Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Erilliskoe
22.3.2012

1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen avoin joukko $G \subset \mathbb{R}^n$, että $A \subset G$ ja $m(G \setminus A) < \varepsilon$.

2. Olkoot A ja B sellaisia Lebesgue-mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, että $m(A \cap B) < \infty$. Osoita, että
$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

3. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset [0,1]$ sellaisia mitallisia joukkoja, että jokainen piste $x \in [0,1]$ kuuluu ainakin kolmeen eri joukkoon A_k. Osoita, että $m(A_k) \geq 3/n$ jollakin k.

4. Osoita, että toinen seuraavista väitteistä on oikein ja toinen väärin:
   (a) Jos f on integroituva funktio joukossa $A = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| < 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva A:ssa.
   (b) Jos f on integroituva funktio joukossa $B = \{x \in \mathbb{R} \colon |x| > 1\}$, niin myös $|f|^{1/2}$ on integroituva B:ssä.

5. Laske raja-arvo
$$\lim_{k \to \infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\, dx.$$
[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Erilliskoe
6.3.2012

1. (a) Määrittele käsite: *Lebesguen n-ulotteinen ulkomitta* m_n^*.
   (b) Pitävätkö seuraavat väitteet paikkaansa? Perustele vastauksesi!
      (i) Jos $m_n^*(A) > 0$, niin A sisältää epätyhjän avoimen joukon.
      (ii) Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu, niin $m_n^*(A) < \infty$.

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ mitallinen kuvaus. Osoita, että (alkukuva) $f^{-1}B$ on mitallinen jokaisella Borel-joukolla $B \subset \mathbb{R}^m$.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ sellainen mitallinen funktio, että
$$\int_{\mathbb{R}} f < \infty.$$
Osoita, että funktio
$$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$
on jatkuva.

4. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} k \int_1^{\infty} x^{-3} \sin\frac{x}{k} \cos\frac{x}{k}.$$
[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

5. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva. Osoita, että
$$\liminf_{k\to\infty} k \int_k^{k+1} |f| = 0.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Erilliskoe
25.10.2011

1. Osoita suoraan ulkomitan määritelmää käyttäen, että $m_2^*(A) = 0$, kun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x,\ x \in [0,1]\}$.

2. Onko funktio $f \colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{jos } \log x \notin \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jos } \log x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$
mitallinen? Perustelu!

3. Olkoon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että derivaatta $f' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituva funktio. Osoita, että
$$m\big(\{x \in A \colon |f(x)| > c\}\big) \le \frac{1}{c} \int_A |f|$$
jokaisella $c > 0$.

5. Osoita, että jokaiselle integroituvalle funktiolle $f \colon A \to \mathbb{R}$ pätee
$$\lim_{i \to \infty} \int_{\{x \in A \colon |f(x)| > i\}} f = 0\,.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
11.8.2011

1. (a) Määrittele käsite: *Lebesguen n-ulotteinen ulkomitta* m_n^*.
   (b) Osoita, että $m_1^*(\{x^2 : x \in A\}) = 0$, jos $A \subset [0,1]$ ja $m_1^*(A) = 0$.

2. Määritellään funktio $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(0) = 0$ ja $f(x) = k$, kun $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Onko f mitallinen? Perustelu!

3. Muotoile Fatoun lemma (ei tarvitse todistaa). Anna esimerkki, jossa Fatoun lemman väitteessä pätee aito epäyhtälö.

4. Olkoon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallinen ja olkoon
$$A_k = \{x \in \mathbb{R} : 2^{k-1} < |f(x)| \leq 2^k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Osoita, että f on integroituva täsmälleen silloin, kun
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(A_k) < \infty.$$

5. Laske raja-arvo
$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\, dx.$$
[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]

Matematiikan laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe 14.3. 2000

1. (*Teoria*) (i) Määrittele (tarkasti) Lebesgue mitallinen joukko $E \subset \mathbf{R}^n$.
(ii) Perustele (määritelmästä lähtien) miksi joukko

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 \notin \mathbf{Q} \text{ tai } x_2 \notin \mathbf{Q}\}$$

on Lebesgue mitallinen. Tässä $\mathbf{Q}$ on rationaalilukujen joukko.

