaali.*

Todistus. Jos $\xi_t \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{t-1}, P)$ $\forall t$, lauseesta 2.2.1 seuraa että $(\xi \cdot S)_t$ on martingaali, ja siksi se on myös lokaali martingaali. Kun ξ_t ei ole olennaisesti rajoitettu, määritellään pysähdyshetkien jono

$$\tau_n(\omega) = \inf\{t : |\xi_{t+1}(\omega)| > n\} \forall n \in \mathbb{N}$$

Huomataan että $\tau_n(\omega) \le \tau_{n+1}(\omega) \uparrow \infty \forall \omega \in \Omega$, ja

$$(\xi \cdot S)_{t \wedge \tau_n} = \big(\xi^{(n)} \cdot S)_{t \wedge \tau_n}$$

jossa $\xi_t^{(n)} = \xi_t \mathbf{1}(|\xi_t| \le n)$ on rajoitettu.

Koska $\big(\xi^{(n)} \cdot S)_t$ on martingaali ja τ_n on pysähdyshetki, seuraa että myös $\big(\xi^{(n)} \cdot S)_{t \wedge \tau_n}$ on martingaali. □

Määritelmä 2.2.5. *$\mathbb{F}$-sopiva prosessi (M_t) on yleistetty $(P, \mathbb{F})$-marginaali jos $E(|M_0|) < \infty$, and $\forall t \in \mathbb{N}$*

$$E_P(M_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) = M_t(\omega)$$

jossa M_t **ei tarvitse olla integroituva** .

Huomautus Kolmogorovin määritelmän mukaan satunnaismuuttujan X:n ehdollinen odotusarvo $Y = E_P(X|\mathcal{G})(\omega) \in \mathbb{R}$ on $\mathcal{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja joka toteuttaa Kolmogorovin määritelmää

$$E_P\big(X\mathbf{1}_A\big) = E_P\big(Y\mathbf{1}_A\big) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

ja voi olla olemassa ja hyvin määritelty myös silloin kun X ei ole integroituva. Silloin kun X on integroituva on olemassa $E_P(X|\mathcal{G}) \in L^1(P)$.

Teoreema 2.2.2. *(Shiryaev, Essentials of Stochastic Finance, sivulla 98) Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä diksreetti ajassa:*

1. *$(X_t : t \in \mathbb{N})$ on $(P, \mathbb{F})$-lokaali martingaali.*
2. *$(X_t : t \in \mathbb{N})$ on $(P, \mathbb{F})$-yleistetty martingaali*
3. *$(X_t : t \in \mathbb{N}) = (\xi \cdot M)_t$ on martingaalimuunnos, jossa ξ_t on $\mathbb{F}$-ennustettava ja M_t on $(P, \mathbb{F})$-martingaali.*

Todistus. 1) $\Longrightarrow$ 2): Olkoon X_t $(P,\mathbb{F})$-lokaalimartingaali ja τ_n lokalisointijono. Silloin

$$E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)\mathbf{1}(\tau_n > t) = E(X_{t+1}\mathbf{1}(\tau_n \geq t+1)|\mathcal{F}_t) = E(X_{(t+1)\wedge\tau_n}\mathbf{1}(\tau_n > t)|\mathcal{F}_t)$$
$$= E(X_{(t+1)\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_t)\mathbf{1}(\tau_n > t) = X_{t\wedge\tau_n}\mathbf{1}(\tau_n > t)$$

koska τ_n on pyhsähdyshetki ja $\{\tau_n > t\} = \{\tau_n \geq t+1\} \in \mathcal{F}_t$, ja väite seuraa kun $n \to \infty$.

Toisinpäin, olkoon $\tau_n \uparrow \infty$ lokalisointi jono X_t-martingaalille, ja $A_n = \{\omega : \tau_{n-1}(\omega) < t \leq \tau_n(\omega)\}$, jossa $\tau_0 = 0$.

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\big(\tau_{n-1}(\omega) < t \leq \tau_n(\omega)\big) X_{t\wedge\tau_n}$$

where for a fixed t the event $A_n = \{\ \omega : t \in I_n(\omega)\}$ is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable with $A_n \cap A_m = \emptyset$ for $n \neq m$, and for each ω the sum contains only one nonzero term. We have

$$E(|X_t||\mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\big(\tau_{n-1}(\omega) < t \leq \tau_n(\omega)\big) E(|X_{t\wedge\tau_n}||\ \mathcal{F}_{t-1}) < \infty$$

koska $X_{t\wedge\tau_n}$ on aito martingaali ja sarjassa on vain yksi nollasta poikkeava termi. Tästä yleisesti ei voi päätellä että $E(|X_t||\mathcal{F}_{t-1})$ tai $|X_t|$ olisivat integroituvia. Kuitenkin martingaali ominaisuus pätee lokaali martingaalille X_t, koska

$$E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\big(\tau_{n-1}(\omega) < t \leq \tau_n(\omega)\big) E(X_{t\wedge\tau_n}|\ \mathcal{F}_{t-1})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\big(\tau_{n-1}(\omega) < t \leq \tau_n(\omega) X_{(t-1)\wedge\tau_n} = X_{t-1},$$

eli X_t on yleistetty martingaali. $\square$

Seuraus 2.2.1. *Jos* $(H_t : t \in \mathbb{N})$ *on* $\mathbb{F}$*-ennustettava ja* $(M_t : t \in \mathbb{N})$ *on* $\mathbb{F}$*-lokaali martingaali, martingaali muunnos*

$$\big(H \cdot M)_t = \sum_{s=1}^{t} H_s \Delta M_s$$

on $\mathbb{F}$*-lokaali martingaali.*

Lemma 2.2.3. *(Fatou lemma ehdolliselle odotusarvolle) Olkoon* $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ *ja* $Y(\omega)$ *satunnaismuuttujat jono jolla* $X_n(\omega) \geq Y(\omega)$ P*-melkein varmasti ja* $E_P(|Y|) < \infty$*, eli koko jonolla on integroituva alaraja. Silloin, kun* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *on ali* σ*-algebra,*

$$\liminf_n E_P(X_n|\mathcal{G})(\omega) \leq E(\liminf_n X_n|\mathcal{G})(\omega) \quad P\text{-melkein varmasti.}$$

ja erityisesti

$$\liminf_n E_P(X_n) \leq E(\liminf_n X_n)$$

Lemma 2.2.4. S_t *on lokaali martingaali (myös jatkuvalla ajalla), jolla on integroituva alaraja, eli*

$$\sup_t \{S_t^-\} < Y, \text{ jolla } \quad E(Y) < \infty,$$

silloin S_t on ylimartingaali. Tämä pätee myös jatkuvalla aikaparametrilla. Erityisesti ei-negatiivinen lokaali-martingaali on ylimartingaali.

Todistus. Olkoon $r \leq t$ ja τ_n on lokalisointijono

$$E(S_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_r) = S_{r\wedge\tau_n}$$

ja kun $n \to \infty$ Fatou lemma ehdolliselle odotusarvolle soveltuu

$$\begin{aligned} E(S_t|\mathcal{F}_t) &= E(\lim_{n\to\infty} S_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_r) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} E(S_{t\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_r) = \lim_{n\to\infty} S_{r\wedge\tau_n} = S_r \end{aligned}$$

eli S_t on ylimartingaali. □

Lemma 2.2.5. *(Shiryaev, Essentials of Stochastic Finance, sivulla 101)*

- *Diskreetti ajassa,* $(\mathbb{F}, P)$*-lokaali martingaali* $(S_t(\omega) : t \in \mathbb{N})$ *jolla*

  $$E_P(X_t^+) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N}, \qquad \text{tai} \qquad E_P(X_t^-) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

  on aito $(\mathbb{F}, P)$*-martingaali. Erityisesti ei negatiivinen diskreetti aikainen lokaali martingaali on aito martingaali.*

- *Sen lisääksi jos* $(S_t(\omega) : t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ *on diskreetti aikainen* $(\mathbb{F}, P)$*-lokaali-martingaali jossa* $T < \infty$*, ja*

  $$S_T(\omega) \geq 0 \qquad (P = 1)$$

  seuraa että $(S_t(\omega) : t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ *on aito* $(\mathbb{F}, P)$*-martingaali, ja sen takia myös* $S_t(\omega) \geq 0$ $\forall t = 0, 1, \ldots, t$*,* $(P = 1)$*.*

- $(M_t - M_0)_{t\in\mathbb{N}}$ *on aito* $\mathbb{F}$*-martingaali.*

Huom Jatkuvassa ajassa ei-negatiivinen lokaali martingaali on ylimartingaali mutta ei välttämättä martingaali.

Todistus. 1. Olkoon $E(S_t^-) < \infty \ \forall t \in \mathbb{N}$. Osoitamme ensin että $E(|S_t|) < \infty \ \forall t \in \mathbb{N}$.

Fatou lemmasta, kun τ_n on lokalisointi jono

$$E(X_t^+) = E(\lim_n X_{t\wedge\tau_n}^+) = E(\liminf_n X_{t\wedge\tau_n}^+) \leq \liminf_n E(X_{t\wedge\tau_n}^+)$$
$$= \liminf_n \big\{E(X_{t\wedge\tau_n} + E(X_{t\wedge\tau_n}^-)\big\} = E(X_0) + \sum_{s=1}^{t} E(X_s^-) < \infty$$

yksinkertaisesti koska $X_{t\wedge\tau_n}^- \leq X_1^- + X_2^- + \cdots + X_t^-$. Tämä argumentti toimii koska aika diskreetti, eli $\tau_n \in \mathbb{N}$, sitä ei voi soveltaa jatkuvassa ajassa.

Koska

$$|X_{(t+1)\wedge\tau_k}| \leq \left(\sum_{s=1}^{t+1} |X_s|\right) \in L^1(P)$$

ja martingaali ominaisuus Lebesgue dominoidun konvergenssin lauseesta ehdolliselle odotusarvolle

$$X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n} = \lim_{n\to\infty} E\big(X_{(t+1)\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_t\big) = E\big(\lim_{n\to\infty} X_{(t+1)\wedge\tau_n}|\mathcal{F}_t\big) = E\big(X_{t+1}|\mathcal{F}_t\big)$$

2. Osoitamme että kun $E(X_T^-) < \infty$, seuraa $E(X_t^-) < \infty$ kaikille $t = 1, \ldots, T-1$, joka seuraa Jensenin epäyhtälöstä

$$E(X_T^-|\mathcal{F}_{T-1}) \geq E(X_T|\mathcal{F}_{T-1})^- = X_{T-1}^- \geq 0$$

ja ottaamalla odotusarvoa.

□

Määritelmä 2.2.6. *Markkinamallimme on arbitraasi vapaa kun kaikille itsensärahoittavillea ja* $\mathbb{F}$*-ennustettaville strategioille* $\xi_t(\omega)$*, pätee*

$$P(V_0 = 0) = 1 \text{ ja } P(V_T \geq 0) = 1,$$

seuraa

$$P(V_T = 0) = 1,$$

jossa prosessi $V_t = \xi_t S_t$*, on salkun arvo.*

Huomautukset Tässä σ-algebra $\mathcal{F}_0$ ei tarvitse olla triviaali, siis salkun painot hetkellä 0 toteuttavat

$$V_0 = \xi_0 S_0 = \xi_1 S_0$$

jossa S_0 ja ξ_1 ovat $\mathcal{F}_0$ mitallisia.

Ekvivalentti ehto: jos ξ_t on itsensärahoittava ja

$$P(\widetilde{V}_0 \leq 0) = 1 \text{ ja } P(\widetilde{V}_T \geq 0) = 1, \Longrightarrow P(V_T = 0) = 1$$

jossa $\widetilde{V}_t = V_t / S_t^{(0)}$ on diskontattu arvo, joka pätee jos ja vain jos

$$\widetilde{V}_T - \widetilde{V}_0 = (\xi \cdot \widetilde{S})_T \geq 0 \quad (P = 1), \text{ seuraa } (\xi \cdot \widetilde{S})_T = 0 \quad (P = 1)$$

Teoreema 2.2.3. *Todennäköisyysavruudella* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *informaatio-filtraatiolla* $\mathbb{F}$*, olkoon* $(S_t^{(0)} \equiv 1, S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(d)})$ $\mathbb{F}$*-sopivia arvoprosesseja diskontattuille instrumentteille. Markkinamalli on arbitraasivapaa jos ja vain jos on olemassa* $Q \sim P$ *jonka suhteen diskontatut instrumentit* $S_t^{(k)}$ $k = 1, \ldots, d$ *ovat* $Q, \mathbb{F}$*-martingaaleja.*

Todistus. $\Longleftarrow$

Olkoon $V_t = V_0 + (\xi \cdot S)_t = V_0 + \sum_{u=1}^{t} \sum_{i=0}^{d} \xi_t^i \Delta S_t$ (diskontatun) salkkun arvo, kun $t = 0, 1, \ldots, T$, jossa ξ_t strategia on $\mathbb{F}$-ennustettava ja itsensä rahoittava, jolla $V_0 \leq 0$ ja $P(V_T \geq 0) \geq 0$ P-melkein varmasti. Koska V_t on martingaali muunnos ennustavalla strategialla, seuraa että V_t on lokaali martingaali, ja oletuksesta $V_T^- = 0$, sitä seuraa $E(V_T^-) = 0$ ja Shiryaevin lemmasta 2.2.5 V_t on aito martingaali. Martingaali ominaisuudesta seuraa $E_P(V_T) = E_P(V_0) \leq 0$, ja koska oletettiin että $V_T(\omega) \geq 0$, seuraa että $V_T(\omega) = 0$, eli ennustettava ja itsensä rajoittava arbitraasi-strategia ei ole olemassa.

