Mått- och Integrationsteori / övning 6 (28.2.2016)

Modellsvar

6:1 Låt $0 < s \le 1$. Beräkna
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}\,dx.$$

Lösning med MKS 4.25

Låt $f_n(x) = \dfrac{nx^s}{1+nx} = \dfrac{x^s}{\frac{1}{n}+x}$, $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$.

Då är $f_n(x) \ge 0$ i $[0,1]$, f_n kontin. $\Rightarrow$ f_n mätbara för alla $n\in\mathbb{N}$

Dessutom: (f_n) punktvis växande $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ $\forall x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$

orsak $0 < \frac{1}{n+1} + x < \frac{1}{n} + x$, $x\in[0,1]$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x^s}{\frac{1}{n}+x} \le \dfrac{x^s}{\frac{1}{n+1}+x}$ då $x\in(0,1]$, $n\in\mathbb{N}$.

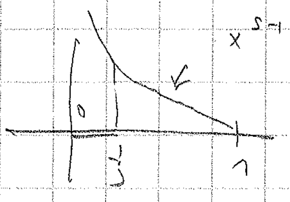
Alltså $0 \le f_n \le f_{n+1}$ $\forall n$

Monotona konvergenssatsen (MKS) 4.25 $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^s}{\frac{1}{n}+x}\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^s}{\frac{1}{n}+x}\right)dx \overset{\frac{1}{n}\to 0,\ n\to\infty}{=} \int_0^1 \frac{x^s}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{s-1}\,dx \overset{\text{MKS}}{=} \lim_{j\to\infty} \int_{1/j}^1 x^{s-1}\,dx \overset{4.13}{=} \lim_{j\to\infty} (R)\int_{1/j}^1 x^{s-1}\,dx$$

$-1 < s-1 < 0$
oegentl. då $x=0$



$$= \lim_{j\to\infty} \Big/_{1/j}^{1} \frac{1}{s}x^s = \frac{1}{s}\lim_{j\to\infty}\Big(1-\underbrace{\left(\tfrac{1}{j}\right)^s}_{\to 0,\ j\to\infty \text{ då } s>0}\Big) = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$$

alltså $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx}\,dx = \frac{1}{s}$

6:2 Anta $(X,\mathcal{T},\mu)$ måttrum, $f: X\to[0,\infty]$ $\mathcal{T}$-mätbar avbildning.

Visa om $\{E_j : j\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{T}$ parvist disjunkt familj (dvs. $E_i\cap E_j=\emptyset$ då $i\ne j$), så

$$\int_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j} f\,d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_{E_j} f\,d\mu.$$

(dvs $E \mapsto \int_E f\,d\mu$ mått $\mathcal{T}\to[0,\infty)$ eftersom $\int_\emptyset f\,d\mu = 0$).

Bevis Beteckna $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$ $(\in\mathcal{T})$.

Då är
$$(*)\qquad \chi_E = \sum_{j=1}^\infty \chi_{E_j}$$

nämligen: om $x \in E \Rightarrow \exists$ unikt $j \in \mathbb{N}$ s.a. $x \in E_j$ (E_j parvis disjunkta)

då är

$$\chi_E(x) = 1 = \chi_{E_j}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}(x) \quad (\text{då } \chi_{E_i}(x) = 0 \text{ för } i \neq j)$$

Om $x \notin E \Rightarrow$

$$\chi_E(x) = 0 = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j}(x).$$

Multiplicera (*) med $f(x) \geq 0$ för $x \in X \Rightarrow$

$$f \cdot \chi_E = \sum_{j=1}^{\infty} f \cdot \chi_{E_j}$$

integrera över $X \Rightarrow$

$$\int_E f \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} f \cdot \chi_{E_j} \, d\mu \underset{\text{Levi 4.29}}{\overset{\text{Beppo}}{=}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f \cdot \chi_{E_j} \, d\mu \quad (\text{för } (X, \mathcal{T}, \mu))$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f \, d\mu$$

(6:3) Finns det mätbar funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, så att $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ samt

f och $\frac{1}{f}$ (dvs $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$) integrerbara över $\mathbb{R}$?

Lösn: observera $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ mätbar (sammansatt 3.9: $x \mapsto f(x) \mapsto \frac{1}{f(x)}$; $t \mapsto \frac{1}{t}$ kontin. i $\{t > 0\}$).

$\overset{3.11}{\Rightarrow}$ $f + \frac{1}{f}$ mätbar i $\mathbb{R}$.

Motantagande: f och $\frac{1}{f}$ är båda integrerbara över $\mathbb{R}$

$\underset{\text{summa}}{\overset{4.43(1)}{\Longrightarrow}}$ $x \mapsto f(x) + \frac{1}{f(x)}$ integrerbar över $\mathbb{R}$, dvs. $\boxed{\int_{\mathbb{R}} \left(f + \frac{1}{f}\right) < \infty.}$

Påminn (AI) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ för alla $a, b \in \mathbb{R}$

(orsak: $a^2 + b^2 \geq 2ab \iff \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{(a-b)^2} \geq 0$).

Alltså ($a = \sqrt{f(x)}$, $b = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$)

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} = \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2 \geq 2 \cdot \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) dx \geq \int_{\mathbb{R}} 2 \, dx = \infty \quad \lightning \quad (\text{med } \boxed{\ })$$

6:4 Anta $E \subset \mathbb{R}^n$, $f_j : E \to [0,\infty]$ ($j \in \mathbb{N}$) följd av mätbara funktioner.

