Mått o. Integrationsteori övning 4

2016 modellsvar

1:1

4:1 <u>Påst</u> finns delmängder $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ s.a. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ och

$$m^*(A_1 \cup A_2) < m^*(A_1) + m^*(A_2)$$

(där $m^*(\cdot)$ = 1-dim. Lebesgue yttermåttet).

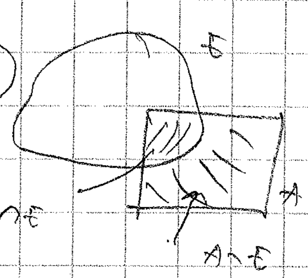
<u>Tolkning</u>: Lebesgue yttermåttet inte additivt för två mängder

<u>Lösn</u> 2.69 $\Rightarrow$ finns $E \subset \mathbb{R}$ så att E <u>inte</u> Lebesgue mätbar mängd

definitionen av mätbarhet (Caratheodorys villkor) $\Rightarrow$ finns testmängd $A \subset \mathbb{R}$ s.a.

$$m^*(A) < m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

"som 2-dim bild"



Då är

$$A = (A \cap E) \cup (A \setminus E) \quad \text{disjunkt union}$$

välj $A_1 = A \cap E$, $A_2 = A \setminus E$ $\Rightarrow$

$$m^*(A_1 \cup A_2) < m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

<u>Kommentar</u> likande exempel i $\mathbb{R}^n$ (från $\mathcal{L}eb(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$).

Anta $(X, \mathcal{T}, \mu)$ måttrum, $\{A_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ uppräkneligt familj och definiera

$$\limsup_{j\to\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \right).$$

4:2 <u>Påst 1</u> $\limsup_{j\to\infty} A_j \in \mathcal{T}$

<u>obs</u> $\mathcal{T}$ σ-algebra $\Rightarrow$ $B_k \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \in \mathcal{T}$ (uppräkneligt union) $\forall k = 1, 2 \ldots$

$\mathcal{T}$ σ-algebra $\Rightarrow$ $\limsup_{j\to\infty} A_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underset{\mathcal{T}\ \forall k}{\underset{\cap}{B_k}} \in \mathcal{T}$ (uppräkneligt snitt)

<u>Påst 2</u> Låt $A = \limsup_{j\to\infty} A_j$. Då gäller:

$$x \in A \iff x \in A_j \text{ för oändligt många index } j \in \mathbb{N}.$$

<u>"$\Rightarrow$"</u> anta $x \in A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ där $B_k \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$

<u>anta</u> $m_1 < m_2 < \ldots < m_r$ och $x \in A_{m_\ell}$ för $\ell = 1, \ldots, r$

ovan $\overset{\text{snitt}}{\Rightarrow}$ $x \in B_{m_r+1} = \bigcup_{j=m_r+1} A_j$ $\Rightarrow$ finns index $m_{r+1} \geq m_r + 1 > m_r$ så att

$x \in A_{m_{r+1}}$ ovan $r \in \mathbb{N}$ godtyckligt $\Rightarrow$ $x \in A_{m_\ell}$ för alla

$m_1 < m_2 < \ldots$ så att $x \in A_j$ för oändligt många $j \in \mathbb{N}$.

"⇐" anta $x \in A_j$ för oändligt många $j \in \mathbb{N}$

givet $k \in \mathbb{N}$ ⇒ $A_1, \dots, A_{k-1}$ ändligt många mängder ⇒ finns $j \geq k$ så att

$$x \in A_j \subset \bigcup_{j \geq k} A_j$$

k godtyckligt ⇒ $$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{j \geq k}^{\infty} A_j \Big) \overset{\text{def.}}{=} A$$

(4:3) (Borel-Cantellis lemma) Påstå om $A_j \in \mathcal{T}$ $\forall j \in \mathbb{N}$ och $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$,

så är $$\mu\big(\limsup_{j \to \infty} A_j\big) = 0.$$

Bevis

beteckna igen $B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$, då $k \in \mathbb{N}$

def ⇒ $B_{k+1} \subset B_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ (avtagande familj i $\mathcal{T}$)

och $$\mu(B_1) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \overset{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty \quad \text{(antagandet)}.$$

Konvergenssatsen 2.61 ⇒

$$0 \leq \mu\big(\limsup_{j\to\infty} A_j\big) = \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\Big) \overset{(*)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j)\Big) = 0$$

resttermen av konv. serie $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ (se A II, 13.2.1)

alltså $$\mu\big(\limsup_{j\to\infty} A_j\big) = 0.$$

Vi använde ovan:

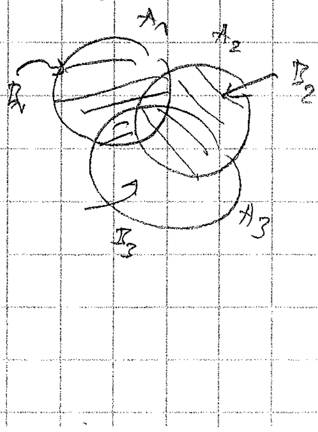
(*) varje mått μ är subadditivt: om $\{A_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ så är

(1) $$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

orsak: def $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, allmänt $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ då $n \in \mathbb{N}$

⇒ $B_n \subset A_n$ $\forall n$, $B_n \in \mathcal{T}$ $\forall n$ och $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ med

(B_j) parvisd, dvs $B_i \cap B_j = \emptyset$ då $i \neq j$



se Lemma 2.29. Då är

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) \overset{\sigma\text{-additivitet}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\mu(B_j)}_{\leq \mu(A_j)\ \forall j,\ \mu \text{ monoton}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Mått o. Integrationsteori / övning 4 (2016)

1:3

Kommentar **Borel–Cantellis 2. lemma** om μ sannolikhetsmått (dvs $\mu(X)=1$) och $\{A_j : j\in\mathbb{N}\}\subset \mathcal{T}$ oberoende familj så gäller:

om $\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)=\infty$, så är $\mu(\limsup_{j\to\infty} A_j)=1$.

Obs. $\{A_j : j\in\mathbb{N}\}\subset \mathcal{T}$ är en oberoende familj om

$$\mu(A_{j_1}\cap\dots\cap A_{j_r})=\prod_{k=1}^{r}\mu(A_{j_k}) \quad \text{för alla } j_1<\dots<j_r,\ r\in\mathbb{N}$$

4:4 Definiera $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ genom

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{om } x\in\mathbb{Q}\\ 1, & \text{om } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$\mathbb{Q}$ = rationella talen

Påst f mätbar avbildning $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Lösn (1. sättet (med Sats 3.11)).

$$f(x)=e^x\cdot\chi_{\mathbb{Q}}(x)+\chi_{\mathbb{Q}^c}(x),\quad x\in\mathbb{R}$$

där $\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$ för $E\subset\mathbb{R}$.

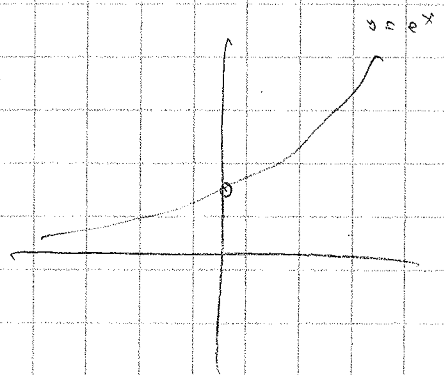
$\mathbb{Q},\mathbb{Q}^c$ mätbara mängder $\overset{3.8}{\Rightarrow}$ $\chi_{\mathbb{Q}}$ och $\chi_{\mathbb{Q}^c}$ mätbara avbildningar

$x\mapsto e^x$ kontinuerlig $\overset{3.5}{\Rightarrow}$ e^x mätbar i $\mathbb{R}$

3.11 (produkt, summa) $\Rightarrow$ $x\mapsto \underbrace{e^x}_{\text{mätbar}}\underbrace{\chi_{\mathbb{Q}}(x)}_{\text{mätbar}}$ mätbar och

$$x\mapsto \underbrace{e^x\chi_{\mathbb{Q}}(x)}_{\text{mätbar}}+\underbrace{\chi_{\mathbb{Q}^c}(x)}_{\text{mätbar}} \quad \text{mätbar avbildn. } \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

2. sättet (med definitionen / Sats 3.12) Låt $a\in\mathbb{R}$ givet



Då är

$$\{x\in\mathbb{R}: f(x)<a\}=\begin{cases}\emptyset & \text{om } a\le 0\\ \mathbb{Q}\cap\{x: e^x<a\} & \text{om } 0<a\le 1\\ (\mathbb{Q}\cap\{x: e^x<a\})\cup\mathbb{Q}^c & \text{om } a>1\end{cases}$$

alla mängder på HS är mätbara (exempelvis: $x\overset{g}{\mapsto} e^x$ kontin. $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\underbrace{\{x\in\mathbb{R}: e^x<a\}=g^{-1}(\underbrace{(-\infty,a)}_{\text{öppen}})}_{\text{öppen}} \Rightarrow \text{mätbar}\ )$$

3.12 $\Rightarrow$

f mätbar avbildn. $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

4:5 Bestäm $\limsup_{n\to\infty} a_n$ och $\liminf_{n\to\infty} a_n$ då

(1) $a_n = (-1)^n$ dvs $-1, 1, -1, 1, \ldots$

(2) $a_n = \sin(q_n)$, där $\{q_n : n\in\mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ är en given uppräkning av de rationella talen (dvs $q_n \neq q_m$ om $n\neq m$, och varje rationellt tal $q\in\mathbb{Q}$ finns i $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$).