□

Lemma 2.2.6. *Olkoon* $X(\omega) \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, eli satunnaismuuttuja, jolla*

$$P(X > 0) > 0 \quad \text{ja} \quad P(X < 0) > 0$$

On olemassa todennäköisyysmitta $Q \sim P$ *jolla* $\frac{dQ}{dP}(\omega)$ *on rajoitettu,* $E_Q(|X|) < \infty$ *ja*

$$E_Q(X) = 0$$

Tod. Määritellään todennäköisyysmitta P_0 jolla

$$P_0(A) := \frac{E_P\Big(\exp\big(-X^2\big)\mathbf{1}_A\Big)}{E_P\Big(\exp\big(-X^2\big)\Big)}$$

jossa

$$\frac{dP_0}{dP}(\omega) := \frac{\exp\big(-X^2\big)}{E_P\Big(\exp\big(-X^2\big)\Big)} \qquad \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$$

Oletuksesta seuraa että on olemassa $\delta > 0$ ja $\varepsilon > 0$ jolla

$$P(X > \delta) > \varepsilon \text{ ja } \quad P(X < -\delta) > \varepsilon\ .$$

Otetaan seuraavaksi P_0 mitan Esscherin muunnos:

$$P_\theta(A) = \varphi(\theta)^{-1} E_{P_0}\Big(\exp\big(\theta X\big)\mathbf{1}_A\Big) \qquad \text{jossa}$$

$$\varphi(\theta) := E_{P_0}\Big(\exp\big(\theta X\big)\Big) = \exp\Big(\frac{\theta^2}{4}\Big)\frac{E_P\Big(\exp\Big(-\big(X-\frac{\theta}{2}\big)^2\Big)\Big)}{E_P\Big(\exp\big(-X^2\big)\Big)} < \infty$$

Osoitan että on olemassa θ^* jolla

$$E_{P_{\theta^*}}\Big(\Delta\widetilde{S}_1\Big|\mathcal{F}_0\Big) = 0, \qquad (P = 1).$$

Apulause Kuvaus $\theta \mapsto \varphi(\theta)$ on aidosti konveksi:

$$\frac{d}{d\theta}\varphi(\theta) = E_{P_0}\Big(\frac{d}{d\theta}\exp\big(\theta X\big)\Big) =$$

$$E_{P_0}\Big(X\exp\big(\theta X\big)\Big),$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\varphi(\theta) = E_{P_0}\Big(\frac{d^2}{d\theta^2}\exp\big(\theta X\big)\Big) = E_{P_0}\Big(X^2\exp\big(\theta X\big)\Big) > 0$$

Todistus Osoitetaan että derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto on sallittu. Dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa että voidaan vaihtaa derivoinnin ja odotusarvon järjestystä koska kun $\varepsilon > 0$ jolla $\forall 0 < \theta - \varepsilon < \vartheta < \theta + \varepsilon$ seuraa kaikille $n \geq 1$

$$|x|^n \exp(\vartheta x - x^2) \leq |x|^n \exp(\theta x - x^2)\Big(\exp(\varepsilon x) + \exp(-\varepsilon x)\Big) \leq k_n \exp(-cx^2)$$

jollekin $k_n > 0$, $0 < c < 1$. Siis satunnaismuuttuja

$$|X(\omega)|^n \exp(\vartheta X(\omega) - X(\omega)^2) \leq k_n \exp(-cX^2(\omega)) \in L^1(P)$$

Eli voidaan vaihtaa derivoinnin ja integroinnin järjestystä.

Merkitään

$$\varphi(\theta) = E_{P_0}\big(\exp(\theta X)\big)$$

Dominoidun konvergenssin lauseen avulla seuraa vaihtamalla derivoinnin ja integroinnin järjestystä että kuvaus $\theta \mapsto \varphi$ on derivoituva. Erityisesti

$$\frac{d}{d\theta}\log\varphi(\theta) = \frac{E_{P_0}\Big(X\exp\big(\theta X\big)\Big)}{E_{P_0}\Big(\exp\big(\theta X\big)\Big)} = E_{P_\theta}\big(X\big)$$

Silloin kun konveksi funktiolla $\theta \mapsto \varphi(\theta) \geq 0$ on minimipiste θ_*, minimipiste on $\frac{d}{d\theta}\log\varphi(\theta)$ funktion nolla-piste ja

$$E_{P_{\theta_*}}\big(X\big) = 0\ .$$

Osoitan että selläinen minimipiste θ_* on olemassa. Muuten olisi olemassa jono $\theta_n \to \pm\infty$ jolla

$$\varphi_* := \inf_{\theta\in\mathbb{R}}\varphi(\theta) \leq \varphi(\theta_n) \downarrow \varphi_*$$

Jos esimerkiksi $\theta_n \uparrow \infty$, selläisellä $\delta > 0$ jolla $P(X > \delta) > 0$ ja $P_0(X > \delta) > 0$

$$\varphi(\theta_n) = E_{P_0}\big(\exp(\theta_n X)\big) \geq P_0(X > \delta)\exp(\delta\theta_n) \to \infty \quad \text{kun } n \uparrow \infty$$

josta seuraa ristiriita koska $\varphi(\theta_n) \downarrow \phi_* = \inf_\theta\{\ \phi_X(\theta)\} \leq \phi_X(0) = 1$.

Yleistys olkoon $X_t = (X_t^{(k)},\ k = 0, 1 \ldots, d)$ $\mathbb{F}$-sopiva prosessi, aikaindeksillä $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, jolla kaikille $\mathbb{F}$-ennustettaville prosessille $\xi_t = (\xi_t^{(k)},\ k = 0, 1, \ldots, d)$ pätee

$$\begin{aligned} &P(\xi_t \cdot X_t > 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0 \quad \mathbb{P}\text{-melkein varmasti} \\ \Longleftrightarrow &P(\xi_t \cdot X_t < 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0 \quad \mathbb{P}\text{-melkein varmasti} \end{aligned}$$

Silloin on olemassa todennäköisyysmitta $P^* \sim P$ jolla $\frac{dP^*}{dP} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$E_{P^*}\big(|X_t|\big) < \infty \quad \text{ja } E_{P^*}\big(X_t \big| \mathcal{F}_{t-1}\big) = 0$$

Olkoon

$$\varphi_t(\theta, \omega) = E_{P_0}\big(\exp(\theta \cdot X_t)\big|\mathcal{F}_t\big)(\omega), \quad \theta \in \mathbb{R}^{d+1}$$

Kuvaus $\theta \mapsto \varphi_t(\theta, \omega)$ on konveksi koska

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_k \partial\theta_\ell}\varphi_t(\theta,\omega) = E_{P_0}\big(\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_\ell}\exp(\theta \cdot X_t)\big|\mathcal{F}_t\big)(\omega) = E_{P_0}\big(X_t^{(k)}X_t^{(\ell)}\partial\theta_\ell \exp(\theta \cdot X_t)\big|\mathcal{F}_t\big)(\omega)$$

jossa matriisi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_\ell}\varphi_t(\theta,\omega)\right)_{k\ell}$$

on positiivi-semidefiniitti. Tästä seuraa että jos on olemassa minimi piste $\theta_*(t,\omega)$ jolla

$$\theta_*(t,\omega) = \inf_{\theta \in \mathbb{Q}^{d+1}}\big\{\ \varphi_t(\theta,\omega)\big\}$$

$$E_{P^{\theta_*}}(X) = 0$$

Teoreema 2.2.4. *I rahoitusteorian päälause, diskreetti ajassa.*

Malli on arbitraasi vapaa, jos ja vain jos on olemassa todennäköisyysmitta $Q \sim P$ todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ jolla diskontattu osake prosessi $\widetilde{S}_t$ on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali.

Sen lisääksi voidaan valita Q jolla $\frac{dQ}{dP} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ (olennaisesti rajoitettu).

Todistus ($\Longleftarrow$) Olkoon $\widetilde{S}_t^{(i)}(\omega) = S_t^{(i)}(\omega)/S_t^{(0)}(\omega), \quad i = 1, \dots, d$ jossa numerääri $S_t^{(0)}(\omega) > 0\ \forall t$, $(P = 1)$.

Jos $\xi_t = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d)$ on F-ennustettava ja itsensä rahoittava salkku, diskontattu salkun arvo on

$$\widetilde{V}_T = \xi_T\widetilde{S}_T = \xi_0\widetilde{S}_0 + `\sum_{t=1}^{T}\widetilde{S}_t\Delta\xi_t + \sum_{t=1}^{T}\xi_t\Delta\widetilde{S}_t = \widetilde{V}_0 + \big(S_- \cdot \xi\big)_T + \big(\xi \cdot \widetilde{S}\big)_T$$
$$= \widetilde{V}_0 + \big(\xi \cdot \widetilde{S}\big)_T$$

Koska $\big(\xi \cdot \widetilde{S}\big)_t$ on martigaali muunnos jossa integrandi on $\mathbb{F}$-ennustettava ja integraattori on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali, se on lokaali martingaali.

Jos $V_0(\omega) = 0$ ja $V_T(\omega) \geq 0$, myös $\widetilde{V}_0(\omega) = 0$ ja $\widetilde{V}_T(\omega) = \big(\xi \cdot \widetilde{S}\big)_T \geq 0$, ja Shiryaevin lemma seuraa että $\widetilde{V}_t$ on aito martingaali.

Siksi $E_Q\big(\widetilde{V}_T\big) = E_Q\widetilde{(V_0)} = 0$, ja koska $\widetilde{V}_T(\omega) \geq 0$ seuraa että $V_T(\omega) = 0$ Q ja P-todennäköisyydellä 1.

Siis malli on arbitraasivapaa.

Todistuksen toinen suunta ($\Longrightarrow$). Esitän Albert Shiryaevin konstruktiivisen todistuksen, vaihtoehtoisesti voidaan käytää erottavan hypertason lausetta ääretön ulotteisessa normi-avaruudessa.

Olkoon ensin $d = 1$ ja $T = 1$, merkitään $\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t^{(1)} = S_t^{(1)}/S_t^{(0)}$. Oletetaan myös että σ-algebra $\mathcal{F}_0 = \mathcal{N}^P$ on P-triviaali.

Jos malli on arbitraasi vapaa,

$$P(\Delta\widetilde{S}_t > 0) > 0 \text{ ja } P(\Delta\widetilde{S}_t < 0) > 0$$

muuten malli on triviaali eli $P(\Delta\widetilde{S}_t = 0) = 1$ tai jompikumpi

$$\begin{gathered} P(\Delta\widetilde{S}_t \geq 0) = 1 \text{ ja } P(\Delta\widetilde{S}_t > 0) > 0 \\ \text{tai } P(\Delta\widetilde{S}_t < 0) = 1 \text{ ja } P(\Delta\widetilde{S}_t < 0) > 0 \end{gathered}$$

on tosi ja voidaan rakentaa arbitraasi strategia. Esscherin muunnoksen avulla rakennetaa riskineutraali mitta $Q \sim P$ jolla

$$E_Q\big(\Delta\widetilde{S}_1\big) = 0$$

eli tässä tapauksessa $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1)$ on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali.

Olkoon edelleen $d = 1$, mutta käsitellan monijaksoista mallia.

Koska malli on arbitraasi vapaa, todennäköisyydellä $(P = 1)$

$$P(\Delta S_t > 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0 \text{ ja } P(\Delta S_t < 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0$$

ja sama pätee diskontatulle osakeelle $\widetilde{S}_t$. Muuten, positiivisella todennäköisyydellä, joskus

$$P(\Delta S_t \geq 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 1 \text{ ja } P(\Delta S_t > 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0$$

tai

$$P(\Delta S_t \leq 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 1 \text{ ja } P(\Delta S_t < 0|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) > 0$$

ja silloin voitaisiin rakentaa arbitraasistrategiaa, lainaamalla numerääri instrumentteja ja ostamalla osakkeita (tai päinvastoin).

Esscherin muunnoksen avulla löytyy satunnaismuuttuja $\zeta_t(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jolla

$$E_P(\zeta_t \Delta \widetilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 0$$

Tärkemmin, olkoon

$$\varphi(\theta, \omega, t) = E_P\left(\exp\left(-\big(\Delta \widetilde{S}_t\big)^2 + \theta \Delta \widetilde{S}_t \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right)(\omega)$$

Arbitraasivapaus-oletuksesta seuraa että jokaiselle ω:lle on olemassa

$$\theta_*(t, \omega) := \arg\min_\theta \varphi(\theta, \omega, t)$$

ja voidaan osoittaa että se on $\mathcal{F}_{t-1}$ mitallinen. Tämä seuraa koska

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \varphi(\theta, \omega, t) = \inf_{\theta \in \mathbb{Q}} \varphi(\theta, \omega, t)$$

on $\mathcal{F}_{t-1}$ mitallinen, ja jokaiselle ω:lle kuvaus $\theta \mapsto \varphi(\theta, \omega, t)$ on konveksi ja siksi jatkuva (harjoitustehtävä), ja voidaan rakentaa $\mathcal{F}_{t-1}$- mitallinen jono

$$\theta_n(t, \omega) = \arg\min_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k/n, \omega, t)$$

jolla

$$\varphi(\theta_n(\omega, t), \omega, t) \to \inf_{\theta \in \mathbb{Q}} \varphi(\theta, \omega, t) = \varphi_*(t, \omega)$$

Olkoon

$$\zeta_t(\omega) := \exp\left(-\big(\Delta \widetilde{S}_t\big)^2 + \theta \Delta \widetilde{S}_t \right) \varphi(\theta, \omega, t)^{-1}$$

jolla $\zeta_t(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ jolla

$$E_P\big(\zeta_t \big| \mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = 1 \qquad E_P\big(\zeta_t \Delta \widetilde{S}_t \big| \, \mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = 0$$

ja määritellään

$$Z_T(\omega) = \prod_{t=1}^{T} \zeta_t(\omega) > 0$$

ja σ-algebrassa $\mathcal{F}_T$ todennäköisyysmitta $Q \sim P$

$$Q(d\omega) = Z_T(\omega)P(d\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega)P(d\omega)$$

Q on todennäköisyysmitta koska

$$Q(\Omega) = E_P(Z_T) = E_P\left(\prod_{t=1}^{T} \zeta_t(\omega)\right) = E_P\left(\prod_{t=1}^{T} E_P\big(\zeta_t(\omega)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)\right) = 1$$

Huomataan myös että (Z_t) on $(P, \mathbb{F})$-martingaali:

$$E_P\big(Z_t(\omega)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = Z_{t-1}(\omega)E_P\big(\zeta_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = Z_{t-1}$$

Osoitan että $(\widetilde{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ on $(Q, \mathbb{F})$-martingaali: abstraktista Bayesin kaavasta

$$\begin{aligned}
&E_Q\big(\Delta\widetilde{S}_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = \frac{E_P\big(Z_T\Delta\widetilde{S}_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega)}{E_P\big(Z_T\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega)} \\
&= \frac{E_P\big(Z_t\Delta\widetilde{S}_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega)}{Z_{t-1}(\omega)} = E_P\left(\frac{Z_t}{Z_{t-1}}\Delta\widetilde{S}_t\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right)(\omega) = \\
&E_P\big(\zeta_t\Delta\widetilde{S}_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Tapaus jossa $d > 1$ sivutetaan toistaseksi.

