Mått o. Integrationsteori 2016

övning 2 modellsvar

(1) Anta $a_j \ge 0 \ \forall j \in I$ och $M \overset{def}{=} \sum_{j\in I} a_j < +\infty$.

Påst: $I_0 \overset{def}{=} \{ i \in I : a_i > 0 \}$ är en uppräknelig mängd

Lösn enligt def $\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J \subset I \text{ ändlig}} \sum_{j \in J} a_j$

för $k \in \mathbb{N}$ definiera

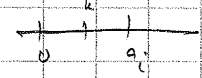
$$I_k = \{ i \in I : a_i > \tfrac{1}{k} \}$$

Då är

$$I_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

nämligen $I_k \subset I_0 \ \forall k \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset I_0$

om $i \in I_0 \Rightarrow a_i > 0 \Rightarrow$ finns $k \in \mathbb{N}$ med $a_i > \frac{1}{k}$ dvs $i \in I_k$.



teorin (Sats 1.16) $\Rightarrow$ räcker visa att I_k är uppräknelig för varje $k \in \mathbb{N}$

(1.16 $\Rightarrow$ $I_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ också uppräknelig).

Def. $|J|$ = antalet element i J

Anta $J \subset I_k$ ändlig delmängd. Då är

$$\infty > M \ge \sum_{i\in I} a_i \ge \sum_{j \in I_k} a_j \ge \sum_{j\in J} \underbrace{a_j}_{> \frac{1}{k}} \ge \sum_{j \in J} \underbrace{\tfrac{1}{k}}_{\text{konstant}} = |J| \cdot \tfrac{1}{k}$$

lös $\Rightarrow$ $|J| \le k \cdot M$ (HS oberoende av $J \subset I_k$) $\Rightarrow$

antalet element $|I_k| \le k \cdot M$

(2.) Anta $A = \{ y_k : k \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R}^n$ godtycklig uppräknelig mängd.

Visa enligt def. att $m_n^*(A) = 0$.

Lösn $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ givet $\Rightarrow$ $x \in \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (x_j - \delta, x_j + \delta)}_{= I}$ öppet n-intervall

$\Rightarrow$ $m_n^*(\{x\}) \le \ell(I) = (2\delta)^n = 2^n \delta^n$ där $2^n \delta^n \to 0$ då $\delta \to 0+$ (2^n konstant).

Anta $\varepsilon > 0$ givet godtyckligt. För varje $k \in \mathbb{N}$ finns öppet n-intervall

$y_k \in I_k$ så att $\ell(I_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ (då väljer ovan $\delta > 0$ tillräckligt litet.)

Då är $A = \{ y_k : k \in \mathbb{N} \} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ och

$$m_n^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \quad \left(\text{geometrisk serie } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 1 \right)$$

Låt $\varepsilon \downarrow 0+ \implies m_n^*(A) = 0$.

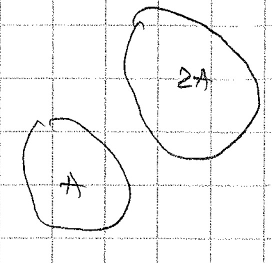
Kommentar: enligt teorin (subadditivitet) är

$$0 \le m_n^*(A) = m_n^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{y_k\}\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{m_n^*(\{y_k\})}_{=0} = 0$$

(enligt första delen av beviset)

(3) Anta $A \subset \mathbb{R}^n$ godtycklig delmängd, $t > 0$ och

$$tA = \{ty : y \in A\}.$$



Påst: $m_n^*(tA) = t^n\, m_n^*(A)$

Bevis: (*) $\underbrace{m_n^*(tA) \le t^n m_n^*(A)}$: anta $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ godtycklig Lebesgue övertäckning med öppna n-intervall, där $I_k = \prod_{j=1}^{n} (a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Då är

(**) $tA \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} tI_k$

där $tI_k = \prod_{j=1}^{n} (t \cdot a_j^{(k)}, t \cdot b_j^{(k)})$ (varje 1-dim. intervall multipliceras med $t > 0$)

nämligen: $y \in A \Rightarrow y \in I_k$ något k så att $a_j^{(k)} < y_j < b_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, n$

där $y = (y_1, \dots, y_n)$

Då är $ty = (ty_1, \dots, ty_n)$ där $(t > 0)$: $t \cdot a_j^{(k)} < ty_j < t \cdot b_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, n$

