Mått o. Integrationsteori / övning 5 (19.2.2016)

Modellsvar

1:1

(5:1) Anta $A \subset \mathbb{R}^n$ och $f_1, f_2, \ldots : A \to \mathbb{R}$ följd av mätbara avbildningar.

Påst

$$B = \{x \in A : \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ existerar}\}$$ är en mätbar mängd i $\mathbb{R}^n$

Lösning teorin (Sats 2.23) $\Rightarrow$ avbildningarna

$$x \mapsto h(x) \overset{def}{=} \limsup_{j\to\infty} f_j(x) \quad \text{och} \quad x \mapsto g(x) \overset{def}{=} \liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

är mätbara $A \to \overline{\mathbb{R}}$.

Sats 3.21 $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ existerar $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\limsup f_j(x)}_{=h(x)} = \underbrace{\liminf_{j\to\infty} f_j(x)}_{=g(x)}$ $\left(\begin{array}{c}\text{där alltid}\\ g(x) \le h(x)\end{array}\right)$.

Alltså: $x \in B \Leftrightarrow h(x) = g(x) \overset{\text{om } h(x)<\infty}{\Leftrightarrow} 0 = h(x) - g(x)$ dvs

$x \in (h-g)^{-1}(0)$

h, g mätbara $\overset{2.11}{\Rightarrow}$ $h-g$ mätbar

$\Rightarrow (h-g)^{-1}(0)$ mätbar mängd ($\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ sluten)

Om $h(x) = g(x) = \infty \Rightarrow x \in h^{-1}(\infty)$ mätbar

Om $h(x) = g(x) = -\infty \Rightarrow x \in g^{-1}(-\infty)$ mätbar

---

(5:2) Anta: $I \subset \mathbb{R}$ intervall och $f : I \to \mathbb{R}$ växande avbildning: dvs

om $x, y \in I$ och $x < y$, så $f(x) \le f(y)$.

Påst $f : I \to \mathbb{R}$ är en mätbar avbildning

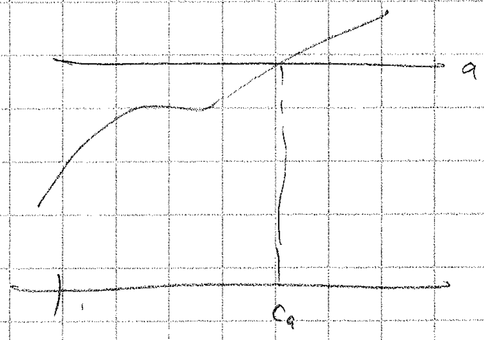
Lösning 3.12 $\Rightarrow$ räcker visa exempelvis att

$$\{x \in I : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a)) \text{ mätbar mängd i } \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Låt

$$c_a = \sup\{x \in I : f(x) < a\}$$

(om $\{x \in I : f(x) < a\} = \emptyset$, så mätbar mängd)



Vi visar:

(*) $\underbrace{I \cap (-\infty, c_a)}_{\text{mätbar mängd}} \subset \{x \in I : f(x) < a\} \subset \underbrace{I \cap (-\infty, c_a]}_{\text{mätbar}}$

endera "$\subset$" är likhet "$=$" $\Rightarrow$ $\{x \in I : f(x) < a\}$ är mätbar

Bevis av (*) Om $x \in I$ och $x < c_a$ $\overset{c_a \text{ övre gräns}}{\Rightarrow}$ $f(x) < a$

anta $f(x) < a$. Bör visa $x \le c_a$

Motantagande $x > c_a$. Om $c_a < t < x$, $\overset{f \text{ växande}}{\Rightarrow}$ $f(t) \le f(x) < a$ $\Longrightarrow$

Matt. o Integrationsteori Övning 5 (17.2.2016) (1:2)

$f(t) < f(x) < a \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} (c_a, x) \subset \{u \in I : f(u) < a\} \underset{\sup}{\overset{\text{def av}}{\Rightarrow}} c_a \geq x \ (> c_a)$ $\lightning$.

Kommentar: om f avtagande i I $\Rightarrow$ $x \mapsto -f(x)$ växande i I $\Rightarrow$ f också mätbar avbildn.

(5:3) Anta (f_k) och (g_k) två funktionsföljder $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att

$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ nästan överallt i $\mathbb{R}$ och

(*) $|f_k(x) - g_k(x)| \leq \frac{1}{k}$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och alla $k \in \mathbb{N}$.