Luku 3

Martingaaliesitys ja täydellisuus

Teoreema 3.0.1. *(Aika-diskretti Doob-Meyerin hajotelma).*
Olkoon $(X_t : t \in \mathbb{N})$ $\mathbb{F}$*-sopiva prosessi filtraatiossa* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$.
Ja $E(|X_t|) < \infty \; \forall t = 0, 1, \ldots, T$.
Silloin

- $$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

  jossa $A_0 = M_0 = 0$, A_t *on* $\mathbb{F}$*-ennustettava ja* M_t *on* $\mathbb{F}$*-martingaali.*

- *Doobin hajotelma on yksikäsitteinen.*

- *Jos* (X_t) *on ylimartingaali (vastaavasti alimartingaali) ennustettava osa* A_t *on ei-kasvava (vastaavasti ei-väheneva).*

Todistus

$$\Delta X_t = (\Delta X_t - E_P(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1})) + E_P(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \Delta M_t + \Delta A_t$$

jossa

$$A_t = \sum_{s=1}^{t} E_P(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad M_t = \sum_{s=1}^{t} \big(\Delta X_t - E_P(\Delta X_t | \mathcal{F}_{t-1})\big) \, .$$

Olkoon

$$X_t - X_0 = A_t + M_t$$

toinen Doobin hajotelma.

Silloin $(M_t - M_t) = (A_t - A_t)$ eli $(M_t - M_t)$ on $\mathbb{F}$-ennustettava $\mathbb{F}$-martingaali joka saa arvo 0 kun $t = 0$, eli se on identtisesti nolla.

3.1 Neliö-integroituvat martingaalit ja ennustettava kovariaatio

A $(P, \{\mathcal{F}_t\})$-martingale (M_t) is square integrable when $E(M_t^2) < \infty$ for all t.

If M_t, N_t are square integrable martingales then by using Cauchy-Schwartz inequality

$$E(|M_t N_t|) \leq \sqrt{E(M_t^2)}\sqrt{E(N_t^2)} < \infty$$

so that the product $(M_t N_t)$ is in L^1 and it makes sense to consider its Doob-Meyer decomposition:

We have

$$M_t N_t - M_{t-1}N_{t-1} = M_{t-1}\Delta N_t + N_{t-1}\Delta M_t + \Delta M_t \Delta N_t =$$
$$M_{t-1}\Delta N_t + N_{t-1}\Delta M_t + \big(\Delta M_t \Delta N_t - E_P(\Delta M_t \Delta N_t | \mathcal{F}_{t-1})\big) + E_P(\Delta M_t \Delta N_t | \mathcal{F}_{t-1})$$

We introduce the predictable process

$$\langle M, N \rangle_t := \sum_{s=1}^{t} E_P(\Delta M_s \Delta N_s | \mathcal{F}_{s-1}) \tag{3.1.1}$$

We obtain the Doob-Meyer decomposition

$$M_t N_t = M_0 N_0 + \langle M, N \rangle_t + m_t$$

where dm_t the sum the martingale increments

$$dm_t = M_{t-1}\Delta N_t + N_{t-1}\Delta M_t + \big(\Delta M_t \Delta N_t - E_P(\Delta M_t \Delta N_t | \mathcal{F}_{t-1})\big)$$

where the integrability conditions in the definition of martingale follow from Cauchy-Schwartz inequality since we have assumed M and N are square-integrable.

We denote also

$$[M, N]_t := \sum_{s=1}^{t} \Delta M_s \Delta N_s$$

it follows that the process $([M, N]_t - \langle M, N \rangle_t)$ is a $(P, \{\mathcal{F}_t\})$-martingale.

$[M, N]_t$ is called quadratic covariation or square-bracket process, while $\langle M, N \rangle_t$ is called predictable covariation, or predictable-bracket process.

Since $E((\Delta M_t)_P|\mathcal{F}_{t-1}) \geq 0$, the process $([M,M]_t)$ is a submartingale and therefore $(\langle M,M\rangle_t)$ is non-decreasing. The notations $[M]_t := [M,M]_t$ and $\langle M\rangle_t := \langle M,M\rangle_t$ are also used.

Note $[M,N]_t$ does not depend on the measure P, but the predictable bracket $\langle M,N\rangle_t$ does !

Määritelmä 3.1.1. *Two square integrable martingales $(M_t),(N_t)$ are orthogonal if the product (M_tN_t) is a martingale. Equivalent conditions are*

i) $[M,N]_t$ is a martingale,

ii) $\langle M,N\rangle_t = 0$, which means $E_P(\Delta M_t \Delta N_t|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 0$ P a.s.

3.2 Locally square integrable martingales

By the definition of localization, a $\mathbb{F}$-adapted process is a F-locally square integrable martingale if there is a sequence of stopping times $\tau_n \uparrow \infty$ such that the stopped process $(M_{t\wedge\tau_n} : t \in \mathbb{N})$ is a square integrable martingale for each n. We have the following characterization:

Lemma 3.2.1. *In discrete time $(M_t : t \in \mathbb{N})$ is a $\mathbb{F}$-locally square integrable martingale if and only if $E_P(X_0^2) < \infty$ ja P-almost surely*

$$E_P\big(M_t\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = M_{t-1} \text{ and } \langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t-1} E_P\big(M_t - M_{t-1})^2\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\omega) < \infty, \tag{3.2.1}$$

$$E_P\big((M_t - M_{t-1})^2\big) = E_P\big(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t-1}\big) \in [0,+\infty] \tag{3.2.2}$$

and the locally square integrable martingale M_t is a true square integrable martingale if and only if $E\big(\langle M\rangle_t\big) < \infty$ $\forall t$.

Todistus. If (3.2.1) holds, we can find a localizing sequence by taking

$$\tau_n(\omega) = \inf\big\{\ t : E_P\big(M_{t+1} - M_t)^2\big|\mathcal{F}_t\big)(\omega) > n$$

On the other hand, if $\tau_n \uparrow \infty$ is a localizing sequence for M_t, consider the random sets $A_n = \{\omega : \tau_{n-1}(\omega) < t \leq \tau_n(\omega)\}$, with $\tau_0 = 0$. Then

$$\Delta M_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\big(\tau_{n-1}(\omega) < t \leq \tau_n(\omega)\big)\Delta M_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\big(\tau_{n-1}(\omega) < t \leq \tau_n(\omega)\big)\Delta M_{t\wedge\tau_n}$$

where for a fixed t the event $A_n = \{\ \omega : t \in I_n(\omega)\}$ is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable with $A_n \cap A_m = \emptyset$ for $n \neq m$, and for each ω the sum contains only one nonzero term, and by Fubini we can change the order of the summation and the conditional expectation. Therefore

$$\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_{t-1} = E((\Delta M_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\big(\tau_{n-1}(\omega) < t \le \tau_n(\omega)\big) E((\Delta M_{t \wedge \tau_n})^2 | \, \mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

where by Fubini we can change the order of the summation and the conditional expectation, since

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}\big(\tau_{n-1}(\omega) < t \le \tau_n(\omega)\big) E((\Delta M_{t \wedge \tau_n})^2 | \, \mathcal{F}_{t-1}) < \infty.$$

Note that we cannot conclude that $E((\Delta M_t)^2) < \infty$. □

Huomautus 3.2.1. *By the Cauchy Schwartz inequality the predictable covariation* (3.1.1) *of two $\mathbb{F}$-locally square integrable martingales is well defined.*

Lemma 3.2.2. *If $(H_t : t \in \mathbb{N})$ is $\mathbb{F}$-predictable $(M_t : t \in \mathbb{N})$ and is a $\mathbb{F}$-local martingale, then the martingale transform*

$$(H \cdot M)_t = \sum_{s=1}^{t} H_s \Delta M_s$$

is a $\mathbb{F}$-local square integrable martingale with quadratic variation

$$\big\langle (H \cdot M) \big\rangle_t = \sum_{s=1}^{t} H_s^2 \big(\langle M_s \rangle - \langle M_{s-1} \rangle \big)$$

3.3 Orthogonal projections in the space of locally square integrable martingales

Let M and N two locally square integrable martingales,

We write

$$N_t = N_0 + (H \cdot M)_t + N_t^{\perp} = N_0 + \sum_{s=1}^{t} H_s \Delta M_s + N_t^{\perp} \tag{3.3.1}$$

where (H_t) is the predictable process

$$H_t = \frac{\Delta \langle M, N \rangle_t}{\Delta \langle M, M \rangle_t} = \frac{E_P(\Delta M_t \Delta N_t | \mathcal{F}_{t-1})}{E_P((\Delta M_t)^2 | \mathcal{F}_{t-1})} \tag{3.3.2}$$

where by the Cauchy-Schwartz inequality

$$\Delta\langle M\rangle_t = 0 \Longrightarrow \Delta\langle M,N\rangle_t = 0$$

and in such case we set $0/0=0$ and $N_t^{\perp}$ is a locally square integrable martingale orthogonal to M_t.

We also have

$$E\biggl(\biggl\{\sum_{s=1}^t H_s\Delta M_s\biggr\}^2\biggr) = E\biggl(\sum_{s=1}^t H_s^2\Delta\langle M\rangle_s\biggr) \qquad \text{and}$$
$$E(N_t^2) = E(N_0^2) + E\biggl(\biggl\{\sum_{s=1}^t H_s\Delta M_s\biggr\}^2\biggr) + E\bigl(\{N_t^{\perp}\}^2\bigr) \in [0,+\infty],$$

which are finite if and only if N_t is a (true) square integrable martingale.

Lemma 3.3.1. *In a multivariate situation consider a vector $M_t = (M_t^{(1)},\dots,M_t^{(d)})$, $t\in\mathbb{N}$ with $(P,\mathbb{F})$-locally square integrable martingale components. If $(N_t \in \mathbb{N})$ is another $(P,\mathbb{F})$-locally square integrable martingale, we have the orthogonal decomposition*

$$N_t = N_0 + \sum_{s=1}^t (H_s,\Delta M_s) + N_t^{\perp} = N_0 + \sum_{s=1}^t\sum_{k=1}^d H_s^{(k)}\Delta M_s^{(k)} + N_t^{\perp}$$

where

$$\langle N^{\perp}, M\rangle_t = \sum_{s=1}^t E_P\bigl(\Delta N_t^{\perp}\Delta M_t^{(k)}\big|\mathcal{F}_{t-1}\bigr) = 0 \quad \forall t$$

and

$$H_t = \Bigl(\Delta\langle N,M\rangle_t\Bigr)\Bigl(\Delta\langle M,M\rangle_t\Bigr)^{-1}\Bigl(\Delta\langle N,M\rangle_t\Bigr)^{\top}$$

is $\mathcal{F}_{t-1}$ measurable. Here we used the vector and matrix notations

$$\Bigl(\Delta\langle N,M\rangle_t\Bigr)_k = E_P\bigl(\Delta N_t\Delta M_t^{(k)}\big|\mathcal{F}_{t-1}\bigr), \qquad \textit{and}$$
$$\Bigl(\Delta\langle M,M\rangle_t\Bigr)_{k,\ell} = E_P\bigl(\Delta M_t^{(k)}\Delta M_t^{(\ell)}\big|\mathcal{F}_{t-1}\bigr)\ ,$$

and A^{-1} denotes the matrix inverse. When $\det(A)=0$ and A is not invertible, we understand that $yA^{-1}y^{\top} = yx$ where x is the solution of the linear equation $Ax=y$.

Esimerkki 3.3.1. *We compute linear projections with Bernoulli random variables. Let $\xi_1(\omega) \in \{0,1\}$ be a binary random variable with*

$$P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = 0) = p_1 \in (0,1)$$

and let $M_1(\omega) = \xi_1(\omega) - p_1$.

1. *Any random variable $F(\omega) = f(\xi_1(\omega))$ which is $\sigma(\xi_1)$-measurable can be written exactly as an L^2-projection on the two dimenensional subspace gnerated by $\{ 1, M_1\}$.*

   $$F(\omega) = f(\xi_1(\omega)) = E_p(F) + (f(1) - f(0))(\xi_1(\omega) - p_1)$$

   where $E_P(\xi_1) = E_P(\xi_1^2) = p_1$.

