INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Mått och Integrationsteori
Räkneövning 7
Fredag 4.3.2016 kl 14-16 C122

Övningen avslutar studiet av Lebesgue integralen. Uppgifterna är inte ordnade enligt svårighetsgrad.

1. Anta att $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ är en mätbar avbildning. Verifiera att funktionerna

$$g_j(x) = \frac{\cos(f(x))}{1 + jf(x)^2}$$

är mätbara $[0,1] \to \mathbb{R}$ för alla $j \in \mathbb{N}$, samt att gränsvärdet $\lim_{j\to\infty} \int_0^1 g_j(x)dx$ existerar.

2. Anta att funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är integrerbar över $\mathbb{R}^n$. Visa att

$$\lim_{j\to\infty} j \cdot m(E_j) = 0,$$

där $E_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq j\}$ för $j \in \mathbb{N}$. *Tips:* dominerad konvergens samt måttet $E \mapsto \int_E |f|$ (4.32).

3. *Bevisa Sats 4.49 i kompendiet.* Anta att $\{E_j : j \in \mathbb{N}\}$ är en parvist disjunkt familj av Lebesgue mätbara mängder i $\mathbb{R}^n$, och $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$.

(i) Om f är integrerbar i E, så är f integrerbar i E_j för alla $j \in \mathbb{N}$ och

$$\int_E f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f. \tag{1}$$

(ii) Om f är integrerbar i E_j för alla $j \in \mathbb{N}$, så är f integrerbar i E och (1) gäller.

4. För varje $n \in \mathbb{N}$ är $(a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ en given reell talföljd så att $0 \leq a_k^{(n)} \leq b_n$ för varje $k \in \mathbb{N}$ och $n \in \mathbb{N}$, där $\sum_n b_n < \infty$. Anta dessutom att gränsvärdet $c_n = \lim_{k\to\infty} a_k^{(n)}$ existerar för varje $n \in \mathbb{N}$. Visa med hjälp av en lämplig konvergenssats att

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)} < \infty.$$

Tips: funktionsföljden $f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_k^{(n)} \chi_{[n,n+1)}$ på intervallet $[1,\infty)$ för $k \in \mathbb{N}$.

5. Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara avbildningen $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ då $0 < x < 1, y > 1$, samt $f(x,y) = 0$ annars. Verifiera att

$$\int_0^1 \Big(\int_1^{\infty} f(x,y)dy \Big) dx > 0, \quad \int_1^{\infty} \Big(\int_0^1 f(x,y)dx \Big) dy < 0.$$

Varför kan inte Fubinis satser tillämpas?

6. Låt $E = (0,\infty) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Beräkna

$$\int_E y \sin(x) e^{-yx} dx dy$$

med hjälp av Fubinis satser. Vad behöver man veta för att tillämpa satserna och beräkna integralen?

Påminnelse. Kursen *Mått och Integrationsteori* kan avklaras på ett normalt slutförhör (5 uppgifter, tid 3 t 30 min) vid allmänna provtillfällen. Den svenska versionen av kursen kan tenteras under år 2016, och första möjligheten är torsdag 17.3. kl 16-20. Kom ihåg att be om den svenska versionen när ni anmäler er i WebOodi (annars får ni den finskspråkiga versionen av kursen från våren 2016), och sänd gärna ett e-mail till mig som påminnelse (e-mail: *hans-olav.tylli@helsinki.fi*).

Onsdag 2.3. även genomgång av typiska kursprovsuppgifter. En samling av föreläsarens tidigare kursprov länkas till hemsidan. I kursprovet får ni ha med en tvåsidig minneslapp av storlek A4.