INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Mått och Integrationsteori
Kursprov 17.3.2016

Obs: detta är kursprovet för den **svenskspråkiga** kursen **Mått och Integrationsteori.**
I kursprovet får ni ha med en tvåsidig minneslapp av storlek A4.

1. (a) Definiera följande begrepp:
(i) *n-dimensionella Lebesgue yttermåttet* $m_n^*(A)$ för $A \subset \mathbb{R}^n$,
(ii) *Lebesgue mätbar mängd* $E \subset \mathbb{R}^n$.
(b) Visa: om $E \subset \mathbb{R}^n$ är en Lebesgue mätbar mängd, så är också komplementmängden $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ mätbar.

2. Anta att $\{A_j : j \in \mathbb{N}\}$ är en familj av Lebesgue mätbara delmängder till $\mathbb{R}^n$ och definiera

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j \Big).$$

Visa att

$$m_n(A) \leq \liminf_{j \to \infty} m_n(A_j).$$

Tips: konvergenssatser för mått.

3. Anta att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar i $\mathbb{R}$. Visa att derivatafunktionen $x \mapsto f'(x)$ är en mätbar avbildning $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. Anta att $A \subset \mathbb{R}^n$ och $f : A \to \mathbb{R}$ är en integrerbar funktion. Visa att

$$m_n(\{x \in A : |f(x)| > c\}) \leq \frac{1}{c} \int_A |f|$$

för varje $c > 0$.

5. (i) Formulera satsen om dominerad konvergens (DKS) för en funktionsföljd $f_k : A \to \mathbb{R}$, där $k \in \mathbb{N}$ och $A \subset \mathbb{R}^n$ är mätbar. (Satsen behöver **inte** bevisas, men kom ihåg att inkludera villkoren.)
(ii) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{e^{-x} \cos(\frac{x}{k})}{2 + \sin(\frac{x}{k})} dx.$$

Motivera användningen av eventuella konvergenssatser.

Modellsvar

(1) (teori) (a) om $A \subset \mathbb{R}^n$ delmängd, def. n-dim. Lebesgue yttermåttet

$$m_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

där varje $I_k \subset \mathbb{R}^n$ öppet n-intervall, och (geometriska måttet)

$$\ell(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \quad \text{då} \quad I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$$

$E \subset \mathbb{R}^n$ är Lebesgue mätbar omm

$$m_n^*(A) = m_n^*(A \cap E) + m_n^*(A \setminus E) \quad \text{för alla } A \subset \mathbb{R}^n$$

(Caratheodorys villkor)

(b) Påst. $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mätbar $\Rightarrow$ $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ Lebesgue mätbar

Orsak: om $A \subset \mathbb{R}^n$ så

$$m_n^*(A) \overset{E \text{ mätbar}}{=} m_n^*(A \cap E) + m_n^*(A \setminus E) \overset{(E^c)^c = E}{=}$$

$$m_n^*(\underbrace{A \cap (E^c)^c}_{= A \setminus E^c}) + m^*(\underbrace{A \setminus (E^c)^c}_{A \cap (E^c)^{cc} = A \cap E^c}) = m^*(A \cap E^c) + m_n^*(A \setminus E^c)$$

$A \subset \mathbb{R}^n$ godtycklig $\Rightarrow$ $E^c \subset \mathbb{R}^n$ mätbar

---

(2) anta $\{A_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n)$ och def

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j \right).$$

Visa $m_n(A) \leq \liminf_{j \to \infty} m_n(A_j)$

Lösning: Låt $B_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ (Leb. mätbar $\forall k$).

$$B_k = A_k \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{\infty} A_j \right) = A_k \cap B_{k+1} \subset B_{k+1} \quad \forall k \Rightarrow (B_k) \text{ växande familj i } \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n)$$

Konvergenssatsen för mått (växande familjer 2.60) $\Rightarrow$

$$m_n(A) = m_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \to \infty} m_n(B_k) \overset{\text{lim existerar 3.21}}{=} \liminf_{k \to \infty} m_n(B_k) \overset{\text{ty } B_k \subset A_k \ \forall k}{\leq} \liminf_{k \to \infty} m_n(A_k)$$

$\square$

(3) Anta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriverbar i $\mathbb{R}$.