   Consider now random variables $\xi_1(\omega), \dots, \xi_T(\omega)$ with

   $$P(\xi_t = 1|\mathcal{F}_{t-1}) = 1 - P(\xi_t = 0|\mathcal{F}_{t-1}) = p_t = p_t(\xi_1, \dots, \xi_{t-1}) \in (0,1)$$

   where $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_t)$, and p_t is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable.

   We introduce the martingale

   $$M_t = \sum_{s=1}^{t} \big(\xi_s(\omega) - p_s(\omega)\big)$$

   Let $F(\omega) = f(\xi_1, \dots, \xi_T)$. We project the L^2 martingale $E_P(F|\mathcal{F}_t)$ with respect to the L^2-martingale M_t, obtaining

   $$F(\omega) = f(\xi_1, \dots, \xi_T) = E_P(F) +$$
   $$\sum_{t=1}^{T} E_P\big(f(\xi_1, \dots, \xi_{t-1}, 1, \xi_{t+1}, \dots \xi_{t_n}) - f(\xi_1, \dots, \xi_{t-1}, 0, \xi_{t+1}, \dots \xi_{t_n})|\mathcal{F}_{t-1}\big)(\xi_t(\omega) - p_t)$$

3.4 Martingale property and change of measure

Teoreema 3.4.1. *Let $Q \ll P$ and let*

$$Z_t(\omega) = Z_t(Q,P) = \frac{dQ_t}{dP_t}(\omega)$$

Then M_t is a $(Q, \{\mathcal{F}_t\})$-martingale if and only if the product $(M_t Z_t)$ is a $(P, \{\mathcal{F}_t\})$-martingale.

By using a localizing sequence it is also true that M_t is a $(Q, \{\mathcal{F}_t\})$-local martingale if and only if the product $(M_t Z_t)$ is a $(P, \{\mathcal{F}_t\})$-local martingale.

Proof for $s \le t$, let $A \in \mathcal{F}_s$.

$$E_Q(1_A(M_t - M_s)) = E_P(1_A Z_t(M_t - M_s)) = E_P(1_A(Z_t M_t - Z_s M_s))$$

where we use the properties of the conditional expectation. By definition of conditional expectation it means that

$$E_Q(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \text{ if and only if } E_P(Z_t M_t|\mathcal{F}_s) = Z_s M_s$$

3.5 Doob decomposition and change of measure

Suppose that M is a $(P, \mathcal{F}_t)$ martingale with $M_0 = 0$ and $\Delta M_t > -1$.

$$Z_t = \mathcal{E}(M)_t := \prod_{s=1}^{t}(1 + \Delta M_t) = \left(1 + \sum_{s=1}^{t} Z_{s-1}\Delta M_s\right) > 0$$

and we define on each $\mathcal{F}_t$ consistently a measure

$$Q_t(d\omega) = Z_t(\omega) P_t(d\omega)$$

If $(Z_t)_{t=0,1,\dots,T}$ is integrable, then (Z_t) is a P-martingale and $Q_t(\Omega) = E_P(Z_t) = Z_0 = 1$ which is a probability measure.

Esimerkki 3.5.1. *Assume that $\{\xi_t(\omega) : t = 1, \dots, T\}$ are i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ distributed (univariate gaussian with 0 mean and variance 1).*

For a given $\theta \in \mathbb{R}$ Define

$$M_t(\theta) = \sum_{s=1}^{t}\{\exp(\theta\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2) - 1\}$$

This is a martingale with independent increments, and $\Delta M_t > -1$.

Then we set $Z_0(\theta) = 1$ and

$$Z_t(\theta) = \mathcal{E}(M(\theta))_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} Z_{s-1}(\theta)\Delta M_s = \prod_{s=1}^{t}\left(1 + \exp(\theta\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2) - 1\right) =$$
$$\prod_{s=1}^{t}\exp(\theta\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2) = \exp\left(\theta\sum_{s=1}^{t}\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

It follows that $Z_t(\theta)$ is integrable, since under P, the r.v. $\left(\sum_{s=1}^{t}\xi_s\right)$ is gaussian $\mathcal{N}(0,t)$. Since integrability is satisfied, $Z_t(\theta)$ is a P- martingale, which defines a probability measure $dQ_t(\theta) = Z_t(\theta)dP_t$ on $\mathcal{F}_t$.

Assume that M and N are locally square integrable P martingales, $\Delta M_t \geq -1$ and $Z_t = \mathcal{E}(M)_t, t = 1, \dots, T$ with $Z_T \in L^1(P)$ for all t is a a true martingale. By projecting N on M we obtain the orthogonal martingale decomposition

$$N_t = N_0 + (H \cdot M)_t + N_t^{\perp}$$

where H_t is $\mathbb{F}$-predicatable and $N_t^{\perp}$ is a $(\mathbb{F}, P)$-local square integrable martingales with $\langle N^{\perp}, M \rangle_t \equiv 0$.

What happens to the local martingale property of N and M under the new measure ?

Lause 3.5.1. *(Girsanov theorem in discrete time) When*

$$\frac{dP|_{\mathcal{F}_t}}{dQ|_{\mathcal{F}_t}} = Z_t = E_P\big(\frac{dP}{dQ}|\mathcal{F}_t\big) = \mathcal{E}(M)_t$$

where M is a $(P, \mathbb{F})$-locally square integrable martingale such that $\Delta M_t \geq -1$, the Doob decomposition of a $(P, \mathbb{F})$-locally square integrable martingale N under Q is given by

$$N_t = N_0 + \big(H \cdot \langle M, M \rangle\big)_t + \big(H \cdot (M - \langle M, M \rangle)\big)_t + N_t^{\perp}$$

where $(M - \langle M, M \rangle)_t$ is a $(\mathbb{F}, Q)$-local martingale and $N^{\perp}$ is a $\mathbb{F}$-local martingale under both P and Q, and $(H \cdot \langle M, M \rangle)_t$ is a predictable process.

Proof From Bayes' formula of change of measure in conditional expectation,

$$E_Q(\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \frac{E_P(Z_t \Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1})}{E_P(Z_t|\mathcal{F}_{t-1})} = E_P\big(\Delta M_t \frac{Z_t}{Z_{t-1}}\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) =$$
$$E_P\big(\Delta M_t\big(1 + \frac{\Delta Z_t}{Z_{t-1}}\big)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = E_P(\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}) + E_P((\Delta M_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \ 0 \ + \ \Delta\langle M, M \rangle_t$$

which means that $(M_t - \langle M, M \rangle_t)$ is a Q-local martingale.

On the other hand

$$E_Q\big(\Delta N_t^{\perp}\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = E_P\big(\frac{Z_t}{Z_{t-1}}\Delta N_t^{\perp}\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = E_P\big((1 + \Delta M_t)\Delta N_t^{\perp}\big|\mathcal{F}_{t-1}\big)$$
$$= E_P\big(\Delta N_t^{\perp}\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) + E_P\big(\Delta M_t \Delta N_t^{\perp}\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = \langle M, N^{\perp} \rangle_t - \langle M, N^{\perp} \rangle_{t-1} = 0$$

since $N^{\perp}$ and M are orthogonal $(P, \mathbb{F})$-locally square integrable martingales, therefore $N_t^{\perp}$ is a $(Q, \mathbb{F})$-local martingale.

In example 3.5.1, we compute $\langle M(\theta), M(\theta)\rangle_t$, and find the law of (ξ_s) under the probability measure $Q_T(\theta)$.

Recall that the characteristic function of the gaussian distribution $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ is

$$\varphi_X(u) := E_{\mu,\sigma^2}(\exp(iuX)) = \exp\bigl(iu\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\bigr)$$

where $X(\omega)$ is $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$-distributed and i is the imaginary unit.

Now we want to compute the characteristic function of the vector $\xi_1,\dots,\xi_t$ under the measure Q.

We have that for $u=(u_1,\dots,u_t)\in\mathbb{R}^t$

$$E_Q\bigl(\exp(i\sum_{s=1}^t u_s\xi_s)\bigr) = E_P\bigl(Z_t\exp(i\sum_{s=1}^t u_s\xi_s)\bigr) =$$

$$E_P\Biggl(\exp\Bigl(\sum_{s=1}^t (iu_s+\theta)\xi_s - \frac{1}{2}\theta^2 t\Bigr)\Biggr) =$$

$$E_P\Biggl(\exp\Bigl(\sum_{s=1}^t i(u_s-i\theta)\xi_s + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^t (u_s-i\theta)^2\Bigr)\Biggr)\exp\Bigl(\frac{1}{2}\sum_{s=1}^t\{-(u_s-i\theta)^2-\theta^2\}\Bigr) =$$

$$\prod_{s=1}^t E_P\Biggl(\exp\Bigl((u_s-i\theta)\xi_s+\frac{1}{2}(u_s-i\theta)^2\Bigr)\Biggr)\prod_{s=1}^t \exp(i\theta u_s - \frac{1}{2}u_s^2)$$
$$= 1\times E_P(\exp(i(\theta+\xi_s)u_s)$$

this means that the law under Q of ξ_s is the same as the law under P of $(\theta+\xi_s)$, i.e. under Q $(\xi_s : s=1,\dots,t)$ are i.i.d. $\mathcal{N}(\theta,1)$.

3.6 Market completeness

Määritelmä 3.6.1. *Consider the market model with instrument prices $(S_t^{(k)} : t=0,1,\dots T, k=0,1,\dots,d)$, and discounted prices $\widetilde{S}_t^{(k)} = S_t^{(k)}/S_t^{(0)}$ with respect to the numeraire $S_t^{(0)}>0$ P-almost surely. We assume that the initial prices $(S_0^{(k)} : k=1,\dots,d)$ are deterministic. Assuming that the market model is arbitrage-free, there exist an equivalent martingale measure $Q\sim P$ such that $\widetilde{S}_t^{(k)}$, $k=1,\dots,d$ are $(\mathbb{F},Q)$-square integrable martingales.*

We say that the arbitrage free market model is complete if every essentially bounded contingent claim $F(\omega)\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$ can be replicated, as

$$F = (Y_0,S_0) + \bigl(Y\cdot S\bigr)_T = \sum_{k=0}^d Y_0^{(k)}S_0^{(k)} + \sum_{u=1}^t\sum_{k=0}^d Y_u^{(k)}\Delta S_u^{(k)}$$

here the strategy Y is $\mathbb{F}$-predictable and satisfying the self-financing conditions

$$\big((Y_t - Y_{t-1}), S_t\big) = 0, \quad t = 1, \dots, t$$

Note that in this case $c(F) := (Y_0, S_0)$ it the initial price of a self-financing portfolio replicating the contingent claim F, therefore it is unique arbitrage free price of the contingent clain F.

Lemma 3.6.1. *In a complete market, the risk-neutral martingale measure for the stock prices is unique.*

Todistus. Let $Q \sim Q' \sim P$ two equivalent martingale measures such that the discounted stock prices $(\widetilde{S}_t^{(k)} : t = 0, 1 \dots, T, k = 1, \dots, d)$ are $\mathbb{F}$-martingales with respect to both Q and Q'. Consider an event $A \in \mathcal{F}_T$ and the contingent claim $F_n(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$. Since the market is complete by definition

$$\mathbf{1}_A(\omega) = c(A) + \big(Y \cdot S)_T \ .$$

with $c(A) = (Y_0, S_0)$ (scalar product). We define for all $t = 0, 1 \dots, T$ the value process

$$V_t = c(A) + \big(Y \cdot S)_t$$

and the corresponding discounted value process $\widetilde{V}_t = V_t / S_t^{(0)}$ with increments

$$\Delta \widetilde{V}_t = \frac{1}{S_{t-1}^{(0)}} \Delta V_t - \frac{V_t}{S_t^{(0)} S_{t-1}^{(0)}} \Delta S_t^{(0)} = (Y_t, \Delta \widetilde{S}_t) \quad \text{where}$$

$$\widetilde{V}_t = \sum_{k=0}^d Y_t \widetilde{S}_t^{(k)}, \quad \Delta \widetilde{S}_t^{(0)} = 0, \quad \sum_{k=0}^d \widetilde{S}_{t-1}^{(k)} \Delta Y_t^{(k)} = 0, \quad \Delta\left(\frac{1}{S_t^{(0)}}\right) = -\frac{\Delta S_t^{(0)}}{S_t^{(0)} S_{t-1}^{(0)}}, \quad \text{and}$$

$$\Delta \widetilde{S}_t^{(k)} = \Delta\left(\frac{S_t^{(k)}}{S_t^{(0)}}\right) = \frac{1}{S_{t-1}^{(0)}} \Delta S_t^{(k)} - \frac{S_t^{(k)}}{S_t^{(0)} S_{t-1}^{(0)}} \Delta S_t^{(0)}$$

Therefore we have

$$\widetilde{F} = \frac{\mathbf{1}_A}{B_T} = \frac{(Y_0, S_0)}{B_0} + \sum_{s=1} Y_s \Delta \widetilde{S}_t = \widetilde{V}_0 + \sum_{s=1} Y_s \Delta \widetilde{S}_t$$

Since our market completeness assumption concerns bounded contingent claim, we cannot use it directly unless $B_T > 0$ would be bounded from below by a positive constant. Given $n \in \mathbb{N}$ we replace the set A by the set

$A_n = A \cap \{B_T > 1/n\}$. Consider the sequence of bounded contingent claims $F_n(\omega) = \mathbf{1}_{A_n}$ with discounted values

$$0 \le \widetilde{F}_n(\omega) = \frac{1_{A_n}(\omega)}{B_T} \le n \quad \text{and} \quad \widetilde{F}_n \uparrow \frac{\mathbf{1}_A(\omega)}{B_T(\omega)} < \infty$$

Since $\mathbf{1}_{A_n}$ are bounded, by the completeness assumption for each n there exists a replicating portfolio and

$$\frac{F_n(\omega)}{B_T} = \frac{(Y_{0,n}, S_0)}{B_0} + \sum_{s=1}^{T} Y_{s,n} \Delta \widetilde{S}_T.$$

consider the discounted value processes

$$\widetilde{V}_{t,n} = \frac{(Y_{0,n}, S_0)}{B_0} + \sum_{s=1}^{t} Y_{s,n} \Delta \widetilde{S}_t.$$

On the right side we have a martingale transform, which must be a $\mathbb{F}$-local martingale under both risk neutral measures Q and Q'. Since the terminal value is bounded, these local martingales are bounded $\mathbb{F}$-martingales under both Q and Q'. Since a martingale has constant expectation,

$$\widetilde{V}_{0,n} = \frac{(Y_{0,n}, S_0)}{B_0} = E_Q\left(\frac{1_A(\omega)\mathbf{1}(B_T > 1/n)}{B_T}\right) = E_{Q'}\left(\frac{1_A(\omega)\mathbf{1}(B_T > 1/n)}{B_T}\right)$$

and the last two term coincide $\forall A \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. By the monotone convergence theorem as $n \to \infty$

$$E_Q\left(\frac{1_A(\omega)}{B_T}\right) = E_{Q'}\left(\frac{1_A(\omega)}{B_T}\right)$$

and since $0 < B_T < \infty 0$, Q- and Q'-almost surely, this implies that $Q(A) = Q(A') \; \forall A \in \mathcal{F}$ $\square$ $\square$

3.7 Predictable representation property

Let $S_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ be a $(P, \mathbb{F})$-local martingale w.r.t. to a discrete time filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N}\}$, with coordinates bounded from below: $S_t^{(k)}(\omega) > -K$ P-almost surely, $0 < K < \infty$. Without loss of generality we assume that $\mathcal{F}_0 = \mathcal{N}^P$, the σ-algebra containing the $\mathbb{P}$-null sets. All $\mathcal{F}_0$-measurable random variables are P-almost surely equal to deterministic constants.

