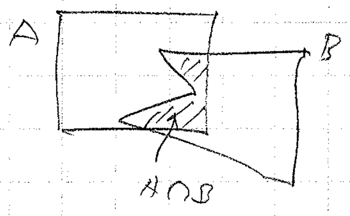
Mått- o Integrationsteori / Kursprovs genomgång 2-3.2016 (1)

(1.) Anta $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ är Lebesgue mätbara och $m(A\cap B) < \infty$.
($m = m_n$ n-dim. Lebesgue mått).



Påst $\quad m(A\cup B) = m(A) + m(B) - m(A\cap B)$

Lösn (A) (elementärt sätt)

$$A = (A\setminus B) \cup (A\cap B)$$
$$B = (B\setminus A) \cup (A\cap B)$$

disjunkta $\overset{m}{\underset{\text{mått}}{\Rightarrow}}$ (2.28/2.30)

$$m(A) = m(A\setminus B) + m(A\cap B)$$
$$m(B) = m(B\setminus A) + m(A\cap B)$$

$$m(A) + m(B) = \underbrace{m(A\setminus B) + m(B\setminus A) +}\ m(A\cap B) + m(A\cap B)$$
$$= m(A\cup B) + m(A\cap B)$$

ty $A\cup B = (A\setminus B) \cup (B\setminus A) \cup (A\cap B)$ disjunkt union

$$m(A\cap B) < \infty \overset{\text{lös}}{\Longrightarrow} m(A\cup B) = m(A) + m(B) - m(A\cap B)$$

alt. lösning (B.) (med integraler) Låt χ_E karakteristiska funktionen till E, dvs $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x\in E \\ 0, & x\notin E \end{cases}$

Då är

$$(*) \qquad \chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B \quad \text{i } \mathbb{R}^n$$

orsak
om $x \notin A\cup B \Rightarrow 0 = 0$
om $x \in A\cap B \Rightarrow 1+1 = 1+1$
om $x\in A$, $x\notin B \Rightarrow 1+0 = 1+0$
om $x \in B$, $x\notin A \Rightarrow$ som ovan

$\Bigg\}\Rightarrow (*)$ gäller

Integrera $(*)$ över $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ $\quad$ Leb. integralen additiv (fallet $f\geq 0$) (4.28)

$$m(A\cup B) + m(A\cap B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\cup B} + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\cap B} = \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B})$$
$$\overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_A + \chi_B) \overset{\text{addit.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A + \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B \overset{!}{=} m(A) + m(B).$$

(2.) Anta $E \subset \mathbb{R}^n$ mätbar mängd, och $f : E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ avbildning, så att

$$E_q = \{x\in E : f(x) < q\}$$ är Lebesgue mätbar för alla rationella tal $q \in \mathbb{Q}$.

Påst $\quad f$ är en mätbar avbildning

Bevis Sats 3.12: räcker visa att

$$\underset{\subset \mathbb{R}^n}{\{x\in E : f(x) < r\}}$$ mätbar mängd för alla $r\in\mathbb{R}$.

nämligen

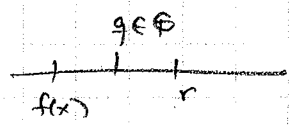
$$\{x\in E: f(x)<r\} \overset{(*)}{=} \bigcup_{\substack{q<r\\ q\in\mathbb{Q}}} \underbrace{E_q}_{\text{mätbar}}$$ (enligt antagandet)

mätbar i $\mathbb{R}^n$ (uppräknelig union av mätbara mängder!) ($\mathbb{Q}$ uppräknelig) (fundamentalsatsen 2.30)

Bevis av $(*)$: om $q<r$, $x\in E_q \Rightarrow f(x)\le q<r$ $\Rightarrow$

$E_q \subset \{x\in E: f(x)<r\}$ för alla $q<r$, $q\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ (+) $\bigcup_{\substack{q<r\\ q\in\mathbb{Q}}} E_q \subset \{x: f(x)<r\}$