Anta dessutom: $f_j(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(x)$ för alla $x \in E$, och finns $M < \infty$ så att

$$\int_E f_j \, dm \leq M \quad \text{för alla } j \in \mathbb{N}.$$

Visa:
$$\int_E f \, dm \leq M.$$

Lösn Fatous lemma (vet att $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \overset{3.21}{=} \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$, $x \in E$)

$$\int_E f\,dm = \int_E \lim_{j\to\infty} f_j \, dm = \int_E \liminf_{j\to\infty} f_j \, dm \underset{4.30}{\overset{\text{Fatou}}{\leq}} \liminf_{j\to\infty} \underbrace{\int_E f_j \, dm}_{\text{talföljd } (a_j)} \overset{(*)}{\leq} M$$

(*) fakta om $a_j \leq M$ $\forall j \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $\liminf_{j\to\infty} a_j \leq M$

orsak
$$c_k = \inf_{j \geq k} a_j \leq M \text{ för alla } k, \quad \liminf_{j\to\infty} a_j = \lim_{k\to\infty} c_k \leq M.$$

6:5 Låt $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Får man tillämpa

(a) MKS
(b) Fatous lemma
(c) DKS

på funktionsföljden (f_n)? Konklusionen?

Lösn (a) MKS? $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ inte växande då $n \geq n_0(x)$:

Om $0<x<1$ fixerad

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)x\cdot(1-x)^{n+1}}{nx(1-x)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot(1-x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)(1-x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-x < 1$$

alltså MKS inte tillämpbar (för att beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$)

(c) DKS? Söker majorantfunktion $g : [0,1] \to [0,\infty)$, g integrerbar, s.a.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

fixera $n \in \mathbb{N}$: maximum för $f_n(x)$? (polynom!)

$$f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}\big(\underbrace{1-x-nx}_{1-(n+1)x}\big) = 0$$

$\iff$ $x=1$ eller $x = \frac{1}{n+1}$

tecken

	0		$\frac{1}{n+1}$		1
f_n'		+		−	
f_n		↗		↘	

$\Rightarrow$ maxvärde (globalt) då $x = \frac{1}{n+1}$

MåH.o. Integrationsteori / övning 6 (26.2.2016)

alltså $0 \le f_n(x) \le f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{(1-\frac{1}{n+1})}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$ (AI, växande talföljd!).

alltså $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{e} \overset{bet.}{\equiv} g(x), \; x \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$g(x) \equiv \frac{1}{e}$ integrerbar över $[0,1] \overset{DKS}{\Rightarrow}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n}_{=?} dx = \int_0^1 0 \cdot dx = \underline{\underline{0}}$$

om $x=0$ eller $x=1 \Rightarrow f_n(x)=0 \; \forall n.$

om $0<x<1 \Rightarrow \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)(1-x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-x \in (0,1)$

kvottestet för serier $\overset{AII}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} nx(1-x)^n$ konv. $\forall x \in (0,1) \overset{allm.\ term}{\Rightarrow}$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0 \quad \forall x \in (0,1)}$

(b) Fatous lemma ? ovan

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow$$

$$0 = \int_0^1 0\,dx = \int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \underset{4.30}{\overset{Fatou}{\le}} \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{=?}, \text{ där}$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 \underset{f}{x}\,\underset{g'}{(1-x)^n}\,dx \overset{partiellt}{=} n\left(\underbrace{\Big/_0^1 -x\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}}_{=0} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}dx\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}\cdot\left(-\underbrace{\Big/_0^1 \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}}_{0-\frac{1}{n+2}}\right) = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Alltså är Fatou $\Rightarrow \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$

Kommentar: konvergenssatserna behövs inte för att beräkna $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx$

nämligen

$$0 \le \int_0^1 nx(1-x)^n dx \overset{ovan}{=} \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{(dvs AII räcker...)}$$

6:6 Beräkna
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin^n t}{t^2}\,dt \quad \text{med DKS.}$$

Lösn.

Låt $f_n(t) = \frac{\sin^n t}{t^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in (1,\infty)$, f_n kontin. i $[1,\infty) \Rightarrow f_n$ mätbar $\forall n$

$|\sin t| \le 1 \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad |f_n(t)| = \frac{|\sin t|^n}{t^2} \le \frac{1}{t^2} = g(t), \quad t \in (1,\infty), \ n \in \mathbb{N}$

g integrerbar på $(1,\infty)$, ty
$$0 \le \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt \overset{MKS}{=} \lim_{j\to\infty} \int_1^j \frac{1}{t^2}\,dt \overset{4.19}{=} \lim_{j\to\infty} (R)\int_1^j \frac{1}{t^2}\,dt$$
$$g_j = g \cdot \chi_{[1,j]} \nearrow g$$
$$= \lim_{j\to\infty} \Big/_1^j -\frac{1}{t} = \lim_{j\to\infty} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = 1$$

$$\text{DKS} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sin^n t}{t^2}\,dt = \int_1^\infty \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^n t}{t^2}\right)}_{=?} dt \overset{(*)}{=} \int_{[1,\infty]\setminus A} 0\,dt + \underbrace{\int_A h(t)\,dt}_{=0, \text{ ty } m(A)=0} = 0.$$

(*) Låt $h(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^n t}{t^2}$

om $t = \frac{\pi}{2} + n2\pi$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow \frac{\sin^n t}{t^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{t^2}$

$t = \frac{3\pi}{2} + n2\pi$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sin t = -1 \Rightarrow \frac{\sin^n t}{t^2} = \frac{(-1)^n}{t^2}$ saknar gv då $n\to\infty$.

Låt $A = \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ uppräknelig $\subset [1,\infty)$

om $t \in (1,\infty)$, $t \notin A \Rightarrow |\sin t| < 1 \Rightarrow \frac{\sin^n t}{t^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dvs $h(t) = 0$.

Alltså: $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sin^n t}{t^2}\,dt = 0.$