2. Olkoon X joukko, $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra sekä $\mu : \Gamma \to [0, \infty]$ mitta. Asetetaan

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \Big)$$

kun joukot $A_j \in \Gamma, j = 1, 2, \ldots$. Totea, että joukko $A \in \Gamma$ ja osoita, että $\mu(A) = 0$ jos $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$.

3. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ Lebesgue mitallinen joukko ja $f : E \to \dot{\mathbf{R}}$ sellainen kuvaus, että

$$E_q = \{x \in E : f(x) \leq q\}$$

on Lebesgue mitallinen joukko kaikilla rationaaliluvuilla $q \in \mathbf{Q}$. Näytä, että f on mitallinen kuvaus.

4. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ Lebesgue mitallinen joukko ja $f : E \to \dot{\mathbf{R}}$ mitallinen kuvaus jolle $f \geq 0$. Määritellään funktiojono $f_j : E \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \leq j, \\ j, & \text{jos } f(x) > j, \end{cases}$$

kun $j = 1, 2, \ldots$. Näytä, että kuvaukset f_j ovat mitallisia ja etsi raja-arvo

$$\lim_{j \to \infty} \int_E f_j.$$

5. (i) (*Teoria*) Muotoile Lebesguen dominoidun konvergenssin lause funktiojonolle $f_j : E \to \dot{\mathbf{R}}$, $j = 1, 2, \ldots$, kun $E \subset \mathbf{R}^n$ on Lebesgue mitallinen joukko.
(ii) Laske raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-3n}^{3n} \frac{e^{-|x|}}{2 + \cos(\frac{x}{n})} dx.$$

Perustele mahdollisia välivaiheita !

Matematiikan laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe 18.4. 2000

1. (*Teoria*) (i) Määrittele (Lebesgue) mitallinen joukko $E \subset \mathbf{R}^n$.

(ii) Näytä: jos E_1 ja E_2 ovat avaruuden $\mathbf{R}^n$ mitallisia joukkoja, niin yhdiste $E_1 \cup E_2$ on myös mitallinen joukko.

2. Olkoon $E \subset \mathbf{R}$ mitallinen joukko ja $m(E) < \infty$. Näytä, että on olemassa sellainen piste $x_0 \in \mathbf{R}$, että

$$m((-\infty, x_0] \cap E) = m([x_0, \infty) \cap E).$$

[*Vihje.* Tutki kuvausta $f(x) = m((-\infty, x] \cap E)$ kun $x \in \mathbf{R}$.]

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kuvaus, joka on derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä. Näytä, että derivaatta f' on mitallinen kuvaus $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

4. (*Teoria*) Muotoile ja todista Fatoun lemma funktiojonolle $f_j : A \to \dot{\mathbf{R}}$, missä $A \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen joukko. [Monotonisen konvergenssin lause saa pitää tunnettuna.]

5. Määritä raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\cos^n(x) + \sin^n(x)}{x^2} dx.$$

Perustele laskun välivaiheet !

Matematiikan laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe 25.5. 2000

1. (*Teoria*) (i) Määrittele, mitä tarkoitetaan mitallisella kuvauksella $f : A \to [-\infty, \infty]$, kun $A \subset \mathbf{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen joukko.

(ii) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ joukko ja χ_A vastaava karakteristinen funktio. Näytä: χ_A on mitallinen kuvaus $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jos ja vain jos A on Lebesgue-mitallinen joukko.

2. Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ annettu joukko. Oletamme, että jokaisella $j \in \mathbf{N}$ on olemassa suljettu joukko $B_j \subset \mathbf{R}^n$ ja avoin joukko $A_j \subset \mathbf{R}^n$ siten, että $B_j \subset E \subset A_j$ ja

$$m(A_j \setminus B_j) < \frac{1}{j}.$$

Näytä, että E on Lebesgue-mitallinen joukko.

3. Olkoon $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ kuvaus

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{jos } x \in \mathbf{Q} \cap (0,1), \\ x \log x, & \text{jos } 0 < x < 1 \text{ ja } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

Onko kuvaus f Lebesgue-integroituva yli välin $(0,1)$? Jos näin on, laske integraali $\int_0^1 f$.

4. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ äärellismittainen joukko ja $f : A \to [-\infty, \infty]$ integroituva kuvaus. Asetetaan $A_j = \{x \in A : |f(x)| \geq j\}$ kun $j \in \mathbf{N}$. Näytä, että jokainen joukko A_j on mitallinen ja

$$\lim_{j \to \infty} j \cdot m(A_j) = 0.$$

[*Muistutus.* Kuvaus $B \mapsto \int_B |f|$ on mitta, kun $B \subset A$ on Lebesgue-mitallinen joukko.]

5. Määritä raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-2^n}^{2^n} \frac{e^{-n|x|}}{1+x^2} dx.$$

Perustele laskun välivaiheet !

Matematiikan laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe 19.6. 2000

1. Tutki, onko tason osajoukko

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(q_1, q_2) \in \mathbf{R}^2 : q_1, q_2 \in \mathbf{Q}\}$$

Lebesgue-mitallinen. Tässä $\mathbf{Q}$ on rationaalilukujen joukko.

2. (*Teoria*) (i) Määrittele, mitä tarkoitetaan (Lebesgue-)mitallisella kuvauksella $f : A \to [-\infty, \infty]$, kun $A \subset \mathbf{R}^n$.
(ii) Anna esimerkki kuvauksesta $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joka ei ole mitallinen. [Ei-mitallisten joukkojen olemassaolo pidetään tunnettuna.]

3. Olkoon $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$ kuvaus

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x^2}, & \text{jos } x \in [1,\infty), x \notin \mathbf{Q}, \\ x, & \text{jos } x \in [1,\infty) \cap \mathbf{Q}, \end{cases}$$

Tutki, onko f Lebesgue-integroituva yli välin $[1, \infty)$.

4. (*Teoria*) Muotoile ja todista Lebesguen dominoidun konvergenssin lause funktiojonolle $f_j : A \to [-\infty, \infty]$, $j \in \mathbf{N}$, missä $A \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen joukko. [Fatoun lemma pidetään tunnettuna.]

5. Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to [-\infty, \infty]$ integroituva kuvaus. Asetetaan $A_j = \{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| > j\}$ kun $j \in \mathbf{N}$. Osoita, että

$$\lim_{j \to \infty} \int_{A_j} |f| dm = 0.$$

[*Vihje.* Dominoidun konvergenssin lause tai mitan konvergenssi.]

Matematiikan laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe 8.8. 2000

1. (i) (*teoria*) Määrittele Lebesgue-mitallinen joukko $E \subset \mathbf{R}^n$.

(ii) Olkoon $E \subset \mathbf{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko. Näytä, että siirretty joukko $x + E = \{x + y : y \in E\}$ on mitallinen kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$, ja mitta $m(x + E) = m(E)$.

2. Oletamme että kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ toteuttaa *Lipschitz-ehdon*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R},$$

missä $c > 0$ on vakio. Näytä: jos $A \subset \mathbf{R}$ on 0-mittainen joukko, niin kuva fA on mitallinen ja $m(fA) = 0$.

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kuvaus   Huom $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{jos } \log x \notin \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{jos } \log x \in \mathbf{Q}, \end{cases}$$

Onko f mitallinen kuvaus ? Tässä $\mathbf{Q}$ on rationaalilukujen joukko.