Påst. $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ nästan överallt i $\mathbb{R}$.

Lösning Låt $A = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{j\to\infty} g_j(x) = f(x)\}$.

antagandet $\Rightarrow$ $m(A^c) = 0$. (där $\lim_{j\to\infty} f_j(x) \neq f(x)$).

Bör visa: $m(B^c) = 0$ $(\Rightarrow g_j(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(x)$ n.ä. $x \in \mathbb{R})$.

Räcker visa $B^c \subset A^c$, eftersom då $0 \leq m^*(B^c) \leq m(A^c) = 0 \Rightarrow m^*(B^c) = 0$.

Vi visar (för komplementen) att $A \subset B$ $(\Rightarrow B^c \subset A^c)$.

anta $x \in A$ godtycklig, dvs. $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Antagandet (*) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} f_j(x) - \frac{1}{j} & \leq & g_j(x) & \leq & f_j(x) + \frac{1}{j} \\ \downarrow & & \lightning & & \downarrow \\ f(x) - 0 = f(x) & \leq & f(x) & \leq & f(x) = f(x) + 0 \end{array}$$

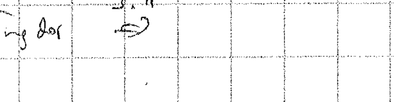
$j \to \infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{j\to\infty} g_j(x) = f(x)$ enligt instängningsprincipen (AI).

Alltså $m^*(B^c) = 0$

(5:4) Verifiera att $f = \chi_{[0,3]} + 2 \cdot \chi_{[2,4]} + 3 \cdot \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ är en enkel funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sök dess normalrepresentation och beräkna $\int f$

Lösning $[0,3]$, $[2,4]$ och $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ mätbara mängder $\overset{3.11}{\Rightarrow}$ summafunktionen f mätbar i $\mathbb{R}$.



Mått o. Integrationsteori / övning 5 (19.2.2016) 1:3

om $1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = 1$ — om $0 \le x \le 1$ och $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = 1+3 = 4$

om $2 \le x \le 3 \Rightarrow f(x) = 1+2 = 3$ — om $0 \le x \le 1$ och $x \in \mathbb{Q}^c \Rightarrow f(x) = 1$.

om $3 < x \le 4 \Rightarrow f(x) = 2$ — $x \notin [0,4] \Rightarrow f(x) = 0$

alltså: normalrepresentationen (disjunkta mätbara mängder, olika värden) är

$$f = 1\cdot\chi_{(\mathbb{Q}^c\cap[0,1])\cup(1,2)} + 2\cdot\chi_{(3,4]} + 3\cdot\chi_{[2,3]} + 4\cdot\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} + 0\cdot\chi_{[0,4]^c}$$

$\Rightarrow$ Lebesgue integralen

$$\int f = 1\cdot m((\mathbb{Q}^c\cap[0,1])\cup(1,2)) + 2\cdot\underbrace{m((3,4])}_{=1} + 3\cdot\underbrace{m([2,3])}_{=1} + 4\cdot\underbrace{m(\mathbb{Q}\cap[0,1])}_{=0} + \underbrace{0\cdot m([0,4]^c)}_{=0}$$

$\Leftarrow m(\mathbb{Q}) = 0$.

m mått

$$= \underbrace{m(\mathbb{Q}^c\cap[0,1])}_{=?} + 1 + 2 + 3 = 7$$

$[0,1] = (\mathbb{Q}\cap[0,1]) \cup (\mathbb{Q}^c\cap[0,1])$ disjunkt union $\Rightarrow$

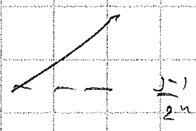
$$1 = m([0,1]) = \underbrace{m(\mathbb{Q}\cap[0,1])}_{=0} + m(\mathbb{Q}^c\cap[0,1]) \Rightarrow m(\mathbb{Q}^c\cap[0,1]) = 1.$$

5:5 Beräkna $\int_0^1 x\,dx$ på basen av definitionen.