Definitionen och (**) ger

$$m_n^*(tA) \overset{\inf}{\le} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(t \cdot I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \underbrace{(tb_j^{(k)} - ta_j^{(k)})}_{= t(b_j^{(k)} - a_j^{(k)})}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{t^n}_{\text{konstant}} \cdot \ell(I_k) = t^n \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$$

Inf över övertäckningar $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \overset{\text{def.}}{\Longrightarrow} \boxed{m_n^*(tA) \le t^n\, m_n^*(A)}$

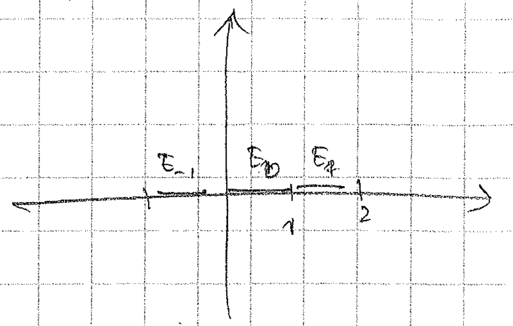
För motsatta olikheten, betrakta $A = \frac{1}{t}(tA)$. Tillämpa 1. delen på detta $\Rightarrow$

$$m_n^*(A) = m_n^*\Big(\frac{1}{t}(tA)\Big) \le \frac{1}{t^n}\, m_n^*(tA)$$

$\overset{t^n > 0}{\Longrightarrow} \boxed{t^n\, m_n^*(A) \le m_n^*(tA)}$. Kombinera ovanstående $\Rightarrow$ $\square$.

Mått o. Integrationsteori övn 2. (2:3)

(4.) Låt $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ (x-axeln $\subset \mathbb{R}^2$)



Påst. $m_2^*(A) = 0$.

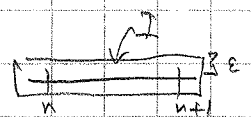
Lösn via subadditiviteten

Låt $E_n = \{(x,0) : n \le x \le n+1\}$, då $n \in \mathbb{Z}$

Observera att $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n$

räcker visa att $m_2^*(E_n) = 0$ för alla $n \in \mathbb{Z}$.

$\varepsilon > 0$ givet $\Longrightarrow$ $E_n \subset (n-\varepsilon, n+1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \equiv I$



som öppet 2-intervall $\overset{\text{def}}{\Longrightarrow}$

$$m_2^*(E_n) \le \ell(I) = 2\varepsilon\big(n+1+\varepsilon-(n-\varepsilon)\big) = 2\varepsilon(1+2\varepsilon) \to 0 \quad \text{då } \varepsilon \downarrow 0+$$

$m_2^*(\cdot)$ subadditiv $\Longrightarrow$

$$0 \le m_2^*(A) = m_2^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{m_2^*(E_n)}_{=0\ \forall n} = 0.$$

dvs. $m_2^*(A) = 0$.

Kommentar: givet $\varepsilon > 0$ en Lebesgue övertäckning av A erhålls genom att välja

$$E_n \subset \Big(n - \frac{\varepsilon}{2^{|n|}},\ n+1+\frac{\varepsilon}{2^{|n|}}\Big) \times \Big(-\frac{\varepsilon}{2^{|n|}}, \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}\Big) \quad \text{då } n \in \mathbb{Z}$$

(dvs storleken minskar geometriskt med $|n|$).

på detta sätt visar man väsentligen Sats 2.6.(3) på nytt (=subadditiviteten).

(5.) Undersök om mängden

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}\}$$

är Lebesgue mätbar i $\mathbb{R}^2$. (kursprovsuppgift okt).

$\mathbb{Q}$ = rationella talen $\subset \mathbb{R}$

Lösn

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}^c\} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c$$

$$= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big(\{q\} \times \mathbb{Q}^c\big)$$

uppräknelig union (ty $\mathbb{Q}$ uppräknelig; se 1.17)

Fundamentalsatsen 2.30 $\Longrightarrow$ räcker visa att

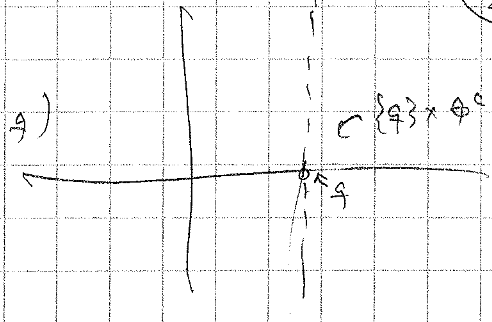
$\{q\} \times \mathbb{Q}^c = \{(q,y) : y \in \mathbb{Q}^c\}$ är mätbar i $\mathbb{R}^2$ för varje $q \in \mathbb{Q}$

Mått o. Integrationsteori övn 2

2:4

i själva verket: $\{q\}\times\mathbb{Q}^c \subset \{q\}\times\mathbb{R}$ (lodrät linje genom q)

$$0 \le m_2^*(\{q\}\times\mathbb{Q}^c) \le m_2^*(\{q\}\times\mathbb{R}) = 0$$



(Bevisas på samma sätt som i (4)).

