Mått o. Integrationsteori / övning 7 (4.3.2016)

modellsvar

7:1 anta $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ är en mätbar avbildning och låt

$$g_k(x) = \frac{\cos(f(x))}{1+k\,f(x)^2}, \quad x \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Visa g_k mätbara $\forall k \in \mathbb{N}$ och beräkna $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 g_k$

Lösn g_k sammansatt funktion $x \overset{f}{\underset{\text{mätbar}}{\longmapsto}} f(x) \overset{h_k}{\underset{\text{kontin}}{\longmapsto}} \frac{\cos(f(x))}{1+k\,f(x)^2}, \quad x \in [0,1]$

där $h_k(t) = \frac{\cos(t)}{1+kt^2}$ kontin i $[0,1]$ $\forall k$

$(1+kt^2 \geq 1 \quad \forall t \in [0,1])$

3.9 $\Rightarrow$ g_k mätbar $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$|g_k(x)| = \frac{|\cos(f(x))|}{1+kf(x)^2} \leq \frac{1}{1+kf(x)^2} \leq 1 \quad \forall x \in [0,1], \; k \in \mathbb{N}$$

$|\cos(t)| \leq 1$

$\Rightarrow$ $g(x) \equiv 1$ majorantfunktion på $[0,1]$ till $|g_k|$ $\quad m([0,1]) = 1 < \infty$

BKS 4.47 $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 g_k \overset{BKS}{=} \int_0^1 \Big(\underbrace{\lim_{k\to\infty} g_k(x)}_{=\,?}\Big)\,dx \overset{(*)}{=} \int_0^1 \chi_E(x)\,dx = \underline{\underline{m(E)}}$$

där $E = f^{-1}(0)$

gränsvärdesfunktionen ?

$$\begin{cases} \text{om } x \in [0,1],\; f(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; 1+kf(x)^2 \to \infty \text{ och } |g_k(x)| = \dfrac{\overbrace{|\cos(f(x))|}^{\leq 1}}{1+kf(x)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \\ \text{om } x \in [0,1],\; f(x) = 0 \;\Rightarrow\; g_k(x) = \dfrac{\cos(0)}{1+k\cdot 0^2} = 1 \end{cases}$$

låt $E = f^{-1}(0) = \{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E \\ 1, & x \in E \end{cases}}$ $(*)$

7:2 Anta $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrerbar över $\mathbb{R}^n$.

Visa $\lim_{j\to\infty} j \cdot m(E_j) = 0$ $\quad$ ($m = m_n$ n-dim. Lebesgue mått)

där $E_j := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > j\}$ då $j \in \mathbb{N}$.

Lösn sätt 1 (med DKS)

E_j mätbar i $\mathbb{R}^n$ för alla $j \in \mathbb{N}$ (urbild, $x \mapsto |f(x)|$ mätbar avbildn.)

låt $f_j = |f|\chi_{E_j}$, $j \in \mathbb{N}$ dvs $f_j(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{om } x \in E_j \\ 0, & \text{om } x \notin E_j \end{cases}$

$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mätbara (produkt, 3.11) $\forall j \in \mathbb{N}$

$$|f_j(x)| = |f(x)| \cdot \chi_{E_j}(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j \in \mathbb{N}.$$

antag $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty \Rightarrow$ kan använda DKS 4.45

$$\lim_{j\to\infty} \int_{E_j} |f| \overset{\text{def}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|f| \cdot \chi_{E_j}}_{f_j} \overset{\text{DKS}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_{j\to\infty} |f| \cdot \chi_{E_j} \right) \underset{\text{nedan}}{\overset{(*)}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0.$$

ty
$$\lim_{j\to\infty} |f(x)| \cdot \chi_{E_j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } |f(x)| < \infty \\ \infty, & \text{om } |f(x)| = \infty \end{cases}$$

nämligen om $|f(x)| < \infty \Rightarrow \exists j_0$ s.a. $|f(x)| < j_0 \Rightarrow |f(x)| \underbrace{\chi_{E_j}(x)}_{=0} = 0 \quad \forall j \geq j_0$

också: om $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = \infty\}$, så $m(A) = 0$

$$\Big(\text{om } m(A) > 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f| = \int_{\mathbb{R}^n \setminus A} |f| + \underbrace{\int_A |f|}_{m(A)\cdot\infty = \infty} = \infty \ \text{⚡} \Big).$$