Lösning påminnelse $f(x) = x,\ x \in [0,1] \overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$

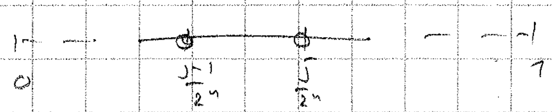
$$\int_0^1 f = \sup\{I(\varphi) : \varphi \text{ enkel},\ \varphi \le f \text{ i } [0,1]\}.$$

Dela $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{2^n}\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) \cup \{1\}$,



$n \in \mathbb{N}$ fixerad. Betrakta

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{2^n}\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\cdot\chi_{\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)}$$ enkel funktion



$\frac{j-1}{2^n} \le x < \frac{j}{2^n}$ då $x \in \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right) \Rightarrow \varphi_n \le f$ i $[0,1]$.

Def sup $\Rightarrow$ (mindre gr.)

$$\int_0^1 f \ge I(\varphi_n) = \sum_{j=1}^{2^n}\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\cdot\underbrace{m\left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)\right)}_{=\frac{1}{2^n}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2\underbrace{\sum_{j=1}^{2^n}(j-1)}_{\text{A.I induktion } = \frac{1}{2}(2^n-1)\cdot 2^n}$$

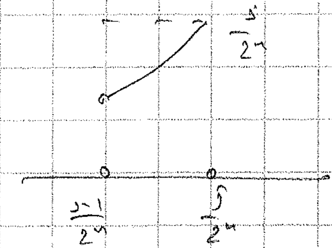
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^n(2^n-1)}{2^n\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f \ge \frac{1}{2}$$

Fråga uppskattning uppåt av $\int_0^1 f\,dx$?

Mått. o. Integrationsteori / övning 5 (19.2.2016) 1:4

monotonicitet: $n \in \mathbb{N}$ betrakta



$$\psi_n = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{j}{2^n}\,\chi_{[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n})}$$ enkel funktion

$x \in [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}) \Rightarrow x \le \frac{j}{2^n} \Rightarrow f \le \psi_n$ i $[0,1)$

monotonicitet (4.18(1)) $\overset{\forall n}{\Rightarrow} \int_0^1 f \le I(\psi_n) = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{j}{2^n}\cdot m\Big(\underbrace{[\tfrac{j-1}{2^n}, \tfrac{j}{2^n})}_{=\frac{1}{2^n}}\Big)$

$$= \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{2^n} j}_{\text{ovan}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cancel{2^n}(2^n+1)}{\cancel{2^n}\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

alltså $\int_0^1 f \le \frac{1}{2}$ kombinera $\Rightarrow \int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

Kommentar (1) (mera teori) 4.19 $f(x) = x$ kontin $\Rightarrow$

$$\int_0^1 f = (R)\int_0^1 x\,dx = \Big/_0^1 \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$$ där $(R)\int_0^1 x\,dx$ motsvarande Riemann-integral

(2) MKS 4.25 om $\begin{cases} 0 \le \varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x) \le .. \le f(x) & \forall x \quad \forall n \text{ och } \varphi_n \text{ enkla funktioner,} \\ \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) & \forall x. \end{cases}$

$\Rightarrow$ alltid $\int f = \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n)$.

5:6 Anta $E \subset \mathbb{R}^n$ mätbar och $f: E \to [0,\infty)$ begränsad mätbar avbildning.

Påst. $m(E)\inf_{x\in E} f(x) \le \int_E f\,dm \le m(E)\cdot\sup_{x\in E} f(x)$

Lösning

påminn $f: E \to [0,\infty)$ begränsad $\Rightarrow G = \sup_{x\in E} f(x) < \infty$ existerar som ändligt tal

$f(x) \ge 0 \ \forall x \Rightarrow g = \inf_{x\in E} f(x) \ge 0$.

om $x \in E \Rightarrow g \le f(x) \le G \Rightarrow \underbrace{g\cdot\chi_E}_{\text{enkel fktn}} \le f\cdot\chi_E \le \underbrace{G\cdot\chi_E}_{\text{enkel fktn}}$ (om $x \notin E \Rightarrow$ ovan $0 \le 0$).

def och monotonicitet 4.12 $\Big\} \Rightarrow g\cdot m(E) = I(g\chi_E) \le \int f\cdot\chi_E\,dm \le I(G\chi_E) = G\cdot m(E)$

$\int f\cdot\chi_E\,dm \overset{\text{def}}{=} \int_E f\,dm$

Kommentar om $m(E) = \infty$, så $G\cdot m(E) = \infty$ (då $G > 0$).

D.