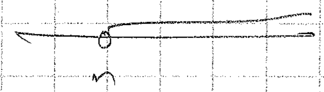
MÅTT O. INTEGRATIONSTEORI 2016

Övning 1 (22.1.) Modellsvar

1:1

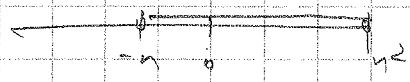
(1) Påst 1 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n,\infty)=\emptyset$



om $x\in\mathbb{R}$ godtycklig $\Rightarrow$ finns $n_0\in\mathbb{N}$ så att $n_0>x$

$\Rightarrow x\notin(n_0,\infty)$ så att $x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}(n,\infty)$

Påst 2 $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n^2]=\mathbb{R}$



om $x\in\mathbb{R}$ godtycklig $\Rightarrow$ välj $n_0\in\mathbb{N}$ så att

$-n_0\le x\le n_0^2$ (möjligt ty $n^2\xrightarrow{n\to\infty}\infty$, $-n\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$).

$\Rightarrow x\in[-n_0,n_0^2]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n^2]$.

(2.) anta $f:X\to Y$ avbildn, $\{V_\alpha:\alpha\in A\}$ mängdfamilj i X

(i) om $y\in f(\bigcap_\alpha X_\alpha)$ $\Rightarrow$ finns $x\in\bigcap_\alpha V_\alpha$ så att $y=f(x)$

$x\in\bigcap_\alpha V_\alpha \Rightarrow x\in V_\alpha$ för alla $\alpha\in A$ $\Rightarrow y=f(x)\in f(V_\alpha)$ för alla α

$\Rightarrow y=f(x)\in\bigcap_\alpha f(V_\alpha)$

alltså $f(\bigcap_\alpha V_\alpha)\subset\bigcap_\alpha f(V_\alpha)$

(ii) Påst om f injektion $X\to Y$, så $f(\bigcap_\alpha V_\alpha)=\bigcap_\alpha f(V_\alpha)$

ovan "$\subset$" gäller

anta $y\in\bigcap_\alpha f(V_\alpha)$ godtycklig $\Rightarrow y\in f(V_\alpha)$ för alla $\alpha\in A$

$\Rightarrow \exists x_\alpha\in V_\alpha$ med $y=f(x_\alpha)\in f(V_\alpha)$

om $\alpha'\neq\alpha$ i A $\Rightarrow y=f(x_\alpha)=f(x_{\alpha'})\underset{\text{injektiv}}{\overset{f}{\Rightarrow}} x_\alpha=x_{\alpha'}\overset{\text{bet.}}{\equiv}x$

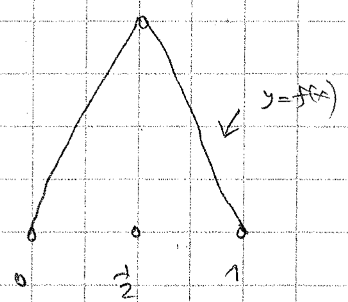
$\Rightarrow y=f(x)\in f(\bigcap_\alpha V_\alpha)$ då $x\in\bigcap_\alpha V_\alpha$.

alltså $\bigcap_\alpha f(V_\alpha)\subset f(\bigcap_\alpha V_\alpha)$ och påst. gäller

---

(3.) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(t)=\begin{cases}2t, & \text{om } 0\le t\le\frac12\\ 2-2t, & \text{om } \frac12\le t\le 1\end{cases}$ $A=[0,\frac12]$, $B=[\frac12,1]$.

$$A\cap B=\{\tfrac12\} \Rightarrow f(A\cap B)=\{f(\tfrac12)\}=\{1\}$$



$f(0)=0,\ f(\frac12)=1,\ f(1)=0$

f kont. $\Rightarrow$ (Bolzano / lös explicit)

$$f(A)=[0,1],\quad f(B)=[0,1] \Rightarrow f(A)\cap f(B)=[0,1]$$

alltså

$$\{1\}=f(A\cap B)\subsetneq f(A)\cap f(B)=[0,1]$$

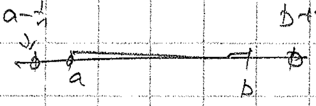
dvs inklusionen strikt i övn 1.2(i).