Påst derivatafunktionen $x \mapsto f'(x)$ mätbar avbildning i $\mathbb{R}$

Lösning def av derivatan $\Rightarrow$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ existerar (i $\mathbb{R}$) för alla $x \in \mathbb{R}$

På är (gränsvärde av funktionsföljd)

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Låt $f_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{N}$

f deriverbar i $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f kontin. i $\mathbb{R}$ $\overset{\text{skallund}}{\underset{\text{etc}}{\Longrightarrow}}$ $x \mapsto \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ kontin i $\mathbb{R}$ $\forall n$

teorin (Sats 3.5) $\Rightarrow$ f_n mätbar i $\mathbb{R}$ $\forall n = 1, 2 ..$

teorin (Sats 3.23) $\Rightarrow$ gränsvärdesfunktionen $f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ mätbar i $\mathbb{R}$

Kommentar Exempel 3.30 i kompendiet

(4.) Anta $A \subset \mathbb{R}^n$ och $f: A \to \mathbb{R}$ integrerbar. Visa:

$$(*) \quad m_n(\{x \in A : |f(x)| > c\}) \leq \frac{1}{c} \int_A |f| \quad \text{för alla } c > 0.$$

(Kommentar: $(*)$ kallas Chebyshevs olikhet).

Lösning beteckna $A_c = \{x \in A : |f(x)| > c\}$, $c > 0$ godtyckligt. Då är

$$\int_A |f| \overset{\text{disjunkta}}{=} \int_{A_c} |f| + \underbrace{\int_{A \setminus A_c} |f|}_{\geq 0} \geq \int_{A_c} |f| \overset{\text{monotonicitet 4.18}}{\geq} c \cdot \int_{A_c} \chi_{A_c} = c \cdot m_n(A_c)$$

$$f \cdot \chi_{A_c} \geq c \cdot \chi_{A_c}$$

lös $\Rightarrow$ $m_n(A_c) \leq \frac{1}{c} \int_A |f|$.

$\square$

(5) (i) Anta $A \subset \mathbb{R}^n$ mätbar och $f_k : A \to \mathbb{R}$ mätbara $\forall k \in \mathbb{N}$

Dominerade konvergenssatsen (DKS) anta

$$|f_k(x)| \le g(x) \quad \text{n.ö. } x \in A \text{ och alla } k \in \mathbb{N}, \text{ där}$$

g är integrerbar i A (dvs $\int_A g < \infty$), samt att existerar.

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \text{n.ö. } x \in A.$$

Då är f integrerbar i $\mathbb{R}$ och

$$\int_A f = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k \quad \left(\text{dvs} \quad \int_A \lim_k f_k = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\right).$$

(ii) Beräkna $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{e^{-x}\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{2+\sin\left(\frac{x}{k}\right)}\,dx.$

Lösning $\left|\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right| \le 1$, $2+\sin\left(\frac{x}{k}\right) \ge 2-1 = 1 \quad \forall x \in [1,\infty),\ k \in \mathbb{N}$

$$|f_k(x)| = \left|\frac{e^{-x}\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{2+\sin\left(\frac{x}{k}\right)}\right| = \frac{e^{-x}\left|\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right|}{2+\sin\left(\frac{x}{k}\right)} \overset{\text{ovan}}{\le} e^{-x} \equiv g(x) \quad \forall x \in [1,\infty)\ \forall k \in \mathbb{N}$$

g integrerbar över $[1,\infty)$ ty

Riemann integral! 4.19

$$\int_1^\infty g \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_1^j e^{-x}\,dx = \lim_{j\to\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_1^j = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{1}{e} - e^{-j}\right) = \frac{1}{e}$$

på $g_j = g \cdot \chi_{[1,j)}$, $j \in \mathbb{N}$
$0 \le g_j \nearrow g$ i $[1,\infty)$

gränsvärdesfunktionen?

$$\cos\left(\frac{x}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \cos(0) = 1 \quad \forall x \in [1,\infty)$$

$$2+\sin\left(\frac{x}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 2+\sin(0) = 2 \quad \forall x \in [1,\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{-x}\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{2+\sin\left(\frac{x}{k}\right)} = \frac{e^{-x}\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}e^{-x} \quad \text{då } x \in [1,\infty)$$

f_k mätbara i $[1,\infty)$ ty $x \mapsto \dfrac{e^{-x}\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{2+\sin\left(\frac{x}{k}\right)}$ kont. i $[1,\infty)$ (sats 3.5)

DKS $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{e^{-x}\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{2+\sin\left(\frac{x}{k}\right)}\,dx = \int_1^\infty \lim_{k\to\infty} \frac{e^{-x}\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{2+\sin\left(\frac{x}{k}\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-x}\,dx$$

$$\underset{\text{MKS}}{\overset{\text{ovan}}{=}} \frac{1}{2}\lim_{j\to\infty} \int_1^j e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^{-1}$$