Lösning påminn $b_k = \sup_{j\geq k} a_j$, $k\in\mathbb{N}$, avtagande talföljd i $\overline{\mathbb{R}}$,

$c_k = \inf_{j\geq k} a_j$, $k\in\mathbb{N}$, växande talföljd i $\overline{\mathbb{R}}$

och $\limsup_{j\to\infty} a_j = \lim_{k\to\infty} b_k$, $\liminf_{j\to\infty} a_j = \lim_{k\to\infty} c_k$ (lim i $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$)

(1) $b_k = \sup_{j\geq k} (-1)^j = 1 \quad \forall k$, $\quad c_k = \inf_{j\geq k} (-1)^j = -1 \quad \forall k$

$\Rightarrow \limsup_{j\to\infty} (-1)^j = 1$, $\quad \liminf_{j\to\infty} (-1)^j = -1$

(2) påminn $-1 \leq \sin(t) \leq 1 \quad \forall t\in\mathbb{R}$, $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Analys I $\forall k\in\mathbb{N}$ finns $q\in\mathbb{Q}$ med $\left|q - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{k}$

$\Rightarrow$ finns delföljd (q_{n_k}) (dvs $n_1 < n_2 < \ldots$) så att $q_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{\pi}{2}$

$t \mapsto \sin(t)$ kontin. $\Rightarrow$ $\sin(q_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Då är $b_m = \sup_{j\geq m} \sin(q_j) = 1$ (m givet $\Rightarrow n_k \geq m$ då $k\geq k_0$)

och $\limsup_{j\to\infty} \sin(q_j) = 1$.

på liknande sätt: finns delföljd (q_{m_k}) med $q_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{3\pi}{2}$ och alltså

$\sin(q_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

Detta ger $\liminf_{j\to\infty} \sin(q_j) = -1$.

extra fråga vad är $\limsup_{n\to\infty} \sin(n)$ dvs talföljden $\sin(1), \sin(2), \ldots$

Svar $\limsup_{n\to\infty} \sin(n) = 1$ (och $\liminf_{n\to\infty} \sin(n) = -1$)

google $\limsup \sin(n)$ (behöver att $\pi\notin\mathbb{Q}$ irrationellt tal).

4:6 anta $f : A \to [0,\infty)$ en mätbar avbildning, där $A\subset\mathbb{R}^n$.

Beteckna $A_r = \{x\in A : f(x) > r\}$ då $r\geq 0$.

Påvisa om $m(A_0) > 0$, så finns $k\in\mathbb{N}$ med $m(A_{1/k}) > 0$.

Mått- o. Integrationsteori, övning 4 (2016)

1.5

Lösn: beteckna $B_k = A_{1/k} = \{x \in A : f(x) > \frac{1}{k}\}$ (förenkling av beteckningen)

där $k \in \mathbb{N}$

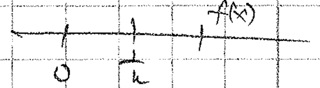
$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \Rightarrow B_k \subset B_{k+1}$ för alla $k \in \mathbb{N}$ (om $x \in B_k \Rightarrow f(x) > \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1}$

$\Rightarrow x \in B_{k+1}$).

dvs (B_k) växande familj av mätbara mängder i $\mathbb{R}^n$

vidare gäller $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A_0$

ty: $B_k \subset A_0 \ \forall k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset A_0$



omvänt: om $x \in A_0 \Rightarrow f(x) > 0$

$\Rightarrow$ finns $k \in \mathbb{N}$ med $0 < \frac{1}{k} < f(x)$ dvs $x \in B_k$.

konvergenssats 2.60 $\Rightarrow$

$$0 \underset{\text{antag.}}{<} m(A_0) = m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \overset{\text{växande familj}}{=} \lim_{k\to\infty} m(B_k)$$

gränsvärdet $m(A_0) > 0 \overset{AI}{\Rightarrow}$ finns $k_0 \in \mathbb{N}$ så att

$$m(B_k) = m(A_{1/k}) > \frac{1}{2} m(A_0) > 0 \quad \text{för alla } k \geq k_0$$