---

4. Låt $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

(i) Påst

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\tfrac1n,\ b+\tfrac1n\right)$$



$$[a,b]\subset\left(a-\tfrac1n, b+\tfrac1n\right)\ \forall n \overset{\text{def}}{\Rightarrow} [a,b]\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\tfrac1n, b+\tfrac1n\right)$$

omvänt om

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\tfrac1n, b+\tfrac1n\right) \text{ godtycklig} \Rightarrow$$

$$a-\tfrac1n < x < b+\tfrac1n \quad \forall n \qquad \text{(olikheter bevaras i limes)}$$

$n\to\infty$ ↓ ↓ ↓ $n\to\infty$

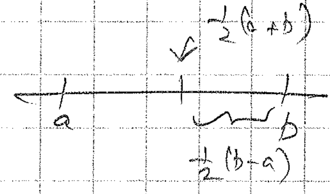
$$a\le x\le b \qquad \text{dvs } x\in[a,b]$$

alltså

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\tfrac1n, b+\tfrac1n\right)\subset[a,b] \Rightarrow \text{påst följer}$$

(ii)

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n \quad \text{där } F_n\subset\mathbb{R} \text{ lämpliga slutna intervall}$$



Låt $F_n=\left[a+\frac1n,\ b-\frac1n\right]$

där $n\ge n_0$ och $0<\frac1{n_0}<\frac12(b-a)$

$$\Rightarrow F_n=\left[a+\tfrac1n, b-\tfrac1n\right]\subset(a,b) \text{ för alla } n\ge n_0$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n\ge n_0}F_n\subset(a,b)$$

omvänt: om $a<x<b$ godtycklig $\overset{\frac1n\to0}{\Rightarrow}$ finns $n\ge n_0$ så att $a+\frac1n\le x\le b-\frac1n$

$$\Rightarrow x\in F_n=\left[a+\tfrac1n, b-\tfrac1n\right] \Rightarrow (a,b)\subset\bigcup_{n=n_0}^{\infty}F_n$$

alltså

$$(a,b)=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}F_n.$$

Mått o integrationsteori, övn 1

Kommentar i $\mathbb{R}^n$ gäller: om $x \in \mathbb{R}^n$ och $r>0$, så

slutna klotet $\bar{B}(x,r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x, r+\frac{1}{n})$

öppna klotet $B(x,r) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \bar{B}(x, r-\frac{1}{n})$ där $n_0 \in \mathbb{N}$ så att $r - \frac{1}{n_0} > 0$.

(5.) Påst potensmängden $P(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}$ delmängd$\}$ är ouppräknelig, där $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ de naturliga tala.

Bevis motantagande $P(\mathbb{N})$ uppräknelig dvs

$$(*) \qquad P(\mathbb{N}) = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definiera $B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A_n\} \Rightarrow B \subset \mathbb{N}$ delmängd dvs $B \in P(\mathbb{N})$

$(*) \Rightarrow$ finns $m \in \mathbb{N}$ så att $B = A_m$

två möjligheter: $m \in B$ eller $m \notin B$.

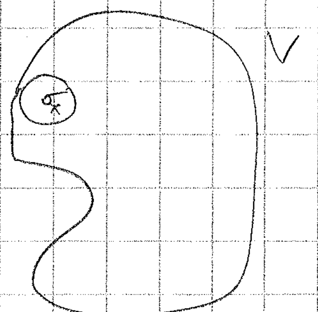
- om $m \in B \overset{\text{def}}{\Rightarrow} m \notin A_m \Rightarrow A_m \neq B$ ↯
- om $m \notin B \overset{\text{def}}{\Rightarrow} m \in A_m \Rightarrow A_m \neq B$ ↯.

Alltså: $P(\mathbb{N})$ måste vara ouppräknelig

(6.) Anta $V \subset \mathbb{R}^n$ godtycklig öppen mängd

Påst $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ där $B_j \subset \mathbb{R}^n$ öppet klot för varje $j \in \mathbb{N}$.