We say that S has the representation property in the filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, if any bounded $(P, \mathbb{F})$-martingale (N_t) can be represented as a constant plus a martingale transform w.r.t. M

$$N_t = N_0 + (Y \cdot S)_t = X_0 + \sum_{u=1}^{t} Y_u \Delta S_u = X_0 + \sum_{u=1}^{t} \sum_{i=0}^{d} Y_u^{(i)} \Delta S_u(i)$$

by using a $\mathbb{F}$-predictable strategy (Y_t).

Lemma 3.7.1. *Let $(S_t : t \in \mathbb{N})$ be a $(P, \mathbb{F})$-locally square integrable martingale. The properties*

1. *S_t has the predictable representation property (PRP) in the $\mathbb{F}$-filtration,*
2. *the only bounded $(P, \mathbb{F})$-martingales (N_t) which are orthogonal to S_t (which means that $\langle S, N\rangle_t = 0$ and the product $(S_t N_t)$ is a $(P, \mathbb{F})$-local martingale) are constant,*

are equivalent.

Todistus. Assume that the PRP holds for S. Then every bounded martingale N_t has the form $N_t = N_0 + (H \cdot S)_t$. When also $(N_t S_t)$ is a local martingale, necessarily

$$\begin{aligned}&\Delta(S_t N_t) = S_{t-1}\Delta N_t + N_{t-1}\Delta S_t + \Delta S_t \Delta N_t = \\ &(S_{t-1}H_t + N_{t-1})\Delta S_t + H_t(\Delta S_t)^2\end{aligned}$$

This gives a contradiction, since $\forall t$

$$0 = E(\Delta(S_t N_t)|\mathcal{F}_{t-1}) = H_t E((\Delta S_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) = H_t\big(\langle S\rangle_t - \langle S\rangle_{t-1}\big)$$

which implies that $\Delta N_t = H_t \Delta S_t = 0$, and $N_t = N_0$ P-almost surely $\forall t$. For the opposite implication, 2) says that necessarily every bounded $(P, \mathbb{F})$-martingale has the representation

$$N_t = N_0 + (H \cdot S)_t \quad \text{with } \mathbb{F}\text{-predictable} \quad H_t = \frac{\langle S, N\rangle_t - \langle S, N\rangle_{t-1}}{\langle S, S\rangle_t - \langle S, S\rangle_{t-1}}$$

□

Teoreema 3.7.1. *In the discrete time setting, a $(Q, \mathbb{F})$-square integrable martingale $S_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ which non-negative (or bounded from below), has the predictable representation property (PRP) in the filtration $\mathbb{F}$ if and only if there are no other equivalent martingale measures $Q' \sim Q$ .In other words, if $Q' \sim Q$ with likelihood ratio $Z(\omega) = \frac{dQ'}{dQ}(\omega)$ and (S_t) is a also a $(Q', \mathbb{F})$-martingale, necessarily $Q' = Q$.*

Todistus. Without loss of generality we consider the case with $\mathcal{F}_0 = \mathcal{N}^Q = \big\{A \subseteq \Omega : Q(A) \in \{0,1\}\big\}$. Assume that $Q' \sim Q$ and let $Z_t = E_Q\big(\frac{dQ'}{dQ}\big|\mathcal{F}_t\big) > 0$ which is a $(\mathbb{F}, Q)$-martingale with $E_Q(Z_t) = 1$. By the predictable representation property,

$$\Delta Z_t = Z_{t-1} H_t \Delta S_t$$

where H_t is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable.

We show that S_t is not a martingale under Q', unless $H_t = 0\ \forall t$ and $Q' = Q$:

$$\begin{aligned}
&E_{Q'}(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_Q\big(\Delta S_t \frac{Z_t}{Z_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}\big) = E_Q\big(\Delta S_t\big(1 + \frac{\Delta Z_t}{Z_{t-1}}\big)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = \\
&E_Q\big(\Delta S_t\big(1 + H_t \Delta S_t\big)\big|\mathcal{F}_{t-1}\big) = E_Q(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) + E_Q(H_t(\Delta S_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) = \\
&0 + H_t E_Q((\Delta S_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}) \neq 0
\end{aligned}$$

unless $H_t = 0$ Q-a.s. for all t. This means that $Z_t \equiv 1$ for all t and $Q' = Q$.

Viceversa, suppose that the representation property does not hold for S in the filtration $\mathbb{F}$. This means that there is a bounded $(Q, \mathbb{F})$-martingale N with decomposition

$$N_t = N_0 + (H \cdot S)_t + N_t^{\perp}$$

where $N_t^{\perp}$ is an L^2-martingale with $N_0^{\perp} = 0$, $E_Q\big((N_t^{\perp})^2\big) > 0$ and $E_Q(\Delta S_t \Delta N_t^{\perp}|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Note that since by assumption $S_t \geq 0$ that also the increments ΔS_t can be bounded from below as

$$\Delta S_t = S_t - S_{t-1} \geq -S_{t-1}\ .$$

Since by assumption $|N_t| < c < \infty$ Q-almost surely, $|\Delta N_t| < ct$ at each t, and when $H_t \geq 0$ we have

$$\Delta N_t^{\perp} = \Delta N_t - H_t \Delta S_t < ct + H_t S_{t-1}$$

and when $H_t < 0$

$$\Delta N_t^{\perp} = \Delta N_t - H_t \Delta S_t > -c_t + H_t S_{t-1}$$

We define the process M_t with $M_0 = 0$ and increments

$$M_t - M_{t-1} := \frac{-\mathrm{sign}(H_u)}{ct + |H_u| S_{u-1}} \Delta N_u^{\perp} > -1, \quad \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

which is the martingale transform of a predictable and bounded process with respect to the L^2-martingale $N_t^{\perp}$. By construction M_t is a $(Q,\mathbb{F})$-square integrable martingale with $\langle M,S\rangle_t=0$,

Since $\Delta M_t > -1$, we can use it to define the measure Q' on $\mathcal{F}_T$ with likelihood ratio $\frac{dQ'}{dQ}(\omega)=Z_T(\omega)$, where

$$Z_t = E_Q(Z_T|\mathcal{F}_t) = \frac{dQ'_t}{dQ_t} = \mathcal{E}(M)_t = \prod_{s=1}^{t}(1+\Delta M_s) > 0 \quad Q\text{-almost surely}$$

Since

$$Z_t = 1 + \sum_{s=1}^{t} Z_s \Delta M_s > 0$$

is a positive Q-local martingale, it is bounded from below, and in discrete time it follows by Shiryaev Lemma 2.2.5 that Z_t is a true martingale. Consequently Q' is a probability measure, and $Q'\sim Q$ are equivalent since $Z_T>0$. We have that

$$S_t Z_t = S_{t-1}Z_{t-1} + Z_{t-1}(\Delta S_t + \Delta M_t) + Z_{t-1}\Delta M_t \Delta S_t$$

is a Q-local martingale since (S_t) and $(S_t M_t)$ are P-martingales. This means that S_t is a local martingale also under the measure Q', and again by Shiryaev Lemma 2.2.5 it is a true Q'-martingale because it is non-negative. In this way we have constructed another probability measure $Q'\neq Q$, $Q'\sim Q$, such that (S_t) is a Q-martingale. □

Seuraus 3.7.1. *Consider a market model $(S_t^{(k)} : t=0,1,\dots T, k=0,1,\dots,d)$ which is free of arbitrage, where the assets $S_t^{(k)}\geq 0$ are non-negative and the numeraire $S_t^{(0)}>0$ is always strictly positive. Denote by $\widetilde{S}_t^{(k)}=S_t^{(k)}/S_t^{(0)}$ the discounted stock prices. the model is complete if and only if the martingale measure $Q\sim P$ satisfying $E_Q(\widetilde{S}_t^{(k)}|\mathcal{F}_u)=\widetilde{S}_u^{(k)}$ $\forall 0\leq u\leq t\leq T$ is unique.*

Todistus. The $\Longrightarrow$ implication was shown in Lemma 3.6.1. For the $\Longleftarrow$ implication, we have seen that when the market is arbitrage free there is a martingale measur e $Q\sim P$ such that

$$E_Q(\widetilde{S}_t^{(k)}|\mathcal{F}_u) = \widetilde{S}_u^{(k)}, \quad \forall\, 0\leq u\leq t\leq T$$
$$E_Q\big(\exp((\theta,\widetilde{S}_t^{(k)})\big) < \infty \quad \forall\, 0\leq t\leq T,\ \theta\in\mathbb{R}^d.$$

It follows that $\widetilde{S}_t^2$ has all Q-moments and in particular $E_Q(\widetilde{S}_t^2)<\infty$ $\forall t$, which means that $\widetilde{S}_t^{(k)}\geq 0$ are true square integrable $\mathbb{F}$ martingales, and theorem 3.7.1 applies. □

Esimerkki 3.7.1. *Consider a sequence of i.i.d. standard normal random variables* (ξ_t) *on the probability space* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *with the filtration of* σ *algebrae* $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_s : 1 \leq s \leq t)$.

Define $M_t = \sum_{s=1}^{t} \xi_s$. M_t *is a* P*-martingale, since it has independent increments and centered.* M_t *is also square integrable, since the increments are gaussian. Note that* $\mathcal{F}_t = \sigma(M_s : 1 \leq s \leq t)$.

Note that $\eta_t = (\xi_t^2 - 1)$ *are also i.i.d. and centered, and* $N_t = \sum_{s=1}^{t} \eta_s$ *is also a* P*-martingale.*

It follows that the product $(N_t M_t)$ *is a* P*-martingale,m since* $E_P(\xi_t \eta_t) = E_P(\xi_t^3 - \xi_t) = 0$.

The filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ *generated by* (M_t) *contains the* P*-martingale* (N_t) *which is is orthogonal to* (M_t). *Neither* M *or* N *have the predictable representation property.*

We show that there exist an equivalent martingale measure for M. *Note that* $\Delta N_t = (\xi_t^2 - 1) > -1$ P*-almost surely.*

Therefore

$$Z_t = \prod_{s=1}^{t} (1 + \Delta N_t) = 1 + \sum_{s=1}^{t} Z_{s-1} \Delta N_s > 0$$

defines an equivalent probability measure $dQ_t = Z_t dP_t$.

By Girsanov theorem, since $(M_t N_t)$ *is a* P*-martingale it follows that also* $(M_t Z_t)$ *is a* P*-martingale. But this means that* (M_t) *is a* Q*-martingale. So* $Q \sim P$ *but* $Q \neq P$ *is another martingale measure for* P.

In order to construct a bounded $(P, \{\mathcal{F}_t\})$*- martingale we can take the i.i.d. sequence of centered and bounded random variables*

$$\varepsilon_t := (\xi_t^2 \wedge 1) - E_P(\xi_t^2 \wedge 1) \in (-1, 1)$$

It follows that

$$\begin{aligned} &E_P(\xi_t \varepsilon_t) = E_P(\xi_t(\xi_t^2 \wedge 1)) - E_P(\xi_t) E_P(\xi_t^2 \wedge 1) = \\ &E_P(\xi_t \mathbf{1}(|\xi_t| > 1)) + E_P(\xi_t^3 \mathbf{1}(|\xi_t| \leq 1)) + 0 = 0 \end{aligned}$$

since the distribution ξ_t *is symmetric around 0.*

Therefore for any fixed T, *the process stopped at* T

$$X_t^T := \sum_{s=1}^{t \wedge T} \varepsilon_s$$

is a bounded P*-martingale orthogonal to* (M_t).

3.8 Application to hedging : Cox-Ross-Rubinsteinin binomi-puun malli

Consider the finite probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ where $\Omega = \{0,1\}^T$, with $T < \infty$, and $\mathcal{F} = 2^\Omega$, the finite collection of all possible subset, and probability measure satisfies $P(\{\omega\}) > 0$ for all $\omega \in \Omega$.

