INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Mått och Integrationsteori
Räkneövning 4
Fredag 12.2.2016 kl 14-16 C122

Övningen fortsätter studiet av mätbara mängder och inleder studiet av mätbara funktioner. Uppgifterna är inte ordnade enligt svårighetsgrad.

1. Visa att det finns delmängder $A \subset \mathbb{R}$ och $B \subset \mathbb{R}$ så att $A \cap B = \emptyset$ och

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B).$$

Tips: det finns en icke-mätbar mängd $E \subset \mathbb{R}$ och Caratheodorys villkor.

I uppgifterna 2-3 är (X, Γ, μ) ett måttrum och $\{A_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ en given uppräknelig familj av delmängder till X. Definiera

$$\limsup_{j\to\infty} A_j = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (\bigcup_{k=j}^{\infty} A_k).$$

2. Verifiera följande:
(i) $\limsup_{j\to\infty} A_j \in \Gamma$.
(ii) $x \in \limsup_{j\to\infty} A_j$ om och endast om $x \in A_j$ för oändligt många index $j \in \mathbb{N}$.

3. Visa att om $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$, så är $\mu(\limsup_{j\to\infty} A_j) = 0$. (*Borel-Cantellis lemma*)

4. Definiera avbildningen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom villkoret att $f(x) = e^x$ då $x \in \mathbb{Q}$ och $f(x) = 1$ då $x \notin \mathbb{Q}$. Är f en mätbar avbildning? *Tips:* använd Sats 3.11.

5. Bestäm $\limsup_n a_n$ och $\liminf_n a_n$ för följande talföljder (a_n):
(i) $a_n = (-1)^n$
(ii) $a_n = \sin(q_n)$, där (q_n) är en godtycklig uppräkning av de rationella talen $\mathbb{Q}$.

6. Anta att $A \subset \mathbb{R}^n$ och att $f : A \to [0, \infty)$ är en mätbar avbildning, samt låt $A_r = \{x \in A : f(x) > r\}$ för $r \geq 0$. Visa: om $m(A_0) > 0$, så finns det ett naturligt tal $n \in \mathbb{N}$ så att $m(A_{1/n}) > 0$. *Tips:* konvergens av mått.

Obs. I kursprovet får ni ha med en tvåsidig minneslapp av storlek A4.