INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Mått och Integrationsteori
Räkneövning 5
Fredag 19.2.2016 kl 14-16 C122

Övningen avslutar studiet av mätbara avbildningar och inleder studiet av Lebesgue integralen. Uppgifterna är inte ordnade enligt svårighetsgrad.

1. Anta att $A \subset \mathbb{R}^n$ och att $f_1, f_2, \ldots$ är en följd av mätbara funktioner $A \to \mathbb{R}$. Visa att mängden

$$B = \{x \in A : \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ existerar}\}$$

är mätbar. *Tips:* lämplig teori ger ett två-rads argument.

2. Anta att $I \subset \mathbb{R}$ är ett intervall samt att $f : I \to \mathbb{R}$ är en växande funktion, dvs. $f(x) \leq f(y)$ alltid om $x, y \in I$ och $x < y$. Visa att f är en mätbar avbildning.

3. Anta att (f_k) och (g_k) är två följder av funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att $f_k \to f$ nästan överallt i $\mathbb{R}$ då $k \to \infty$ och $|f_k(x) - g_k(x)| < 1/k$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $k \in \mathbb{N}$. Visa att $g_k \to f$ nästan överallt i $\mathbb{R}$ då $k \to \infty$.

4. Verifiera att $f = \chi_{[0,3]} + 2 \cdot \chi_{[2,4]} + 3 \cdot \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ är en enkel funktion och sök dess normalrepresentation. Beräkna integralen $\int f dm$.

5. Beräkna Lebesgue integralen

$$\int_0^1 x dx$$

på basen av definitionen.

6. Anta att $E \subset \mathbb{R}^n$ är en mätbar mängd, samt att $f : E \to [0, \infty)$ är en begränsad mätbar avbildning. Verifiera att

$$m(E) \inf_{x\in E} f(x) \leq \int_E f dm \leq m(E) \sup_{x\in E} f(x).$$

Påminnelse. I kursprovet får ni ha med en tvåsidig minneslapp av storlek A4.