An history is a vector $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T) \in \Omega$ and denote $\omega^t = (\omega_1, \dots, \omega_t)$ for $t \le T$.

Consider a market with a bank account B_t and a stock price S_t, $t = 0, 1, \dots, T$, adapted to the filtration $\mathbb{F}$ with $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega_s, s \le t)$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$

We assume that there are $\{\mathcal{F}_t\}$-**predictable** processes $U_t(\omega) > R_t(\omega) > D_t(\omega) > -1$. $B_0 > 0$ and $S_0 > 0$ are determistic values, and we let

$$B_t = B_0 \prod_{s=1}^{t} (1 + R_t),$$
$$S_t = S_0 \prod_{s=1}^{t} (1 + D_t + \omega_t(U_t - D_t))$$

Suppose that $G(\omega)$ is a $\mathcal{F}_t$-measurable contingent claim, and we want to find a self-financing hedging strategy (β_t, γ_t) satisfying

$$V_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t = \beta_{t+1} B_t + \gamma_{t+1} S_t \ .$$

We show first that there is an unique probability measure Q such that $Q \sim P$ and the discounted process $\widetilde{S}_t := (S_t / B_t)$ is a Q-martingale.

Once we have shown that Q is the unique martingale measure for $(\widetilde{S}_t)$ in the filtration $\mathbb{F}$, it follows that every $(Q, \mathbb{F})$ martingale (N_t) has the representation as

$$N_t = N_0 + \sum_{u=1}^{t} H_u \Delta \widetilde{S}_u$$

where (H_t) is a $\mathbb{F}$-predictable process. In particular we can take

$$\widetilde{V}_t = E_Q\left(\frac{G}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

and obtain when $t = T$

$$\widetilde{G}(\omega) = \frac{G(\omega)}{B_T} = \widetilde{V}_T = V_0 + \sum_{t=1}^{T} \gamma_t \Delta \widetilde{S}_t$$

where (γ_t) is a $\mathbb{F}$-predictable process.

By using the discete integration by parts formula we obtain the hedging as follows:

$$
\begin{aligned}
V_t &= \widetilde{V}_t B_t = \widetilde{V}_0 B_0 + \sum_{s=1}^{t} B_s \Delta \widetilde{V}_s + \sum_{s=1}^{t} \widetilde{V}_{s-1} \Delta B_s \\
&= V_0 + \sum_{s=1}^{t} B_s \gamma_s \Delta \widetilde{S}_s + \sum_{s=1}^{t} \frac{V_{s-1}}{B_{s-1}} B_{s-1} R_s \\
&= V_0 + \sum_{s=1}^{t} B_s \gamma_s \frac{1}{B_s} \big(S_s - (1+R_s) S_{s-1} \big) + \sum_{s=1}^{t} \big(V_{s-1} - \gamma_s S_{s-1} \big) R_s \\
&= V_0 + \sum_{s=1}^{t} \gamma_s \Delta S_s + \sum_{s=1}^{t} \beta_s \Delta B_s
\end{aligned}
$$

where $\beta_s = (V_{s-1} - \gamma S_{s-1}) B_s^{-1}$. Note that the derivation above also in the case when B_t and R_t are just $\mathbb{F}$-adapted and not necessarily $\mathbb{F}$-predictable.

Note that (γ_s, β_s) is a self-financing and predictable strategy replicating the contingent claim, since for $t = T$.

$$
V_T = G(\omega) = V_0 + (\gamma \cdot S)_T + (\beta \cdot B)_T
$$

Note also that $\widetilde{V}_0 = E_Q\big(\frac{G}{B_T}\big)$, so that $V_0 = \widetilde{V}_0 B_0 = B_0 E_Q\big(\frac{G}{B_T}\big)$ the initial endowment of the replicating strategy, is the unique arbitrage free price.

Next we give an explicit formula for the hedging in the binary market case.

Lets' first compute the martingale measure Q.

$$
\Delta \widetilde{S}_t = \left(\frac{S_t}{B_t} - \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}} \right) = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}} \left(\frac{(1 + D_t + (U_t - D_t)\omega_t)}{(1+R_t)} - 1 \right) =
$$
$$
\frac{S_{t-1}}{B_{t-1}(1+R_t)} \big((U_t - D_t)\omega_t - (D_t - R_t) \big)
$$

Taking conditional expectation with respect to a measure Q, and imposing the martingale property

$$
E_Q(\Delta \widetilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}(1+R_t)} \big((U_t - D_t) E_Q(\omega_t | \mathcal{F}_{t-1}) - (D_t - R_t) \big) = 0
$$

which implies that Q is a martingale measure for $(\widetilde{S}_t)$ if and only if

$$
q_t(\omega^{t-1}) := E_Q(\omega_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{(R_t - D_t)}{(U_t - D_t)},
$$

where $q_t(\omega^{t-1}) \in (0,1)$ is a probability since we have assumed that $D_t < R_t < U_t$, P a.s, and it is uniquely determined. We define globally the unique risk-neutral measure Q as follows:

$$Q(\omega) = \prod_{t=1}^{T} q_t(\omega^{t-1})^{\omega_t}(1 - q_t(\omega^{t-1}))^{1-\omega_t}$$

and note that $Q(\{\omega\}) > 0$ for all $\omega \in \Omega$, therefore $Q \sim P$.

We define the basic Q-martingale

$$M_t = \sum_{s=1}^{t} \big(\omega_s - q_s(\omega^{(s-1)})\big)$$

We write

$$\Delta \widetilde{S}_t = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}(1+R_t)}(U_t - D_t)(\omega_t - q_t(\omega^{(t-1)})) = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}(1+R_t)}(U_t - D_t)\Delta M_t$$

and we can represent ΔM_t in terms of $\Delta \widetilde{S}_t$:

$$\Delta M_t = \frac{B_{t-1}(1+R_t)}{S_{t-1}(U_t - D_t)} \Delta \widetilde{S}_t$$

Next we show how to use the martingale representation property (PRP) to compute the hedging strategy for the contingent claim G. Denote $\widetilde{G}(\omega) = G(\omega)/B_T(\omega)$.

One way to compute the hedging is to compute orthogonal projection in the space of square integrable martingales $\mathcal{M}^2$ of the martingale $E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)$ with respect to the martingale M_t (or $\widetilde{S}_t$).

Määritelmä 3.8.1. *If $X(\omega)$ is a $\mathcal{F}_T$-measurable random variable, we define its discrete Malliavin derivative or stochastic gradient at time t w.r.t ω_t as*

$$\nabla_t X(\omega) := X(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, 1, \omega_{t+1}, \dots \omega_T) - X(\omega_1, \dots, \omega_{t-1}, 0, \omega_{t+1}, \dots \omega_T)\ ,$$

for $1 \le t \le T$.

Note that in general $\nabla_t X(\omega)$ is not $\mathcal{F}_t$ measurable unless the r.v. $X(\omega) = X(\omega^t)$ is $\mathcal{F}_t$-measurable. In such case $\nabla_t X(\omega)$ is also $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable.

In particular the following quantities are $\mathcal{F}_{T-1}$-measurable.

$$\nabla_T \widetilde{G}(\omega^{T-1}) = (\widetilde{G}(\omega^{T-1}, 1) + \widetilde{G}(\omega^{T-1}, 0)) \quad \text{and}$$
$$\nabla_T S_T(\omega^{T-1}) = (S_T(\omega^{T-1}, 1) + S_T(\omega^{T-1}, 0)) = S_{T-1}(U_T(\omega^{T-1}) - D_T(\omega^{T-1}))\ .$$
$$\nabla_T \widetilde{S}_T(\omega^{T-1}) = \frac{1}{B_T} \nabla_T S_T(\omega^{T-1})$$

Note also that

$$\Delta \widetilde{S}_T = (\widetilde{S}_T - \widetilde{S}_{T-1}) = \frac{S_{T-1}}{B_T}(U_T - D_T)(\omega_T - q_T) = \big(\nabla_T \widetilde{S}_T\big)(\omega_T - q_T)$$

so that we can write

$$\Delta M_T = (\omega_T - q_T(\omega^{T-1})) = \frac{1}{\nabla_T \widetilde{S}_T}\Delta \widetilde{S}_T = \frac{B_T}{\nabla_T S_T}\Delta \widetilde{S}_T$$

We have

$$\begin{aligned}
&\widetilde{G}(\omega) = \widetilde{G}(\omega^{T-1}, \omega_T) = \widetilde{G}(\omega^{T-1}, 0) + (\widetilde{G}(\omega^{T-1}, 1) - \widetilde{G}(\omega^{T-1}, 0))\omega_T = \\
&\widetilde{G}(\omega^{T-1}, 0) + \nabla_T \widetilde{G}(\omega^{T-1})\omega_T = \\
&\widetilde{G}(\omega^{T-1}, 0) + \nabla_T \widetilde{G}(\omega^{T-1})q_T + \nabla_T \widetilde{G}(\omega^{T-1})(\omega_T - q_T) = \\
&E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) + \nabla_T \widetilde{G}\ \Delta M_T = E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) + \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T} B_T \Delta \widetilde{S}_T \\
&= E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) + \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T}\Delta S_T - \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T} R_T S_{T-1} \\
&= E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) + \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T}\Delta S_T - \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T}\frac{S_{T-1}}{B_{T-1}}\Delta B_t
\end{aligned}$$

By investing at time $(T-1)$ the value

$$c_{T-1}(G) = E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{T-1}) = \frac{E_Q(G|\mathcal{F}_{T-1})}{1 + R_T}$$

we replicate the contingent claim G as follows: we buy the amount of stocks

$$\gamma_T = \frac{\nabla_T \widetilde{G}}{\nabla_T S_T}$$

at price $\gamma_T S_{T-1}$ (if $\gamma_T < 0$ we short-sell stocks) , if necessary by borrowing from the bank at the predictable interest rate R_T, and buy

$$\beta_T = \frac{1}{B_{T-1}}\bigg(c_{T-1}(G) - \gamma_T S_{T-1}\bigg)$$

bonds at price B_{T-1}.

Remark The martingale measure Q when it is unique gives a device to compute the price and hedging strategy. In fact the price hedging can be computed without using probability, once we have assumed that all histories $\omega \in \Omega$ have positive probability:

A direct way to compute the hedging without using martingales is to solve at time T the system of equations:

$$\begin{aligned} G(\omega^{T-1},0) &= B_T\beta_T + \gamma_T S_{T-1}(1+D_T) \\ G(\omega^{T-1},1) &= B_T\beta_T + \gamma_T S_{T-1}(1+U_T) \end{aligned}$$

By substracting these two equations we get

$$\gamma_T = \frac{\nabla_T G(\omega^{T-1})}{S_{T-1}(U_T - D_T)}$$

and if the two equations with respective weights $(1-q_T(\omega^{T-1}))$ corresponding to $\omega_T = 0$ and $q_T(\omega^{T-1})$ corresponding to $\omega_T = 1$ we obtain

$$\begin{aligned} \beta_T &= \frac{1}{B_T}\big(E_Q(G|\mathcal{F}_{T-1}) - \gamma_T E_Q(S_T|\mathcal{F}_{T-1})\big) \\ &= \frac{1}{B_T}E_Q(G|\mathcal{F}_{T-1}) - \gamma_T \frac{S_{T-1}}{B_{T-1}} \end{aligned}$$

combining these toghether we get the price of the contingent claim at time $(T-1)$:

$$c_{T-1}(G) = \beta_T B_{T-1} + \gamma_T S_{T-1} = \frac{1}{1+R_T} E_Q(G|\mathcal{F}_{T-1})$$

The martingale method has the advantage that it gives a probabilistic interpretation to the price of the contingent claim, which can be computed directly as a Q-expectation.

The other reason is that the martingale method can be extended to the continuous-time setting.

The price and the hedging strategy in the whole time interval $t = 1, \dots, T$, is then obtained by induction:

Let $c_t(G)$ be the price of the contract G at time $t \le T$. This is a $\mathcal{F}_t$-measurable contingent claim. This means that are able to hedge the contingent claim G expiring at time T if and only if at time t we own a portfolio of value $c_t(G)$. By repeating the martingale argument or by writing directly the system of equations we find the price of the contract at time $(t-1)$ $c_{t-1}(G)$ and the replicating portfolio $\beta_t(\omega^{t-1}), \gamma_t(\omega^{t-1})$.

The advantage the martingale method is that enables to compute directly price and replicating strategy at all times t by computing Q-expectations.

The predictable representation property of the Q-martingale M gives

Teoreema 3.8.1. *Discrete Clarck-Ocone formula:*

$$E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega) = E_Q(\widetilde{G}) + \sum_{s=1}^{t} \nabla_s E_Q(\widetilde{G}(\omega)|\mathcal{F}_s)\big(\omega_s - q_s(\omega^{s-1})\big)$$
$$= E_Q(\widetilde{G}) + \sum_{u=1}^{t} \frac{\nabla_u E_Q(\widetilde{G}(\omega)|\mathcal{F}_u)}{\nabla_u \widetilde{S}_u}\, \Delta \widetilde{S}_u$$

where by definition $\nabla_t E_Q(\widetilde{G}(\omega)|\mathcal{F}_t)$ is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable.