Omvänt: om $f(x)<r \overset{\text{Analys I}}{\Longrightarrow}$ finns $q_0\in\mathbb{Q}$

med $f(x)<q_0<r$ $\Rightarrow$

(++) $x\in E_{q_0}\subset \bigcup_{\substack{q<r\\ q\in\mathbb{Q}}} E_q$

Kombinera (+) och (++) $\Rightarrow$

$\bigcup_{\substack{q<r\\ q\in\mathbb{Q}}} E_q = \{x\in E: f(x)<r\}$

(3) Definiera $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ genom

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{om } x\in\mathbb{Q}\cap(0,1) \quad \text{rationellt tal}\\ x\log x & \text{om } x\in\mathbb{Q}^c\cap(0,1) \quad \text{irrationellt tal}\end{cases}$$

Fråga: är f integrerbar över $(0,1)$? Om så, bestäm $\int_0^1 f$.

Lösning

$(*)$ $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1)}(x)+x\log x\cdot\chi_{\mathbb{Q}^c\cap(0,1)}(x)$, $x\in(0,1)$

$x\mapsto\frac{1}{x}$ och $x\mapsto x\log x$ kontinuerliga $\Rightarrow$ mätbara avbildningar

$\mathbb{Q}\cap(0,1)$, $\mathbb{Q}^c\cap(0,1)$ mätbara mängder $\Rightarrow$ $\chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ och $\chi_{\mathbb{Q}^c\cap(0,1)}$ är mätbara avbildningar

Sats 3.11 (produkter, summor mätbara) $\Rightarrow$

$x\mapsto\frac{1}{x}\cdot\chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1)}(x)$, $x\mapsto x\log x\cdot\chi_{\mathbb{Q}^c\cap(0,1)}(x)$ mätbara avbildningar

$\overset{\text{summa}}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}}$ f mätbar avbildning

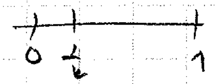
f integrerbar? $x\in(0,1)\Rightarrow \log x<0 \Rightarrow x\log x<0$ i $(0,1)$

$$\int_{(0,1)}|f(x)| = \int_{\mathbb{Q}\cap(0,1)}|f(x)|+\int_{\mathbb{Q}^c\cap(0,1)}|f(x)| = \underbrace{\int_{\mathbb{Q}\cap(0,1)}\frac{1}{x}}_{=0}+\int_{\mathbb{Q}^c\cap(0,1)}(-x\log x)$$

$=0$ ty $m(\mathbb{Q}\cap(0,1))=0$

$(0,1)=(\mathbb{Q}\cap(0,1))\cup(\mathbb{Q}^c\cap(0,1))$ disjunkt union eftersom också $\int_{\mathbb{R} \setminus (0,1)} (-x \log x) = 0$, så räcker det att visa att

$$\int_0^1 (-x \log x) < \infty$$



$x \mapsto -x \log x \geq 0$ på $(0,1)$

MKS $\Rightarrow$

$$\int_0^1 (-x \log x) \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{1/k}^1 (-x \log x)\,dx \overset{4.19}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{(R)\int_{1/k}^1 (-x \log x)\,dx}_{\text{Riemann integral}}$$

(ty $g_k(x) = (-x \log x) \cdot \chi_{[\frac{1}{k},1)}(x) \nearrow -x \log x$ i $(0,1)$).

där partiell integrering (A II) $\Rightarrow$

$$(R)\int_{1/k}^1 (-x \log x)\,dx = -\Big/_{1/k}^{1} \frac{x^2}{2} \log x + \int_{1/k}^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$\begin{pmatrix} f' = -x \\ g = \log x \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2} \underbrace{\log\left(\frac{1}{k}\right)}_{= -\log k} + \frac{1}{4} \Big/_{1/k}^{1} x^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\log k}{k^2} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

eftersom $\frac{\log k}{k^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

alltså: $\int_0^1 |f| = \frac{1}{4} < \infty$, så f integrerbar över $(0,1)$

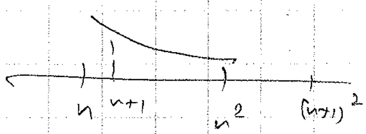
$$|f(x)| = -x \log x \Rightarrow \int_0^1 f \overset{\text{ovan}}{=} \int_0^1 x \log x\,dx = -\frac{1}{4}.$$

(4.) Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Lösn med konvergenssatser (men se kommentar* nedan!)

$$\int_n^{n^2} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{1+x^2} \cdot \chi_{(n,n^2)}}_{= f_n(x)}\,dx$$



MKS inte tillämpbar (inte växande: $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ gäller inte allmänt i $[1,\infty)$).

