INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Mått och Integrationsteori
Räkneövning 3
Fredag 5.2.2016 kl 14-16 C122

Övningen fortsätter studiet av Lebesgue mätbara mängder. Uppgifterna är inte nödvändigtvis ordnade enligt svårighetsgrad.

1. Motivera varför det n-dimensionella Lebesgue måttet $m_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

2. Avbildningen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en *Lipschitz-avbildning* om det finns en ändlig konstant L så att

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{för alla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Visa: om $A \subset \mathbb{R}$ satisfierar $m(A) = 0$, så är bildmängden $f(A)$ mätbar och $m(f(A)) = 0$.

3. Anta att $A \subset \mathbb{R}^n$ är en sådan mängd att det mot varje givet $\varepsilon > 0$ finns en sådan öppen delmängd $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ att

$$A \subset U_\varepsilon \text{ och } m^*(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon.$$

Visa att A är en mätbar mängd. *Tips:* mot varje $k \in \mathbb{N}$ fixera en öppen mängd U_k som ovan för $\varepsilon = 1/k$ och betrakta $\cap_{k=1}^{\infty} U_k$.

4. Bevisa *Lindelöfs sats* (Sats 2.41 i kompendiet) Låt $B \subset \mathbb{R}^n$ vara en godtycklig mängd, och låt

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \supset B$$

vara en godtycklig övertäckning av B med öppna mängder $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Då finns det en uppräknelig delövertäckning

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_{\alpha_j} \supset B.$$

Tips: använd lämpligen öppna klot i $\mathbb{R}^n$ som har mittpunkter med rationella koordinater och rationell radie (jämför med uppgift 1:6).

5. Anta att en given mängd $A \subset \mathbb{R}^n$ har följande egenskap: för varje punkt $x \in A$ finns det ett öppet klot $B(x, r_x)$ för vilket yttermåttet $m^*(A \cap B(x, r_x)) = 0$. Visa att $m^*(A) = 0$. *Tips:* Lindelöf och subadditivitet.

6. Visa att det inte finns något mått $\mu : \Gamma \to [0, \infty]$ på basmängden $X = \mathbb{Q}$, så att

(i) σ-algebran Γ innehåller alla rationella intervall $(a, b] \cap \mathbb{Q}$ där $a, b \in \mathbb{Q}$ och $a < b$, samt

(ii) $\mu((a, b] \cap \mathbb{Q}) = b - a$ för alla ovanstående intervall.

Tips: visa att $\mu(\{q\}) = 0$ för alla $q \in \mathbb{Q}$ och använd att $\mathbb{Q}$ är en uppräknelig mängd.