Mått o. Integrationsteori 2016

Övning 3 modellsvar

1:1

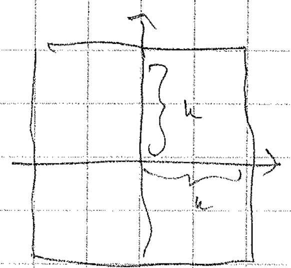
(3:1) Motivera varför $m_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

<u>Lösning</u> för $k \in \mathbb{N}$ låt $I_k = (-k,k)^n = (-k,k) \times \dots \times (-k,k)$

som öppet n-intervall $\subset \mathbb{R}^n$. Då är

$$m_n(\mathbb{R}^n) \underset{\substack{m_n(\cdot)\\ \text{monoton}}}{\geq} m_n(I_k) \underset{\substack{\text{teorin}\\ (2.40)}}{=} \ell(I_k) = (2k)^n \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

$n=2$



(3:2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en <u>Lipschitz avbildning</u> om det finns $L < \infty$ så att

(*) $\quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

<u>Påst</u> om $A \subset \mathbb{R}$ satisfierar $m(A) = 0$, så är bildmängden

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

mätbar i $\mathbb{R}$ och $m(f(A)) = 0$.

<u>Bevis</u> räcker visa att $m^*(f(A)) = 0$. Teorin (2.23) $\Rightarrow$ då är $f(A)$ mätbar och $m(f(A)) = m^*(f(A)) = 0$.

$\varepsilon > 0$ godtyckligt $\underset{m(A)}{\overset{\text{def. av}}{\Longrightarrow}}$ finns öppna intervall $I_k \subset \mathbb{R}$ för $k \in \mathbb{N}$ så att

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \varepsilon.$$

Då är

$$f(A) \subset f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(I_k)$$

och

(**) $$m^*(f(A)) \underset{\text{subaddit.}}{\overset{m^*(\cdot)}{\leq}} \sum_{k=1}^{\infty} m^*(f(I_k))$$

f Lipschitz $\Rightarrow$ f kontinuerlig i $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ bilden $f(I_k)$ <u>intervall</u> (av någon typ)

<u>Nämligen</u> Bolzanos sats (A I) $\Longrightarrow$

$$(\inf f(I_k), \sup f(I_k)) \subset f(I_k) \subset [\inf f(I_k), \sup f(I_k)]$$

Om $s, t \in I_k$, så ger (*) att

Mått o. Integrationsteori: övn 3

1:2

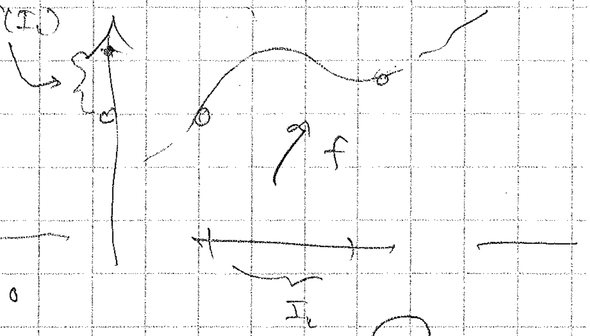
$$|f(s)-f(t)| \le L|s-t|$$

Ta sup över $s,t \in I_k \Rightarrow \ell(f(I_k)) \le L\cdot \ell(I_k)$ då $k \in \mathbb{N}$.

Alltså (**) $\Rightarrow$

$$m^*(f(A)) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(\underbrace{f(I_k)}_{\text{intervall}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\ell(f(I_k))}_{\le L\cdot \ell(I_k)} \le L\cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)}_{<\varepsilon} < L\cdot\varepsilon$$

Låt $\varepsilon \downarrow 0+ \Rightarrow m^*(f(A)) = 0$.