Då gäller:

$$(+) \quad \int_{E_j} |f| \overset{\text{monot.}}{\geq} j \cdot \int_{E_j} 1 = j \cdot m(E_j) \geq 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{j\to\infty} j \cdot m(E_j) = 0}$$

$$|f| \cdot \chi_{E_j} \geq j \cdot \chi_{E_j}$$

Sats 2 (Konvergenssatser för allmänna mått)

$$|f| \geq 0 \overset{4.32}{\Longrightarrow} E \longmapsto \int_E |f| \quad \text{mått} \quad \mathcal{Leb}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$$

$E_{j+1} \subset E_j \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow (E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avtagande familj där

$$\int_{E_j} |f| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty.$$

Konvergenssatsen 4.32 (iv) $\Rightarrow$ med $\mu(E) = \int_E |f|,\ E \in \mathcal{Leb}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{j\to\infty} \int_{E_j} |f| = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j) = \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \int_{\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j} |f| = 0 \quad \text{(som ovan,}$$

ty
$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = \infty\}.$$

Då ger (+) $\Rightarrow \lim_{j\to\infty} j \cdot m(E_j) = 0.$

(7:3) Visa (Sats 4.49). Anta $\{E_j : j\in\mathbb{N}\}\subset \mathrm{Leb}(\mathbb{R}^n)$ parvis disjunkt familj,
$E=\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Då gäller:

(i) Om f intbar i E så är f intbar i E_j $\forall j\in\mathbb{N}$, och

(*) $$\int_E f = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f$$

(ii) Om f intbar i E_j för varje $j\in\mathbb{N}$, och $\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j}|f|<\infty$, så är
f intbar i E och (*) gäller

Bevis (i) $f^+=\max\{f,0\}\geq 0 \Rightarrow f^+=\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{f^+\cdot\chi_{E_j}}_{\geq 0}$

$\overset{4.29}{\underset{\text{Beppo Levi}}{\Rightarrow}}$ $\int_E f^+ = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^+$, likaså $\int_E f^- = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^-$ (där $f^-=-\min(f,0)$)

$\left.\begin{array}{l} f \text{ intbar i } E\\ 0\leq f^+\cdot\chi_{E_j}\leq f^+\end{array}\right\}\Rightarrow \int_{E_j} f^+=\int_E f^+\chi_{E_j}<\infty$, likadant : $\int_{E_j} f^-<\infty$.

$\Rightarrow f=f^+-f^-$ intbar i E_j $\forall j\in\mathbb{N}$

Båda serierna konv. !

Då är $\int_E f \overset{\text{def}}{=} \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^+ - \sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f^- = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\int_{E_j}\underbrace{f^+-f^-}_{f}\Big)$, dvs (*) gäller

(ii) $\left.\begin{array}{l} f \text{ mätbar i } E_j\ \forall j\in\mathbb{N}\\ f\chi_E \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} f\cdot\chi_{E_j}\end{array}\right\}$ $\overset{\text{gr funktioner (3.23)}}{\Longrightarrow}$ f mätbar i E

$|f|\cdot\chi_E=\sum_{j=1}^{\infty}|f|\cdot\chi_{E_j} \overset{4.29}{\Rightarrow} \int_E|f|=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j}|f|<\infty$ (antag) $\Rightarrow$ f intbar i E
och (*) gäller (del (i))

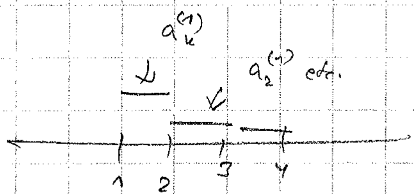
(7:4) Anta $\forall n\in\mathbb{N}$ finns given talföljd $(a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ så att
$0\leq a_k^{(n)}\leq b_n$ gäller $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, där
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n<\infty.$$
Anta också att $c_n=\lim_{k\to\infty} a_k^{(n)}$ existerar för varje $n\in\mathbb{N}$.

Visa $$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\lim_{k\to\infty} a_k^{(n)}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n<\infty.$$

Mått o. Integrationsteori / övn 7 (4.3.2016)

Bevis DKS definiera

$$f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)} \chi_{[n,n+1)}, \quad k \in \mathbb{N}$$



3.23 $\Rightarrow$ f_k mätbara $[1,\infty) \to [0,\infty)$

för alla $k \in \mathbb{N}$

Låt $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{[n,n+1)}$ mätbar (som ovan) $[1,\infty) \to [0,\infty)$

antag. $0 \leq a_k^{(n)} \leq b_n \quad \forall k \; \forall n \Rightarrow 0 \leq f_k \leq g \quad \forall k = 1, 2..$

$$\int_{(1,\infty)} g \overset{\text{disjunkta intervall}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{l([n,n+1))}_{=1 \; \forall n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow g \text{ mätbar i } [1,\infty)$$

punktvis gv:

$$(*) \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)} \chi_{[n,n+1)}(x) = \sum c_n \chi_{[n,n+1)}(x), \quad x \in [1,\infty)$$

om $x \in [n,n+1) \Rightarrow a_k^{(n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} c_n$

