INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Mått och Integrationsteori
Räkneövning 2
Fredag 29.1.2016 kl 14-16 C122

Uppgifterna i andra övningen inleder studiet av Lebesgues yttermått och mätbara mängder.

1. Anta att de reella talen $a_j \geq 0$ för alla $j \in \mathcal{I}$ samt att $\sum_{j \in \mathcal{I}} a_j < +\infty$. Visa att $\{j \in \mathcal{I} : a_j > 0\}$ är en uppräknelig mängd. *Tips:* betrakta $\{j \in \mathcal{I} : a_j > 1/k\}$ då $k \in \mathbb{N}$.

2. Anta att $A \subset \mathbb{R}^n$ är en godtycklig uppräknelig mängd. Visa utgående från definitionen att $m_n^*(A) = 0$. *Tips:* modifiera beviset för att $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$. (Extra fråga: hur kan man se detta direkt från teorin?)

3. Anta att $A \subset R^n$ är en given delmängd och låt $tA = \{tx : x \in A\}$ då $t > 0$. Verifiera att

$$m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A).$$

4. Bestäm det 2-dimensionella yttermåttet av den reella axeln

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

i planet $\mathbb{R}^2$.

5. Undersök om mängden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}$$

är (Lebesgue-)mätbar i $\mathbb{R}^2$.

6. Låt $A \subset \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd i planet samt $\delta(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$ vara dess diameter. Visa att

$$m_2^*(A) \leq \delta(A)^2.$$