HY Johdatus matemaattiseen rahoitusteoriaan I, Harjoitus-3 (10.02.2016)

1. Markkinamallissa on rahoitusinstrumentteja $S_t^{(k)}(\omega)$, $t = 0,1$, $k = 0,1,\dots,d$, alkuhinnoilla $\pi^{(k)} = S_0^{(k)}$, jossa $\mathbb{P}(S_1^{(k)} \geq 0) = 1$ ja numerääri $S_t^{(0)} > 0$ on deterministinen.

   Rahoitus instrumenttin *tuotto* (englanniksi *return*) on satunnaismuuttuja

   $$R(S^{(k)}) = \frac{S_1^{(k)} - S_0^{(k)}}{S_0^{(k)}}$$

   Osoita että todennäköisyysmitta Q on riksineutraali jos ja vain jos Q:n suhteen kaikilla instrumentilla on samoja tuoton odotuksia eli

   $$E_Q\big(R(S^{(k)})\big) = E_Q\big(R(S^{(0)})\big) \quad \forall k = 1,\dots,d$$

2. Todennäköisyysavaruudella $(\Omega,\mathcal{F})$ jossa P on referenssi todennäköisyysmitta, Olkoon $V_t(\omega) \geq 0$, ja $B_t = (1+r)^t B_0 > 0, \quad t = 0,1$ rahoitusinstrumentteja yhden perioodin arbitraasivapaassa markkinamallissa, ja $Q \sim P$ riskineutraali todennäköisyysmitta

   Oletamme että $V_1(\omega) \leq c < \infty$ $(P = 1)$, siis V_1 on rajoitettu satunnaismuuttuja.

   Olkoon $R_1(V) := (V_1 - V_0)\,/V_0$

   V:n instrumenttin tuotto (engl. return)

   i) Osoita $E_Q(R_1(V)) = r$ jossa r on riksittömän instrumentin tuotto.

   ii) Olkoon $P \sim Q$ todennäköisyysmitta joka ei ole välttämättä riskineutraali. Osoita

   $$E_P(R_1(V)) = r - \text{Kovarianssi}_P\left(\frac{dQ}{dP}\ ,\ R_1(V)\right)$$

   Vihje: $\text{Kovarianssi}_P(X,Y) = E_P(XY) - E_P(X)E_P(Y)$, käytä mitan vaihto kaava odotusarvolle

   $$E_P(X) = E_Q\big(X\frac{dP}{dQ}\big)$$

   jossa $\frac{dP}{dQ}(\omega)$ on uskottavuusosamäätä (Radon-Nykodimin derivaatta). Jos haluat voit olettaa että todennäköisyysavaruus on diskreetti.

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olkoon satunnaismuuttuja $U(\omega)$ tasaisesti jakautunut välissä $[0, 1]$. Siis

$$P(\{\omega : a < U(\omega) \leq b\}) = (b - a) \text{ kun } 0 \leq a \leq b \leq 1 \ .$$

Yhden perioodin markkinamallissa on kaksi instrumenttia:

Riskitön pankkitili $B_t = (1 + r)^t B_0$ jolla $B_0 = 1$, $r = 1/5$, ja osake S_t jolla

$$S_0(\omega) = 1 \text{ kun } t = 0 \text{ ja } S_1(\omega) = \big(1/2 + U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1.$$

(a) Osoita että markkinamalli on arbitraasivapaa mutta ei ole täydellinen, esittämällä kahta erilaista riskineutraalimittaa.

Vihjeet: Yksi tapa (joka tietysti ei ole aino tapa) jolla voi saada riskineutraalimitan on Esscherin-muunnoksen kautta, uskottavuusosamäärällä

$$\frac{dQ}{dP} = \exp(\alpha + \beta \widetilde{S}_t)$$

jollekin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Toinen tapa jolla saa riskineutraalimitan on seuraava:

Olkoon $V(\omega) \sim$Tasainen(a, b) jossa $0 \leq a < b \leq 1$, siis kun $a \leq r \leq u \leq b$

$$P(r < V \leq u) = (u - r)/(b - a)$$

ja $I(\omega) \in \{0, 1\}$ binäärisatunnaismuuttuja. Oletamme että I, V, U ovat riippumattomia P-mitan suhteen,

$$P(I = 1) = 1 - P(I = 0) = \varepsilon \in [0, 1)$$

ja sitten määrittelemme

$$\widehat{U}(\omega) = I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)$$

Osoita ensi että $\hat{U}$:n jakauma on equivalentti U:n jakauman kanssa, siis

$$P(\widehat{U} \in A) = 0 \Longleftrightarrow P(U \in A) = 0$$

Laske ensi $E_P(\widehat{U})$, parametrien ε, a, b funktiona ja esitä parametriarvot jolla P tule olemaan riskineutraali markkinamallissa $(B, \widehat{S})$ jossa

$$\widehat{S}_0(\omega) = S_0(\omega) \text{ kun } t = 0 \text{ ja}$$
$$\widehat{S}_1(\omega) = \big(1/2 + \widehat{U}(\omega)\big) = \big(1/2 + I(\omega)V(\omega) + (1 - I(\omega))U(\omega)\big) \text{ kun } t = 1 \,.$$

(b) Laske europpalaisen osto-option $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - 1\big)^+$ arbitraasivapaahintojen joukko $\mathcal{C}(F)$.

(c) Laske edullisin ylisuojaussalkku ja kallimmin alisuojaussalkku strategiat europpalaisen osto-optiolle $F(\omega)$.

(d) Tässä (B_t, S_t) mallissa, millä optioilla on yksikäsitteinen arbitraasivapaa hinta ? Mitkä optiot ovat toistettavissa ?

Vihje: tutki diskontatun option ja diskontatun osakkeen yhteisjakauman kantajoukon (joka riippuu vain referenssitodennäköosyysmitan P:n nolla joukoista) konveksipeiton suhteellinen sisus.

Käytännossä etsi pienin joukko joka sisältää todennäköisyydellä $P = 1$ pari $(\widetilde{S}_1(\omega), \widetilde{F}(\omega)) \in \mathbb{R}^2$, ja piirra joukon konveksipeitto.

4. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus ja $\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega)$ P:n suhteen stokastisesti riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat jolla

$$P(\epsilon_i = 1) = 1 - P(\epsilon_i = 0) = 1/2$$

Kasitellään (B_t, S_t, X_t) markkinamalli jossa riskitön instrumentti on $B_t = (1 + r)B_0 > 0$, jossa $r > -1$, $t \in 0, 1$, $B_0 = 1$, $S_t(\omega)$, $X_t(\omega)$ $t = 0, 1$ ovat osakeinstrumentteja jossa $S_0 = X_0 = 1$

$$S_1(\omega) = (1 + d + (u - d)\epsilon_1(\omega))(1 + d + (u - d)\epsilon_2(\omega))$$
$$X_1(\omega) = (1 + u + (d - u)\epsilon_1(\omega))(1 + u + (d - u)\epsilon_2(\omega))$$

jossa $-1 < d < r < u$, esimerkiksi $d = -1/5$, $r = 1/5$, $u = 2/5$.

(a) Onko malli (B_1, S_1, X_1) alkuhinnoilla (B_0, S_0, X_0) arbitraasivapaa ?

(b) Onko malli täydellinen ?

Vihje Vaikka Ω on abstrakti todennäköisyysavaruus, voidaanko kuvata tätä mallia äärellisessä todennäköisyysavaruudessa ja monta tilaa siihen tarvitaan ? Toisin sanoen, kirjoita alas lista algebran $\sigma(S_1, X_1)$ atomi-tapahtumista.

($A \in \mathcal{A}$ on atomi jos $\emptyset \neq B \in \mathcal{A}$ ja $B \supseteq A \implies B = A$).

(c) Laske arbitraasivapaiden hintojen joukko swap optiolle $F(\omega) = \big(S_1(\omega) - X_1(\omega)\big)^+$.

(d) Laske edullisin ylisuojausalkku ja kallimmin alisuojausalkku swap optiolle F. (tietenkin nämä salkut täsämävät jos optio on suojattavissa).