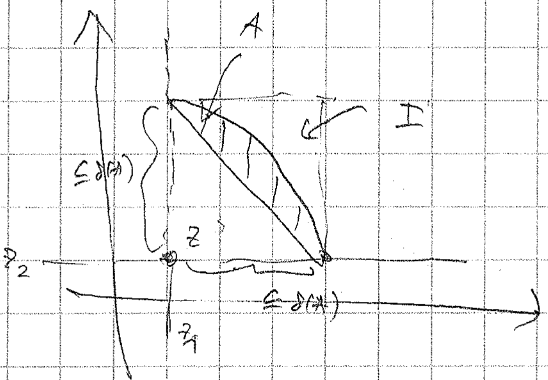
teori $\Rightarrow$ $\{q\}\times\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}^2$ mätbar

alltså $A = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \underbrace{(\{q\}\times\mathbb{Q}^c)}_{\text{mätbar } \forall q}$ är mätbar (sats 2.20)

(6.) anta $A \subset \mathbb{R}^2$ begränsad mängd och dess diameter

$$\delta(A) = \sup\{|x-y| : x,y\in A\}.$$

Påst $m_2^*(A) \le \delta(A)^2$



Bevis $\{x_1 : (x_1,x_2)\in A\}$ och $\{x_2 : (x_1,x_2)\in A\}$ begränsade i $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ finns $z_1 = \inf\{x_1 : (x_1,x_2)\in A\}$

$z_2 = \inf\{x_2 : (x_1,x_2)\in A\}$

Betrakta punkten $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$:

Påst $A \subset [z_1, z_1+\delta(A)] \times [z_2, z_2+\delta(A)] \overset{\text{Def}}{\equiv} I$ sluten 2-intervall i $\mathbb{R}^2$

om $x=(x_1,x_2)\in A$ godtycklig $\Rightarrow$ $x_1 \ge z_1$ och $x_2 \ge z_2$ (undre gränser!)

om $y=(y_1,y_2)\in A$ $\Rightarrow$

$$|x-y| = \sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2} \le \delta(A)$$

$\Rightarrow$ $|x_1-y_1| \le \delta(A) \xRightarrow[\text{"bevisas" (inf)}]{\text{olikheter}} |x_1-z_1| \le \delta(A)$ dvs $z_1 \le x_1 \le z_1+\delta(A)$ (*)

på samma sätt: $z_2 \le x_2 \le z_2+\delta(A)$

anta $\varepsilon>0$ givet godtyckligt. $A \subset I \subset (z_1-\varepsilon, z_1+\delta(A)+\varepsilon) \times (z_2-\varepsilon, z_2+\delta(A)+\varepsilon) \overset{\text{Def.}}{\equiv} I'$

öppet 2-intervall $\overset{\text{def}}{\Rightarrow}$

$$m_2^*(A) \le \ell(I') = \big(z_1+\delta(A)+\varepsilon-(z_1-\varepsilon)\big)\big(z_2+\delta(A)+\varepsilon-(z_2-\varepsilon)\big)$$

$$= (\delta(A)+2\varepsilon)^2$$

Låt $\varepsilon \to 0+$ $\Rightarrow$ $m_2^*(A) \le \delta(A)^2$.

Kommentarer 1 I sista steget kan även använda Anmärkning 2.39, dvs

$m_n^*(\cdot)$ kan beräknas med övertäckningar av godtyckliga n-intervall i $\mathbb{R}^n$

alltså $m_2^*(A) \le \ell(I) = \delta(A)^2$.

2. motivering av (*) ovan: $|x_1 - y_1| \le \delta(A)$ för alla $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in A$

$\delta > 0$ given $\overset{\inf}{\Longrightarrow}$ finns $y = (y_1, y_2) \in A$ så att $z_1 \le y_1 \le z_1 + \delta$

kombinera med $|x_1 - y_1| \le \delta(A)$

$\Rightarrow |x_1 - z_1| \le \delta(A)$