

# INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Mått och Integrationsteori

Räkneövning 6

Fredag 26.2.2016 kl 14-16 C122

Övningen behandlar Lebesgue integralen och dess tillämpningar. Uppgifterna är inte ordnade enligt svårighetsgrad.

1. Låt  $0 < s < 1$ . Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^s}{1+nx} dx$$

med hjälp av monotona konvergenssatsen 4.25.

2. Anta att  $(X, \Gamma, \mu)$  är ett måttrum och  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  är en  $\Gamma$ -mätbar mängd. Visa att om  $\{E_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$  är en familj av parvist disjunkta mätbara mängder, så är

$$\int_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f d\mu.$$

*Tips:* Beppo Levis sats 4.29 för måttrummet  $(X, \Gamma, \mu)$  (denna version kan antas vara känd).

3. Finns det en mätbar funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  så att  $f(x) > 0$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ , och sådan att  $f$  och  $1/f$  båda är integrerbara över  $\mathbb{R}$ ? *Tips:* betrakta summafunktionen  $x \mapsto f(x) + 1/f(x)$  och kom ihåg att  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

4. Anta att  $E \subset \mathbb{R}^n$  och  $f_j : E \rightarrow [0, \infty]$  är en följd av mätbara funktioner för  $j \in \mathbb{N}$ . Anta dessutom att  $f_j(x) \rightarrow f(x)$  för varje  $x \in E$  då  $j \rightarrow \infty$ , samt att det finns  $M < \infty$  så att

$$\int_E f_j dm \leq M$$

för varje  $j \in \mathbb{N}$ . Använd Fatous lemma till att visa att

$$\int_E f dm \leq M.$$

5. Låt  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  då  $x \in [0, 1]$  och  $n \in \mathbb{N}$ . Är det tillåtet att tillämpa  
(i) monotona konvergenssatsen,  
(ii) Fatous lemma,  
(iii) satsen om dominerad konvergens,  
på funktionsföljden  $(f_n)$ ? Vad är konklusionen?

6. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^2} dt$$

med hjälp av satsen om dominerad konvergens 4.45.

*Påminnelse.* Kursen *Mått och Integrationsteori* kan avklaras på ett normalt slutförhör (5 uppgifter, tid 3 t 30 min). Den svenska versionen av kursen kan tenteras under år 2016, och första möjligheten är torsdag 17.3. kl 16-20. Kom ihåg att be om den svenska versionen när ni anmäler er i WebOodi (annars får ni automatiskt motsvarande finskspråkiga version av kursen från våren 2016), och sänd gärna ett e-mail till mig som påminnelse att jag bör göra uppgifter (e-mail: [hans-olav.tylli@helsinki.fi](mailto:hans-olav.tylli@helsinki.fi)).

Onsdag 2.3. även genomgång av typiska kursprovsuppgifter. I kursprovet får ni ha med en tvåsidig minneslapp av storlek A4.