Bevis $\left.\begin{array}{l} x \in V \text{ godtycklig} \\ V \text{ öppen i } \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow$ finns radie $r(x) > 0$ så att



öppna klotet $B(x, r(x)) \subset V$

fixera rationellt tal $s(x) \in \mathbb{Q}$ så att

$$0 < s(x) < \tfrac{1}{2} r(x)$$

Låt $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Fixera $q_x = (q_1^{(x)}, \ldots, q_n^{(x)}) \in \mathbb{Q}^n$

så att $$|x_j - q_j^{(x)}| < \frac{s(x)}{\sqrt{n}} \quad \text{för alla } j = 1, \ldots, n \qquad (\mathbb{Q} \text{ tät i } \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad |x - q_x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - q_j^{(x)}|^2} < \sqrt{s(x)^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}} = s(x)$$

Mått o. Integrationsteori övning 1

1:4

Betrakta familjen $\{B(q_x, s(x)) : x \in V\}$.

Påst (*) $V = \bigcup_{x \in V} B(q_x, s(x))$

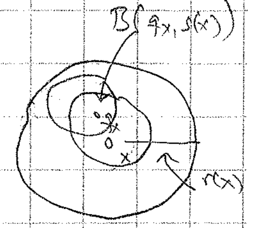
nämligen $|x - q_x| < s(x) \Rightarrow x \in B(q_x, s(x)) \quad \forall x \in V \Rightarrow$

$$V \subset \bigcup_{x \in V} B(q_x, s(x))$$

omvänt: för varje $x \in V$ gäller att $B(q_x, s(x)) \subset B(x, r(x)) \subset V$

om $z \in B(q_x, s(x)) \Rightarrow$ enligt Δ-OL är

$$|z - x| \leq |z - q_x| + |q_x - x| < s(x) + s(x) = 2s(x) < r(x)$$



Då är alltså $\bigcup_{x \in V} B(q_x, s(x)) \subset \bigcup_{x \in V} B(x, r(x)) \subset V$

så att (*) gäller.

Slutligen: $\{B(q_x, s(x)) : x \in V\}$ är i själva verket en uppräknelig familj!

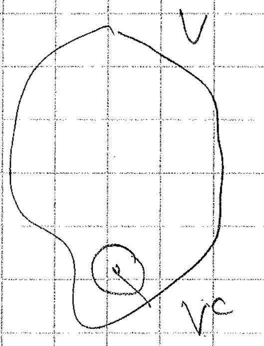
$(q_x, s(x)) = (q_1^{(x)}, \dots, q_n^{(x)}, s(x)) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ som uppräknelig mängd

orsak: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ uppräknelig och induktion.

Alternativ idé

betrakta $\mathbb{Q}^n \cap V = \{q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n : q \in V\}$.

om $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n \cap V \Rightarrow$ avståndet $d_q = \mathrm{dist}(q, V^c) > 0$



Betrakta $\{B(q, s) : q \in \mathbb{Q}^n \cap V,\ 0 < s < d_q/2,\ s \in \mathbb{Q}\}$

som uppräknelig familj (av samma skäl).

Påst $V = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q}^n \cap V \\ 0 < s < d_q/2,\ s \in \mathbb{Q}}} B(q, s)$

$\left.\begin{array}{l} q \in V \cap \mathbb{Q}^n \\ s > 0 \text{ som ovan} \end{array}\right\} \Rightarrow B(q, s) \subset V$ (ty $\mathrm{dist}(q, V^c) > 2s > 0$).

$\Rightarrow \bigcup_{q, s} B(q, s) \subset V$

omvänt om $x \in V$ godtycklig $\overset{\text{som}}{\underset{\text{ovan}}{\Rightarrow}}$ finns $q \in \mathbb{Q}^n$, så att $|x - q| < s$ där

$s \in \mathbb{Q}$ och $0 < s < d_q/2 \Rightarrow q \in V$ (ty $\mathrm{dist}(q, V^c) = d_q > 2s$)

och $x \in B(q, s)$. Alltså $V \subset \bigcup_{q, s \text{ ovan}} B(q, s)$ (också: finns $q \in \mathbb{Q}^n \cap V$ i familjen ovan!)