DKS $\Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)} \overset{\text{som i } (*)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_1^{\infty} f_k \overset{\text{DKS}}{=} \int_1^{\infty} \left(\lim_{k\to\infty} f_k\right) = \int_1^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{[n,n+1)}\right) \overset{\text{som i } (*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{k\to\infty} a_k^{(n)}\right)\right).$$

Kommentar påståendet gäller också (bevisat likadant) om

tillåter att $a_k^{(n)} \in \mathbb{R} \quad \forall k, \forall n$, och

$|a_k^{(n)}| \leq b_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

(7:5) Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-xy} - 2e^{-2xy}, & \text{då } 0 < x < 1, \; y > 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Visa

$$\int_0^1 \left(\int_1^{\infty} f(x,y)\,dy\right) dx > 0, \quad \int_1^{\infty} \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy < 0. \qquad \text{Fubini ?}$$

Lösn om $0 < x < 1, \; y > 1$ då $f(x,y) = \underbrace{e^{-xy}}_{>0}\left(1 - 2e^{-xy}\right) \geq 0$

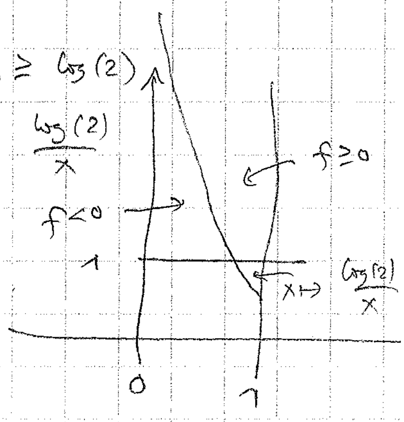
$$\Leftrightarrow e^{-xy} \leq \frac{1}{2} \overset{\log(\,)}{\Leftrightarrow} -xy \leq \log\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\log 2 \Leftrightarrow xy \geq \log(2)$$

dvs $y \geq \dfrac{\log(2)}{x}$

om $0 < x < 1$ fixerad $\Rightarrow$

$$\int_1^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_1^{\infty} \left(e^{-xy} - 2e^{-xy}\right) dy \overset{\text{DKS}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_1^k \left(e^{-xy} - 2e^{-2xy}\right) dy$$

$=$



$$= \lim_{k\to\infty} \Big/_{1}^{k} \left(-\frac{1}{x}e^{-xy} + \frac{1}{x}e^{-2xy}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\underbrace{e^{-kx}}_{\downarrow k\to\infty \atop 0} + \frac{1}{x}\underbrace{e^{-2kx}}_{\downarrow k\to\infty \atop 0} - \left(-\frac{1}{x}e^{-x} + \frac{1}{x}e^{-2x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-2x} = \frac{1}{x}\underbrace{(1-\underbrace{e^{-x}}_{\leq 1})}_{>0} > 0 \quad \text{då} \quad 0<x<1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\int_1^\infty f(x,y)\,dy\right)dx > 0.$$

$$\int_0^1 \big(\underbrace{e^{-xy} - 2e^{-2xy}}_{\text{kontin i } [0,1],\ \forall y>1}\big)\,dx \underset{\text{R-integral}}{\overset{4.19}{=}} \Big/_{0}^{1}\left(-\frac{1}{y}e^{-xy} + \frac{1}{y}e^{-2xy}\right) = \left(-\frac{1}{y}e^{-y} + \frac{1}{y}e^{-2y}\right) - \underbrace{\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{y}e^{-y}\underbrace{(-1+\underbrace{e^{-y}}_{<1 \text{ då } y>1})}_{<0} < 0 \quad \text{för alla } y>1.$$

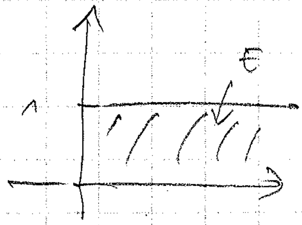
$$\Rightarrow \int_1^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy < 0.$$

Alltså
$$\int_0^1 \left(\int_1^\infty f\,dy\right)dx \neq \int_1^\infty \left(\int_0^1 f\,dx\right)dy \qquad (*)$$

Fubini 1 inte tillämpbar ($f(x,y)>0$ och $f(x,y)<0$).

Fubini 2? $(*) \Rightarrow \int_1^\infty\int_0^1 |f(x,y)|\,dx\,dy = \infty$ dvs f inte integrerbar.