4. (*teoria*) Muotoile Fatoun lemma funktiojonolle $f_j : A \to \dot{\mathbf{R}}$, missä $A \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen joukko. Todista Fatoun lemma monotonisen konvergenssin lauseen avulla.

5. (i) (*teoria*) Muotoile Lebesguen dominoidun konvergenssin lause funktiojonolle $f_j : A \to \mathbf{R}$, missä $A \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen joukko. (Lausetta **ei** tarvitse todistaa.)

(ii) Laske raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n e^{-x} \cos^n(x) dx.$$

Matematiikan laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe 10.10. 2000

1. (*teoria*) Määrittele, mitä tarkoitetaan Lebesgue-mitallisella joukolla $E \subset \mathbf{R}^n$. Näytä: jos E_1 ja E_2 ovat avaruuden $\mathbf{R}^n$ mitallisia joukkoja, niin yhdiste $E_1 \cup E_2$ on myös mitallinen joukko.

2. Oletamme annetusta joukosta $E \subset \mathbf{R}^n$ että jokaisella $j \in \mathbf{N}$ on olemassa sellainen avoin joukko $A_j \subset \mathbf{R}^n$, että $E \subset A_j$ ja ulkomitta $m^*(A_j \setminus E) < \frac{1}{j}$. Onko E Lebesgue-mitallinen joukko ?

3. (i) Määrittele, mitä tarkoitetaan mitallisella kuvauksella $f : \mathbf{R} \to [-\infty, \infty]$.
(ii) Näytä, että annettu kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on mitallinen, jos ja vain jos kuvaus f^2 on mitallinen sekä joukko $\{x \in \mathbf{R} : f(x) < 0\}$ on mitallinen. Tässä $f^2 = f \cdot f$.

4. Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

5. (*Teoria*) (i) Muotoile Fubinin 1. lause positiiviarvoiselle mitalliselle funktiolle $f : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$. (Lausetta **ei** tarvitse todistaa.)
(ii) Laske integraali

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx$$

Fubinin 1. lauseen avulla.

Matematiikan laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe 12.12. 2000

1. Määrittele, mitä tarkoitetaan Lebesgue-mitallisella joukolla $E \subset \mathbf{R}^n$. Ovatko seuraavat joukot Lebesgue-mitallisia ? Perustele vastauksesi.

(i) $\{j^2 + x : j \in \mathbf{N}, x \text{ on irrationaaliluku ja } 0 \leq x \leq 1\}$,
(ii) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \sin x < y\}$.

2. Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mitallinen kuvaus. Asetetaan $A = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > 0\}$ ja $A_j = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > \frac{1}{j}\}$ kun $j \in \mathbf{N}$. Osoita: jos mitta $m(A) > 0$, niin $m(A_j) > 0$ jollakin $j \in \mathbf{N}$. [*Vihje*: mittojen konvergenssi auttaa.]

3. (*teoria*) Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to [0, \infty]$ annettu mitallinen kuvaus. Osoita, että on olemassa sellainen jono yksinkertaisia funktioita $f_j : \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$, että

(i) $f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$ ja $j \in \mathbf{N}$,
(ii) $f(x) = \lim_{j \to \infty} f_j(x)$ kaikillla $x \in \mathbf{R}^n$.

4. Oletamme, että $f_j : \mathbf{R}^n \to [0, \infty]$, $j = 1, 2, \ldots$, on sellainen jono mitallisia kuvauksia, että

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x) dm(x) < \infty.$$

Näytä, että $\lim_{j \to \infty} f_j(x) = 0$ melkein kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$.

5. (i) (*teoria*) Muotoile Lebesguen dominoidun konvergenssin lause funktiojonolle $f_j : A \to \mathbf{R}$, missä $A \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen joukko. (Lausetta **ei** tarvitse todistaa.)

(ii) Laske raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\log n}^{\log n} e^{-nx^2} dx.$$