We set

$$\gamma_t = \frac{\nabla_t E_Q(\widetilde{G}(\omega)|\mathcal{F}_t)}{\nabla_t S_t}$$

By usiong integration by parts we obtain as before

$$V_t = V_{t-1} + \gamma_t \Delta S_t + \beta_t \Delta B_t$$

where

$$\beta_t = \left(\frac{E_Q(G|\mathcal{F}_{t-1})}{1+R_t} - \gamma_t S_{t-1}\right)\frac{1}{B_{t-1}}$$

In order to have $V_t = B_t E_Q(G\frac{G}{B_T}|\mathcal{F}_t)$ in our portfolio at time t we need to invest the amount

$$B_{t-1} E_Q(\frac{G}{B_T}|\mathcal{F}_{t-1}) \quad \text{at time } (t-1)\ .$$

Inductively , to have $G = B_T E_Q(\frac{G}{B_T}|\mathcal{F}_T)$ at time T we have to invest at time $s \le T$ the amount

$$c_t(G) = B_t E_Q\big(\frac{G}{B_T}\big|\mathcal{F}_t\big)$$

at time t.

The hedging at time $(t-1)$ is given by

$$\gamma_t = \frac{\nabla_t\Big(B_t E_Q(\frac{G(\omega)}{B_T}|\mathcal{F}_t)\Big)}{\nabla_t S_t} = \frac{\nabla_t c_t(G)}{\nabla_t S_t},$$
$$\beta_t = \Big(c_{t-1}(G) - \gamma_t S_{t-1}\Big)\frac{1}{B_{t-1}}$$

giving

$$V_t = c_t(G) = c_0(G) + \sum_{u=1}^{t} \big(\gamma_u \Delta B_u + \beta_u \Delta B_u\big)$$
$$V_T = G = c_0(G) + \sum_{u=1}^{T} \big(\gamma_u \Delta B_u + \beta_u \Delta B_u\big)$$

When R_t is deterministic, we can take the discounting factors B_t/B_T outside the conditional expectation.

If (D_t, R_t, U_t) are all deterministic, then under the martingale measure Q the random variables ω_t is independent from the past. Then the computation of the hedging strategy may be simplified by using the following formula:

Seuraus 3.8.1. *If (D_t, R_t, U_t) are deterministic at all $t \le T$, conditional expectation and gradient commute in Ito-Clarck formula*

$$\nabla_t E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t) = E_Q(\nabla_t \widetilde{G}|\mathcal{F}_t)$$

giving

$$E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega) = E_Q(\widetilde{G}) + \sum_{s=1}^{t} E_Q(\nabla_s \widetilde{G}|\mathcal{F}_s)\big(\omega_s - q_s(\omega^{s-1})\big) \ .$$

Todistus. When $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T)$ we denote $\omega^{t,T}$ the vector $(\omega_t, \ldots, \omega_T)$.

Using the independence of the r.v. (ω_t),

$$E_Q(\nabla_t \widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega^t) = \sum_{\omega^{t+1,T} \in \{0,1\}^{T-t}} \big\{\widetilde{G}(\omega^{t-1}, 1, \omega^{t+1,T}) - \widetilde{G}(\omega^{t-1}, 0, \omega^{t+1,T})\big\} Q(\omega^{t+1,T})$$
$$= \nabla_t E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega^t)$$

which is $\mathcal{F}_{t-1}$-measurable. □

Note that in general when the ω_t are not Q-independent we have

$$E_Q(\nabla_t \widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega^t) = \sum_{\omega^{t+1,T}\in\{0,1\}^{T-t}} \big\{\widetilde{G}(\omega^{t-1},1,\omega^{t+1,T}) - \widetilde{G}(\omega^{t-1},0,\omega^{t+1,T})\big\} Q(\omega^{t+1,T}|\omega^t)$$
$$\neq E_Q(\nabla_t \widetilde{G}|\mathcal{F}_{t-1})(\omega^{t-1}) =$$
$$\sum_{\omega^{t+1,T}\in\{0,1\}^{T-t}} \big\{\widetilde{G}(\omega^{t-1},1,\omega^{t+1,T}) - \widetilde{G}(\omega^{t-1},0,\omega^{t+1,T})\big\} Q(\omega^{t+1,T}|\omega^{t-1})$$
$$\neq \nabla_t E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_t)(\omega^t) = \nabla_t E_Q(\widetilde{G}|\mathcal{F}_{t-1})(\omega^{t-1})$$
$$= \sum_{\omega^{t+1,T}\in\{0,1\}^{T-t}} \big\{\widetilde{G}(\omega^{t-1},1,\omega^{t+1,T}) Q(\omega^{t+1,T}|\omega^{t-1},\omega_t=1)$$
$$- \sum_{\omega^{t+1,T}\in\{0,1\}^{T-t}} \widetilde{G}(\omega^{t-1},0,\omega^{t+1,T}) Q(\omega^{t+1,T}|\omega^{t-1},\omega_t=0)\big\}$$

Esimerkki 3.8.1. *Assume that $R_t = r, U_t = u, D_t = d$ deterministic, with $-1 < d < r < u$. Then $q_t = q = (r-d)/(u-d)$ is constant. We have that*

$$S_t = S_0(1+u)^{N_t}(1+d)^{t-N_t}$$

where $N_t = \sum_{s=1}^{t} \omega_s$.

Then if $G(\omega) = \varphi(S_T)$ is a plain european option, we compute the price at time $t = 0$ using the distribution Binomial(q, T).

$$V_0 = c_0(G) = B_0 E_Q(\varphi(S_T)/B_T) =$$
$$(1+r)^{-T} \sum_{n=0}^{T} \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \varphi\big(S_0(1+u)^n(1+d)^{T-n}\big) .$$

Similarly since the conditional distribution of $(N_T - N_t)$ given $\mathcal{F}_t$ is Binomial$(q, T-t)$, at time t the price of the replicating portfolio is

$$V_t = c_t(G) = B_t E_Q(\varphi(S_T)/B_T|\mathcal{F}_t) =$$
$$(1+r)^{t-T} \sum_{n=0}^{T-t} \binom{T-t}{n} q^n (1-q)^{T-t-n} \varphi\big(S_0(1+u)^{N_t+n}(1+d)^{T-N_t-n}\big) .$$

with this amount of money, we invest in γ_{t+1} stocks and invest the rest in *the bank account, with*

$$\gamma_{t+1} = \frac{\nabla_{t+1} c_{t+1}(G)}{\nabla_{t+1} S_{t+1}} = (1+r)^{t+1-T} \frac{E_Q(\nabla_{t+1} G|\mathcal{F}_t)}{S_t(u-d)} =$$
$$(1+r)^{t+1-T} \frac{1}{S_t(u-d)} \sum_{n=0}^{T-t-2} \left\{ \binom{T-t-2}{n} q^n (1-q)^{T-t-2-n} \times \right.$$
$$\left. \times \Big(\varphi\big(S_0(1+u)^{N_t+n+1}(1+d)^{T-N_t-n-2}\big) - \varphi\big(S_0(1+u)^{N_t+n}(1+d)^{T-N_t-n-1}\big) \Big) \right\}$$

Luku 4

Complements on American option

For the american option with (discounted) face value $(F_t : t = 0, 1, \dots, T)$, the value is given by $U_T = F_T$ and by dynamic programming

$$U_t = \max\bigl\{F_t, E_Q(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\bigr\} \quad t < T$$

We have

$$U_t = E_Q(U_{t+1}|\mathcal{F}_t) + \bigl(F_t - E_Q(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\bigr)^+$$

which leads to the Doob decomposition $t < T$

$$U_{t+1} - U_t = \underbrace{\Bigl(U_{t+1} - E_Q(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\Bigr)}_{\Delta M_{t+1}} - \underbrace{\Bigl(F_t - E_Q(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\Bigr)}_{\Delta A_{t+1}} \tag{4.0.1}$$

so that $U_t = U_0 + M_t - A_t$ where $M_0 = A_0 = 0$, M_t is a martingale and A is $\mathbb{F}$-predictable.

4.1 Dual representation

Lemma 4.1.1. *(Doob optional stopping): if M_t is a $(\mathbb{F}, Q)$- martingale and $\tau(\omega) \le T$ is a bounded stopping time, then $E_Q\bigl(M_\tau\bigr) = E_Q(M_0)$.*

Proof The stopped process $(M_{t\wedge\tau} : t \le T)$ is a $(\mathbb{F}, Q)$-martingale. Therefore it has constant expectation, and for $t = T$ we get the result.

Let $\mathcal{T}_t = \bigl\{\tau\ \mathbb{F}\text{-stopping time with } t \le \tau \le T\bigr\}$. Note that if (N_t) is a martingale with $E_Q(N_0) = 0$

$$U_t := \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t}\bigl\{\ E_Q\bigl(F_\tau\big|\ \mathcal{F}_t\bigr)\bigr\} = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_t}\bigl\{\ E_Q\bigl(F_\tau - N_\tau\big|\ \mathcal{F}_t\bigr)\bigr\} \le\ E_Q\biggl(\sup_{t\le u\le T}\{\ F_u - N_u\}\bigg|\ \mathcal{F}_t\biggr)$$

Therefore

$$U_t := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \Big\{ E_Q\big(F_\tau \big| \mathcal{F}_t\big)\Big\} \le \inf_{N \text{ martingale with } N_0 = 0} E_Q\left(\sup_{t \le u \le T} \{ F_u - M_u\} \middle| \mathcal{F}_t \right) \tag{4.1.1}$$

In fact by using the Doob decomposition (4.0.1) we can show that the infimum is attained by choosing $N_t = M_t = A_t + U_t - U_0$, the Doob decomposition and the inequality (4.1.1) in fact is an equality.

$$U_t := \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \Big\{ E_Q\big(F_\tau \big| \mathcal{F}_t\big)\Big\} = \inf_{N \text{ martingale with } N_0=0} E_Q\left(\sup_{t \le u \le T} \{ F_u - N_u\} \middle| \mathcal{F}_t \right) \tag{4.1.2}$$

Lemma 4.1.2.

$$U_t = \tag{4.1.3}$$
$$\max\Big\{F_t, F_{t+1} - \Delta M_{t+1}, F_{t+2} - \Delta M_{t+2} - \Delta M_{t+1}, \dots, \tag{4.1.4}$$
$$\dots, F_T - \Delta M_T - \Delta M_{T_1} - \dots - \Delta M_{t+1}\Big\} \tag{4.1.5}$$

Proof: By backward induction. (4.1.3) holds at $t = T$ since $F_T = U_T$. Assuming that it holds at time $t < T$, we have

$$\begin{aligned}
&U_{t-1} = \\
&\max\Big\{F_{t-1}, E_Q(U_t|\mathcal{F}_{t-1}\Big\} = \max\Big\{F_{t-1}, U_t - \Delta M_t\Big\} = \\
&\max\Big\{F_{t-1}, F_t - \Delta M_t, F_{t+1} - \Delta M_{t+1}, F_{t+2} - \Delta M_{t+2} - \Delta M_{t+1}, \dots \\
&\dots, F_T - \Delta M_T - \Delta M_{T_1} - \dots - \Delta M_{t+1}\Big\}
\end{aligned}$$

Luku 5

Kohti jatkuvan ajan markkinamallia

Määritellään seuraavasti binomipuumallien jono:

Jaetaan aikäväli $[0, T]$ tasaisesti hilapisteillä Tk/N, jossa $k = 0, 1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N}$. Olkoon

- $r_N > -1$ deterministinen jono jolla kun $N \to \infty$, $r_N \to 0$ ja $(1 + r_N)^N \to \exp(rT)$. Esimerkiksi $r_N = r/N$.
- $B_k^{(N)} = (1+r_N)^k B_0^{(N)}$ $k = 0, \ldots, N$ on riskitön numerääri, jossa $B_0^{(N)} = 1$.
- $-1 < D_N < r_N < U_N$ ovat deterministisia jonoja jossa $D_N, U_N \to 0$.
- Olkoon $S_k^{(N)}$ $k = 0, \ldots, N$ osake, tuotolla

  $$R_k^{(N)} = \frac{S_k^{(N)} - S_{k-1}^{(N)}}{S_{k-1}^{(N)}}$$

  Oletamme että referenssi todennäköisyyden P:n suhteen

  $$-1 < D^{(N)} \leq R_k^{(N)}(\omega) \leq U^{(N)} \qquad (P = 1)$$

  Merkitään myös diskontattu osakeprosessi $\widetilde{S}_k^{(N)} = S_k^{(N)}/B_k^{(N)}$.

  Oletamme että on olemassa riskineutraali todennäköisyysmitta Q (joka on yksikäsitteinen kun $R_k^{(N)}$ ehdollisen jakauman supporti on kahden pisteen joukko),

  $$E_Q\big(\widetilde{S}_k^{(N)} |\, \mathcal{F}_{k-1}^{(N)}\big) = \widetilde{S}_{k-1}^{(N)}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

jossa $\mathcal{F}_k^{(N)} = \sigma(S_1^{(N)}, \dots, S_k^{(N)})$.

Oletamme sen lisääksi että Q:n suhteen tuotot $R_k^{(N)}$ ovat riippumattomia, ja ja toteuttavat

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Var}_Q(R_k^{(N)}) \longrightarrow \sigma^2 \in (0,\infty) \quad \text{kun } N \to \infty$$

Teoreema 5.0.1. *Näillä oletuksilla $S_N^{(N)}(\omega)$ jakauman riskineutraali mitan Q:n suhteen suppenee kohti log-normaalista jakaumaa, eli jakauman mielessä kohti*

$$S_0 \exp\Big(G\sigma\sqrt{T} + \big(r - \frac{1}{2}\sigma^2\big)T\Big)$$

jossa $G(\omega)$ gaussinen $E(G) = 0$, $E(G^2) = 1$.