(7:6) Låt $E = (0,\infty)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Beräkna
$$\int_E y\sin(x)e^{-xy}\,dx\,dy$$
med Fubinis satser. Vad behöver man veta för detta?



Lösn Låt $f(x,y) = y\sin(x)e^{-xy}$, $(x,y)\in E$

$(x,y) \longmapsto y\sin(x)e^{-xy}$ kontin. i $E \overset{3.5}{\Longrightarrow} f$ mätbar i E

kontinuitet: f produkten av
$$\begin{cases} (x,y) \overset{\text{kontin}}{\longmapsto} y \\ (x,y) \longmapsto x \underset{\text{kontin}}{\longmapsto} \sin(x) \\ (x,y) \overset{\text{kontin}}{\longmapsto} xy \longmapsto e^{-xy} \\ \qquad\qquad \uparrow t\mapsto e^t \text{ kontin} \end{cases}$$
(se Topo I, VA).

Låt $y\in(0,1)$ fixerad och definiera $F(y) = \int_0^\infty y\sin(x)e^{-xy}\,dx$.

Då är $F(y) = \int_0^\infty y \sin(x)\, e^{-xy}\, dx \overset{(*)}{=} \frac{y}{1+y^2}$ se nedan

Då ger Fubini 2:s sats att

$$\int_E y\sin(x)\, e^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^\infty y\sin(x) e^{-xy}\,dx}_{=F(y)} \Big) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2y}{1+y^2}\,dy$$

$$\boxed{\frac{d}{dy}\left(\log(1+y^2)\right) = \frac{2y}{1+y^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \Big/_0^1 \log(1+y^2) = \frac{1}{2}\log 2$$

förutsatt att f är integrerbar över E (villkor i Fubini 2).

$|\sin(y)| \le 1 \quad \forall y \in (0,1) \Rightarrow$

$$\int_E \underbrace{y}_{>0} |\sin(y)| \underbrace{e^{-xy}}_{>0}\,dx\,dy \quad \int_E \underbrace{y e^{-xy}}_{\ge 0}\,dx\,dy \overset{\text{Fubini 1}}{=} \int_0^1 \Big(\int_0^\infty y e^{-xy}\,dx\Big) dy$$

$$\overset{MKS}{=} \int_0^1 \Big(\lim_{k\to\infty}\int_0^k y e^{-xy}\,dy\Big) dx = \int_0^1 \Big(\lim_{k\to\infty} \Big/_0^k (-e^{-xy})\Big) dx$$

$$= \int_0^1 \Big(\lim_{k\to\infty} (\underbrace{-e^{-kx}}_{\to 0,\ k\to\infty} + 1)\Big) dx = \int_0^1 1\,dx = \underline{1} < \infty.$$

majorantprincipen $\Rightarrow$ $|f|$ int.bar över E.

Bevis av $(*)$ (formellt, exakt med gr och DKS)

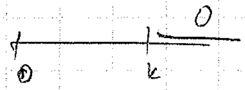
$$\int_0^\infty \underbrace{\sin(x)}_{v}\, \underbrace{y e^{-xy}}_{u'}\,dx \overset{\text{partiellt}}{=} \underbrace{\Big/_0^\infty -\sin(x)\cdot e^{-xy}}_{=0,\ \sin(0)=0,\ \lim_{k\to\infty} e^{-ky}=0.} + \int_0^\infty \overset{=v'}{\cos(x)}\, e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y}\int_0^\infty \underbrace{\cos(x)}_{v}\, \underbrace{y e^{-xy}}_{u'}\,dx$$

$$\overset{\text{partiellt igen}}{=} \frac{1}{y}\underbrace{\Big/_0^\infty \left(-\cos(x)\, e^{-xy}\right)}_{=1\ \text{ty}\ \cos(0)e^0=1,\ \lim_{k\to\infty}(\,)=0.} - \frac{1}{y}\int_0^\infty \sin(x)\, e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\underbrace{\int_0^\infty y\sin(x)\, e^{-xy}\,dx}$$

lös $\int_0^\infty y\sin(x) e^{-xy}\,dx \Rightarrow \left(1+\frac{1}{y^2}\right)\int_0^\infty y\sin(x)\, e^{-xy}\,dx = \frac{1}{y} \overset{\text{lös}}{\Rightarrow}$

$$\int_0^\infty y\sin(x)\, e^{-xy}\,dx = \frac{y}{1+y^2} \qquad \text{dvs } (*) \text{ gäller}$$

Kommentar: DKS anser att $\int_0^\infty \sin(x)\, y e^{-xy}\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^k \sin(x)\, y e^{-xy}\,dx$



eftersom $0 \le |\sin(x)|\, y e^{-xy} \le y e^{-xy}$ som integrerbar över $[0,\infty)$