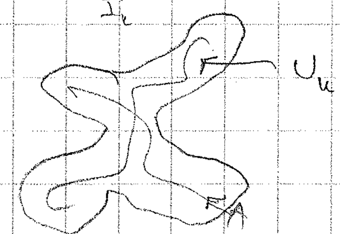


Kommentar: ovanstående gäller också om

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ är Lipschitz

3:3 Anta $A \subset \mathbb{R}^n$ satisfierar: mot varje $\varepsilon > 0$ finns en öppen mängd $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ så att

$A \subset U_\varepsilon$ och $m^*(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$.



Påst: A är Lebesgue mätbar i $\mathbb{R}^n$.

Bevis: för varje $k \in \mathbb{N}$ och $\varepsilon = \frac{1}{k}$ finns $U_k \subset \mathbb{R}^n$ öppen mängd så att

$A \subset U_k$ och $m^*(U_k \setminus A) < \varepsilon$.

Låt $V = \underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{U_k}_{\text{mätbar}}}_{\text{mätbar (2.30)}} \Rightarrow V$ mätbar ty $U_k \subset \mathbb{R}^n$ öppen $\overset{2.12}{\Rightarrow} U_k$ mätbar för alla $k \in \mathbb{N}$

och $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = V$. Dessutom $V \setminus A = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \cap A^c \subset U_\ell \cap A^c = U_\ell \setminus A$

för alla $\ell \in \mathbb{N} \overset{\text{monotonicitet}}{\Rightarrow}$

$$0 \le m^*(V \setminus A) \le m^*(U_\ell \setminus A) < \frac{1}{\ell} \xrightarrow{\ell \to \infty} 0$$

$\overset{2.23}{\Rightarrow}$ $V \setminus A$ mätbar och

$V = A \cup (V \setminus A)$ disjunkt union, där $A \subset V$, $\Rightarrow$

$$A = \underbrace{V}_{\text{mätbar}} \cap \underbrace{(\underbrace{V \setminus A}_{\text{mätbar}})^c}_{\text{mätbar (2.24)}} \text{ är mätbar.}$$

Mått o. Integrationsteori   Björn

1:3

Kommentar (alternativ definition av Lebesgue mätbara mängder)

$A \subset \mathbb{R}^n$ är Lebesgue mätbar $\iff$

mot varje $k \in \mathbb{N}$ finns öppen $U_k \subset \mathbb{R}^n$ och sluten $F_k \subset \mathbb{R}^n$ så att

$$F_k \subset A \subset U_k \quad \text{och} \quad m^*(U_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$$

3:4 Lindelöfs sats Låt $B \subset \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig mängd och anta att

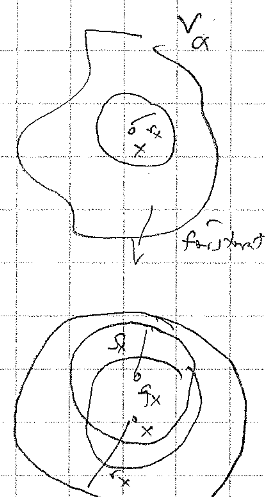
$$B \subset \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

där varje $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ är öppen då $\alpha \in I$. Då finns det en uppräknelig delfamilj $\{V_{\alpha_j} : j \in \mathbb{N}\}$ (alltså $\{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\} \subset I$) så att

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_{\alpha_j}.$$

Bevis givet $x = (x_1, \dots, x_n) \in B \implies$ finns $\alpha \in I$ så att

$$\left.\begin{array}{l} x \in V_\alpha \\ V_\alpha \text{ öppen mängd} \end{array}\right\} \implies \text{finns öppet klot } x \in B(x, r_x) \subset V_\alpha$$



välj $s_x \in \mathbb{Q}$ så att $0 < s_x < \frac{1}{2} \cdot r_x$ och

$q_x = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ så att

$$|x - q_x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - q_j|^2} < s_x$$

(OK om väljer $q_j \in \mathbb{Q}$ med $|x_j - q_j| < \frac{s_x}{\sqrt{n}}$ för varje $j = 1, \dots, n$).