Määritelmä 5.0.1. *Olkoon jokaiselle $N \in \mathbb{N}$, $X^{(N)}$ satunnaimuuttuja todennäköisyysavaruudella $(\Omega^{(N)}, \mathcal{F}^{(N)}, P^{(N)})$, ja X satunnaimuuttuja todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, Satunnaismuuttujen jono $X^{(N)}(\omega)$ suppenee jakauman mielessä kohti satunnaismuuttujan X:n jakaumaa, kun kakille jatkuville ja rajoitetuille testifunktiolle $f(x)$*

$$E_{P^{(N)}}\big(f(X^{(N)})\big) \longrightarrow E_P\big(f(X)\big)$$

Lemma 5.0.1. *Keskeinen raja-arvo lause: Olkoon kakille $N \in \mathbb{N}$ $(\xi_k^{(N)} : k = 1, \dots, N)$ $P^{(N)}$-riippumattomien satunnaismuuttujen jono, jolla*

- $\mu^{(N)} := \sum_{k=1}^{N} E_{P^{(N)}}(\xi_k^{(N)}) \longrightarrow \mu$
- $\big(\sigma^{(N)}\big)^2 := \sum_{k=1}^{N} Var_{P^{(N)}}(\xi_k^{(N)}) \longrightarrow \sigma^2 \in (0,\infty)$
- $|\xi_k^{(N)}(\omega)| \le c^{(N)} \longrightarrow 0$

jossa $c^{(N)}$ on deterministinen jono.

Silloin

$$X^{(N)} := \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{(N)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Big(\mu + G(\omega)\sqrt{\sigma}\Big)$$

jossa konvergenssi on jakauman mielessä ja $G \sim \mathcal{N}(0,1)$ (standardi gaussinen)

Lauseen todistus Taylorin kehitelmä

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(1+\xi)^2}\right)x^2 =$$
$$x + \frac{1}{2}\frac{d^2\log(1+x)}{dx^2}\bigg|_{x=\xi} x^2 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+\xi^2}x^2$$

jossa $\xi = \xi(x)$, $0 \le \xi \le x$ vai $-1 < x \le \xi \le 0$.

Tästä seuraa $\forall d \le x \le u$,
$\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+\xi^2}x^2 \le \Delta(d,u) := d^2 \vee u^2 \longrightarrow 0$ kun $d,u \longrightarrow 0$. ja kun $t \in [0,T]$,

$$\log(S^{(N)}_{\lfloor Nt/T\rfloor}) = \log(S_0) + \sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} \log(1+R_k^{(N)})$$
$$\log(S^{(N)}_{\lfloor Nt/T\rfloor}) = \log(S_0) + \sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} \left(R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2\right) + O(|u^{(N)}| \vee |d^{(N)}|\ ) \sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} (R_k^{(N)})^2$$

Nyt

$$E_{Q^{(N)}}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor}(R_k^{(N)})^2\right) = (r^{(N)})^2\lfloor Nt/T\rfloor + \sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor}\mathrm{Var}(R_k^{(N)}) = \frac{r^2Tt}{N} + (\sigma^{(N)})^2\frac{t}{T} + o(1) \to \sigma^2\frac{t}{T}$$
$$\sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} E_{Q^{(N)}}\left(\log(S_k^{(N)})\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} E_{Q^{(N)}}\left(\left(R_k^{(N)} - \frac{1}{2}(R_k^{(N)})^2\right)\right) + o(1) = rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t/T + o(1)$$
$$\sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} \mathrm{Var}_{Q^{(N)}}\left(\log(S_k^{(N)})\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} E_{Q^{(N)}}\left(\left\{\log(S_k^{(N)})\right\}^2\right) - \sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} E_{Q^{(N)}}\left(\log(S_k^{(N)})\right)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{\lfloor Nt/T\rfloor} E_{Q^{(N)}}\left(\left(R_k^{(N)}\right)^2\right) + o(1) \to \sigma^2\frac{t}{T}$$

and the result follows by applying the central limit theorem 5.0.1 □

5.1 Jatkuva aika, integrointi ja arbitraasi

Olkoon $(S_t : t \in \mathbb{R}^+)$ osake prosessi, numeräärillä $B_t \equiv 1$. Olkoon $f(x)$ jolla on olemassa derivaatta $f'(x)$ melkein kaikilla x

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(y)dy$$

Silloin Jos $t \mapsto X_t$ on ja ei-vähenevä

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{X_0}^{X_t} f'(u)du = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s$$

Esimerkiksi kun $f(x) = (t-a)^+$, $f'(x) = \mathbf{1}(x > a)$

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{X_0}^{X_t} \mathbf{1}(u > a)du = f(X_0) + 0^t \mathbf{1}(X_s > a)dX_s$$

$$(S_T - k)^+ = (S_0 - k)^+ + \int_0^T \mathbf{1}(S_t \geq k)dS_t$$

Luku 6

Korkorakenne mallit

Käsittelemme markkinamalli jossa on käytettävissä ainoastaan yksi riskitön instrumentti

$$B_t = B_0 \exp\left(\int\limits_0^t r(s) ds \right) \text{ jolla } dB(t) = B(t) r(t) dt \ ,$$

jossa *lyhyt korko* $r(s)$ on stokastinen prosessi ja $Q \sim P$ riskineutraali hinnoitelumitta optioille. Referenssina on "objektiivinen" todennäköisyys P.

Tässä $r(t, \omega)$ on $\mathbb{F}$-sopiva stokastinen prosessi, joka kutsutaan lyhyeksikoroksi (short rate). Kun $F(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, option hinta hetkellä $0 \leq t \leq T$ on

$$c_t(F) = E_Q\left(F \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right) = E_Q\left(F \exp\left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Tarkastellään sopimus $F(\omega) \equiv 1$ joka maksaa 1€ lunastushetkellä T.Selläisiä sopimuksia kutsutaan *obligaatioksi, velkakirjaksi* tai *bondiksi.* Hetkellä t obligaatiolla on hinta

$$p(t, T) = E_Q\left(\exp\left\{ - \int_t^T r(s) ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

Huomataan että $p(t, t) \equiv 1, \ \forall t$

Huomataan vielä että kyseinen markkinamalli on epätäydellinen, koska pelkästään riskitön instrumentti B_t on käytettävissä. Kun otetaan numerääriksi B_t, seuraa $\widetilde{B}_t := \big(B_t / B_t \big) \equiv 1$ on martingaali jokaisen todennäköisyyden $Q \sim P$: suhteen. Tulkitsemme että markkinat valitsevat hinnoittelumittaa $Q \sim P$. Jos P tulkitaan objetiiviseksi todennäköisyysmitaksi koron $r(t)$

aika-kehitykselle, Q poikkea siitä koska sisältää myös riskin markkinahinta (market price of risk), joka kertoo markkinoiden riksinoton halukkuusesta. Esimerkiksi, kun markkinat olisivat riski-averseja, riskinotosta joudutaan maksaa premiumia, ja siksi

$$p(t,T) = E_Q\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right)\right) \le E_P\left(\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

Märitellään obligaation spot-korko maturiteetilla T:

$$r(t,T) := -\frac{\log p(t,T)}{T-t} = \frac{\log p(t,t) - \log p(t,T)}{T-t}$$

Huomataan myös että

$$r(t,t) = \lim_{T\downarrow t} r(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log p(t,T)\bigg|_{T=0} = \lim_{T\downarrow t}\frac{1}{T-t}E_Q\left(\int_t^T r(s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right) =$$
$$E_Q\left(\lim_{T\downarrow t}\frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds\middle|\mathcal{F}_t\right) = r(t)$$

Määritellään obligaation etuperäinen korko (forward rate)

$$f(t,T) := -\frac{\partial}{\partial T}\log p(t,T)$$

josta seuraa $f(t,t) = r(t)$.

Määritelmästä seuraa suoraan

$$p(t,T) = p(t,t)\exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right)$$

Käsitellään diskontattu obligaatio numeräärilla B_t:

$$\widetilde{p}(t,T) := \frac{p(t,T)}{B_t} = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)E_Q\left(\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)$$
$$= E_Q\left(\exp\left(-\int_0^T r(u)du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

joka on automaattisesti $(\mathcal{F}_t)$-martingaali hinnoitelumitan Q:n suhteen.

Oletamme että $W_t = (W_t^{(1)},\dots,W_t^{(d)})$ on d-ulotteinen Brownin liike hinnoitteilu mitan Q suhteen riippumattomilla komponentteilla, joka virittää filtraatiota $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \ge 0)$. Huomataan että kun $r(u) \ge 0$,

$$\widetilde{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{B_T(\omega)} = \frac{1}{B_T(\omega)} = \exp\left(-\int_0^T r(u)du\right) \in (0,1]\ ,$$

muuten oletamme $\widetilde{F} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, Q)$.

Koska Brownin liikkeen filtraatiolla on martingaalin esitylksen ominaisuus on olemassa prosessi

$$H_s(\omega) = \big(H_s^{(1)}(\omega), \ldots, H_s^{(d)}(\omega)\big) \in L_a^2(\Omega \times [0,T], Q(d\omega) \times dt; \mathbb{R}^d)$$

jolla

$$\widetilde{p}(t,T) = \widetilde{p}(0,T) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H^{(i)}(s,T) dW_s^{(i)} = \widetilde{p}(0,T) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \widetilde{p}(s,T)\sigma^{(i)}(s,T) dW_s^{(i)}$$

jossa

$$\sigma_s^{(i)} = \frac{H^{(i)}(s,T)}{\widetilde{p}(s,T)}$$

on hyvin määritelty koska $\widetilde{p}(s,T) > 0$. Jokaisella kiinteällä $T > 0$ $t \mapsto \widetilde{p}(t,T)$ on lineaarisen stokastisen differentiaaliyhtälön ratkaisu, ja siksi stokastisen eksponentiaalisen muotoinen:

$$\widetilde{p}(t,T) = \widetilde{p}(0,T) \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma^{(i)}(s,T) dW_s^{(i)} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \big(\sigma^{(i)}(s,T)\big)^2 ds \right)$$

Seuraa osittaisintegroinnilla

$$p(t,T) = \widetilde{p}(t,T) \exp\left(\int_0^t r(s) ds \right) = p(0,T) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t p(s,T)\sigma^{(i)}(s,T) dW_s^{(i)} + \int_0^t p(s,T) r(s) ds$$

ja ratkaisemalla lineaarista stokastista differentiaaliyhtälöä

$$p(t,T) = p(0,T) \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma^{(i)}(s,T) dW_s^{(i)} + \int_0^t \left\{ r(s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sigma^{(i)}(s,T)^2 \right\} ds \right)$$

Tästä saan stokastisen integraalin esitykesen etuperäisille koroille

$$\begin{aligned} f(t,T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \log p(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log p(0,T) \\ -\frac{\partial}{\partial T} &\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma^{(i)}(s,T) dW_s^{(i)} - \frac{\partial}{\partial T} \int_0^t \left\{ r(s) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sigma^{(i)}(s,T)^2 \right\} ds \\ &= f(0,T) - \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial T}^{(i)}(s,T) dW_s^{(i)} + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma^{(i)}(s,T) \frac{\partial \sigma}{\partial T}^{(i)}(s,T) ds \end{aligned}$$

Voidaan myös mallintaa suoraan etuperäisia korkoja $f(t,T)$ seuraavasti:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t b(s,T)ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t a^{(i)}(s,T)dW_s^{(i)}, \quad \forall T > 0.$$

jossa $\forall T$, $b(s,T), a^{(i)}(s,T)$ ovat sopivia prosesseja. Arbitraasivapaus ehto rajoittaa prosessien $b(s,T), a^{(i)}(s,T)$ valintaa, koska

$$\widetilde{p}(t,T) = \exp\Big(- \int_t^T f(t,u)du - \int_0^t r(s)ds \Big)$$

pitää olla Q martingaali aikaparametrilla t, jokaiselle $T > 0$.

Merkitään

$$X(t,T) = \int_t^T f(t,u)du$$

ja lasketaan sen stokastisen differentiaali $d_t X(t,T)$ (aikaparametrin t:n suhteen).

Saadaan

$$\int_t^T f(t,u)du - \int_0^T f(0,u)du =$$
$$- \int_0^t f(u,u)ds + \int_0^t \Big(\int_s^T b(s,u)du \Big) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \Big(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du \Big) dW_s^{(i)}$$

jossa vaihdettiin integroinnin järjestyssä. Stokastisen Fubinin lauseen perustella se on sallittu kun jompikumpi stokastinen integraali on olemassa $L^2(P)$-mielessä.

Nyt käytetään martingaalin ehtoa: osittaisintegroinnilla ja Iton kaavan perusteella, koska $f(s,s) = r(s)$,

$$\widetilde{p}(t,T) = \exp\Big(-X(t,T) - \int_0^t r(s)ds \Big) = \widetilde{p}(0,T) - \int_0^t \widetilde{p}(s,T) r(s)ds$$
$$- \int_0^t \widetilde{p}(s,T) d_s X(s,T) + \frac{1}{2} \int_0^t \widetilde{p}(s,T) d[X(\cdot,T), X(\cdot,T)]_s$$
$$= \widetilde{p}(0,T) + \int_0^t \widetilde{p}(s,T) \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \Big(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du \Big)^2 - \int_s^T b(s,u)du \Big\} ds$$
$$- \sum_{i=1}^d \int_0^t \widetilde{p}(s,T) \Big(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du \Big) dW_s^{(i)}$$

jossa $\widetilde{p}(0,T) = p(0,T)$. Koska $\widetilde{p}(t,T)$ on Q-martingaali,

$$\int_s^T b(s,u)du = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du\right)^2 \quad \forall s,T$$

Derivoimalla T:n suhteen saadaan Heath-Morton-Jarrow ehdot:

$$b(s,T) = \sum_{i=1}^{d} a^{(i)}(s,T)\left(\int_s^T a^{(i)}(s,u)du\right) \quad \forall s,T$$

Eli volatiliteetti vektori $a(s,T)$ määärä driftia $b(s,T)$. Nämä tulokset pätevät myös kun riippumattomien Brownin liikkeiden määrä on $d = +\infty$.