DKS?

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in [1,\infty),\ n \in \mathbb{N}$$

$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ integrerbar i $[1,\infty)$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{4.19}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{(R)\int_1^k \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{\text{Riemann int.}} =$$

Kursprovs genomgång: 2.3.2016

$$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [1,\infty) \quad \text{(se Analys I)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \Big/_{1}^{k} \arctan(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\arctan(k) - \arctan(1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan(1)$$

$$\boxed{\text{faktum (A I)} \quad \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow g$ intbar över $[1,\infty)$

(MKS ovan på $g_k(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \chi_{[1,k]}(x) \nearrow_{k\to\infty} g(x)$).

alltså DKS $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} \frac{1}{1+x^2} \chi_{[n,n^2]}(x)\,dx$$

$$\overset{\text{DKS}}{=} \int_{[1,\infty)} \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^2} \chi_{[n,n^2]}(x)}_{=\,?} \Big)\,dx \overset{(**)}{=} \int_{[1,\infty)} 0 \cdot dx = 0$$

eftersom $x \in [1,\infty)$ given $\Rightarrow x \notin [n, n^2]$ då $n > x \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot \chi_{[n,n^2]}(x) \equiv 0.$$

Kommentar*: $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ kan beräknas explicit utan konv.-satser (A II räcker)

$$\int_n^{n^2} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big/_{n}^{n^2} \arctan(x) = \arctan(n^2) - \arctan(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \;!$$

(bonusuppgift: gränsvärdesuppgift där konvergenssatser verkligen behövs

(5.) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k x^{-2} e^{x/k} \cos(x/k)\,dx.$$

Lösn: Låt

$$f_k(x) = x^{-2} \underbrace{e^{x/k}}_{\le e \text{ i } [1,k]} \cos(x/k) \cdot \chi_{[1,k]}(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in [1,\infty)$$

3.11 $\Rightarrow f_k$ mätbar $\forall k$.

Då är

$$|f_k(x)| = \frac{e^{x/k}}{x^2} \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right|}_{\le 1} \cdot \chi_{[1,k]}(x) \le \frac{e}{x^2} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ x \in [1,\infty)$$

(varning: $f_k(x) = 0$ då $x > k$, om använder $0 < e^{x/k} \le e^x$ på hela $[1,\infty)$

$\Longrightarrow x \mapsto \frac{e^x}{x^2}$ inte integrerbar över $[1,\infty)$).

Kursprovs genomgång 2.3.2016

$x \mapsto g(x) = \frac{e}{x^2}$ intbar över $[1,\infty)$: (som tidigare)

$$\int_1^\infty \frac{e}{x^2}\,dx \overset{MKS}{=} e \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{1}{x^2} = e \cdot \lim_{k\to\infty} \Big/_1^k \left(-\frac{1}{x}\right) = e \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k}\right) = e < \infty.$$

DKS. $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{e^{x/k}}{x^2} \cos\left(\frac{x}{k}\right) dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{e^{x/k}}{x^2} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \chi_{[1,k]}(x)\,dx$$

$$= \int_1^\infty \underbrace{\left(\lim_{k\to\infty} \frac{e^{x/k}}{x^2} \cos\left(\frac{x}{k}\right) \chi_{[1,k]}(x) \right)}_{\overset{(*)}{=} \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \overset{ovan}{=} \underline{\underline{1}}$$

eftersom $(*)$: för varje $x \in [1,\infty)$ fixerat är

$$\begin{cases} e^{x/k} \xrightarrow{k\to\infty} e^0 = 1 \\ \cos\left(\frac{x}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \cos(0) = 1 \qquad (\cos(\cdot) \text{ kontin. i } 0) \\ \chi_{[1,k]}(x) \equiv 1 \text{ då } k > x. \end{cases}$$