Då är

$$(*) \qquad x \in B(q_x, s_x) \subset B(x, r_x) \subset V_\alpha$$

nämligen om $z \in B(q_x, s_x) \overset{\Delta\text{-ol}}{\implies}$

$$|x - z| \le |x - q_x| + |q_x - z| < s_x + s_x = 2s_x < r_x$$

Mot varje $x \in B$ fixera $(q_x, s_x) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_+$ samt index $\alpha = \alpha(q_x, s_x) \in I$ som i $(*)$:

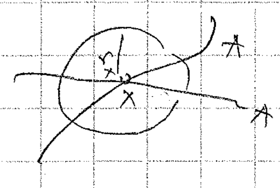
$\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}_+$ uppräknelig (som $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, samt induktion) och

$$B \subset \bigcup_{(q_x, s_x)} V_{\alpha(q_x, s_x)} \qquad \text{uppräknelig delfamilj!}$$

Om $x \in B$ givet $\overset{(*)}{\implies} x \in B(q_x, s_x) \subset V_{\alpha(q_x, s_x)}$

Mått o. Integrationsteori - övn 3. 1:4

3:5 Anta $A \subset \mathbb{R}^n$ har egenskapen: för varje $x \in A$ finns öppet klot $B(x, r_x)$ så att $m^*(A \cap B(x, r_x)) = 0$



Påst $m^*(A) = 0$ (och A är mätbar).

Bevis $x \in A \Rightarrow x \in B(x, r_x)$ med $m^*(A \cap B(x, r_x)) = 0$.

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{x \in A} \underbrace{B(x, r_x)}_{\text{öppen } \forall x} \quad (\text{indexmängd} = A)$$

Lindelöf $\Rightarrow$ finns uppräkneligt många $\{x_j : j \in \mathbb{N}\} \subset A$ så att

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_{x_j})$$

Då är

$$A = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_{x_j})\right) \overset{\text{distrib.}}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(A \cap B(x_j, r_{x_j})\right) \text{ så att}$$

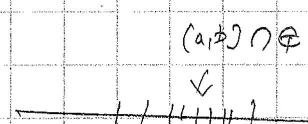
$$0 \le m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \left(A \cap B(x_j, r_{x_j})\right)\right) \overset{\text{subadd.}}{\le} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{m^*(A \cap B(x_j, r_{x_j}))}_{=0\ \forall j} = 0.$$

alltså $m^*(A) = 0$

3:6 **Påst** det finns inget mått $\mu : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ på en σ-algebra $\mathcal{T} \subset P(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q}$ rationella talen, så att

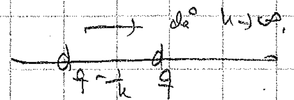
(i) $(a,b] \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{T}$ för alla $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$

(ii) $\mu((a,b] \cap \mathbb{Q}) = b - a$ för alla $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$



Lösning Om $k \in \mathbb{N}$ och $q \in \mathbb{Q}$ så

enligt (i)
$$\{q\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(\underbrace{(q - \tfrac{1}{k}, q] \cap \mathbb{Q}}_{\in \mathcal{T}\ \forall k}\Big) \in \mathcal{T} \quad (\text{uppräkneligt snitt}).$$



enligt (ii) och monotoniciteten av μ $\Rightarrow$ för alla $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \le \mu(\{q\}) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (q - \tfrac{1}{k}, q] \cap \mathbb{Q}\right) \le \mu\left((q - \tfrac{1}{k}, q] \cap \mathbb{Q}\right) = q - (q - \tfrac{1}{k}) = \tfrac{1}{k}$$

Men $\mathbb{Q}$ uppräknelig (1.17) $\Rightarrow$ $(a,b] \cap \mathbb{Q}$ uppräknelig då $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ så att

$$\mu((a,b] \cap \mathbb{Q}) = \mu\Big(\bigcup_{\substack{a < q \le b \\ q \in \mathbb{Q}}} \{q\}\Big) \overset{\substack{\text{disjunkt} \\ \text{union} \\ (\sigma\text{-addit.})}}{=} \sum_{\substack{a < q \le b \\ q \in \mathbb{Q}}} \underbrace{\mu(\{q\})}_{=0} = 0.$$

Detta är en motsägelse med (ii) (ifall μ som ovan existerar).