INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Mått och Integrationsteori
Räkneövning 1
23.1.2015 (kl 14-16 C122)

Den första övningen repeterar nyttiga bakgrundskunskaper för kursen: manipulation av mängder, uppräknelighet och egenskaper hos det euklidiska vektorrummet R^n.

Beteckningar: om $a, b \in \mathbb{R}$ och $a < b$, låt $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ respektive $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ beteckna öppna och slutna intervall.

1. Bestäm $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, \infty)$ och $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n, n^2]$.

2. Låt $f : X \to Y$ vara en avbildning och $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ en mängdfamilj i X.

(i) Visa att

$$f(\bigcap_\alpha V_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(V_\alpha).$$

(ii) Visa att om $f : X \to Y$ är en injektion, så är

$$f(\bigcap_\alpha V_\alpha) = \bigcap_\alpha f(V_\alpha).$$

3. Definiera funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ genom $f(t) = 2t$ då $0 \leq t \leq 1/2$ och $f(t) = 2 - 2t$ då $1/2 < t \leq 1$, samt låt $A = [0, 1/2]$ och $B = [1/2, 1]$. Bestäm

$$f(A \cap B) \quad \text{och} \quad f(A) \cap f(B).$$

Vad säger resultatet om inklusionen i uppgift 2.(i)?

4. Låt $a, b \in \mathbb{R}$ och $a < b$.

(i) Visa att $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$.

(ii) Visa att det öppna intervallet (a, b) kan skrivas som $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, där F_n är lämpliga slutna intervall för varje $n \in \mathbb{N}$.

5. Verifiera att potensmängden $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ till mängden $\mathbb{N}$ av naturliga tal är en ouppräknelig mängd genom att komplettera följande skiss: motantagandet är att $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ är en uppräknelig mängd. Definiera $B = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A_n\}$, så att $B = A_m$ för något m. Visa att detta leder till en motsägelse.

6. Anta att $V \subset R^n$ är en godtycklig öppen mängd. Visa att det finns en uppräknelig familj $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ av öppna klot, så att

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Tips. Använd lämpliga öppna klot $B(q, s)$ där mittpunkten $q \in \mathbb{Q}^n$ har rationella koordinater och radien $s > 0$ är ett rationellt tal.

Extrapoäng för varje räkneövning: 2-3 lösta uppgifter = + 1/2 p., 4-6 uppgifter = + 1p. Extrapoängen (max. +7 p.) adderas till poängtalet i kursprovet. Observera att detta avser den svenskspråkiga kursen (kursen *Mitta ja Integraali* har separata räkneövningar, extrapoäng och kursprov).