- Joissakin tapauksissa selittävien muuttujien olettaminen ei-satunnaisiksi kiinteiksi luvuiksi saattaa tuntua rajoittavalta. Näin on esimerkiksi, kun
  - pojan pituutta selitetään isän pituudella ja aineisto on poimittu satunnaisotantaa käyttäen
  - selitettävä muuttuja on kotitalouksien sähkön kulutus ja selittävät muuttujat ovat sähkön hinta ja kotitalouksien reaalitulot ja käytetään on aikasarja-aineistoa
- Esitetty kiinteiden selittäjien malli ja siihen perustuva SU-estimointi voidaan perustella myös satunnaisten selittäjien tapauksessa "sopivilla oletuksilla", joiden voimassa ollessa päädytään samaan uskottavuusfunktioon kuin selittäjien olessa kiinteitä.

- Otetaan lähtökohdaksi yhtälö

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right),$$

  ja oletetaan, että satunnainen matriisi $\mathbf{X}$ toteuttaa ehdot:
  - (a) $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\varepsilon}$
  - (b) $\mathbf{X}$:n todennäköisyysjakauma ei riipu parametreista $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2.
- Satunnaismatriisin $\mathbf{X}$ todennäköisyysjakaumalla tarkoitetaan sen kaikkien alkioiden yhteistodennäköisyysjakaumaa.
- $\mathbf{X}$:n tn-jakauma voidaan samaistaa sen alkioista muodostetun $np \times 1$ ulotteisen satunnaisvektorin tn-jakauman kanssa.
- Uskottavuusfunktio on johdettava muuttujien $\mathbf{Y}$ ja $\mathbf{X}$ yhteisjakaumasta.

- Lähtökohtana yhtälö

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right), \quad \mathbf{X} \text{ satunnainen.}$$

- Ehto (a) eli $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\varepsilon}$ ja $f_{\mathbf{Y},\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{X}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})\, f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y} \mid \mathbf{X}) \Rightarrow$

$$f_{\mathbf{Y},\mathbf{X}}(\mathbf{y}, \mathbf{X}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right\}.$$

- Ehto (b) eli $\mathbf{X}$:n tn-jakauma ei riipu $\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right)$:sta $\Rightarrow$ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ voidaan sisällyttää uskottavuusfunktion vakiotermiin.

- Siis, uskottavuusfunktio ja tilastollinen päättely voidaan perustaa ehdolliseen $\mathrm{N}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right)$-jakaumaan ja toimia samoin kuin kiinteiden selittäjien tapauksessa.

Nyt $\hat{\beta} = \hat{\beta}(\mathbf{Y})$ ja $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(\mathbf{Y})$ tulkitaan satunnaisiksi eli ne ovat estimaattoreita, joille pätee

Lause 2.1. *Tarkastellaan lineaarista mallia*

$$\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{X}\beta, \sigma^2\mathbf{I}_n\right), \ \beta \in \mathbb{R}^p, \ \sigma^2 > 0, \ \text{jossa } \mathrm{r}\left(\mathbf{X}\right) = p.$$

Tällöin parametrien β ja σ^2 SU-estimaattoreille $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ ja $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})$ pätee

(i) $\hat{\beta} \sim \mathrm{N}(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$

(ii) $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-p}$

(iii) $\hat{\beta} \perp\!\!\!\perp \hat{\sigma}^2$.

- Suoraviivainen lasku $\Rightarrow$ parametrien $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2 Fisherin informaatiomatriisi on $(\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \sigma^2))$

$$\mathbf{i}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right) = -E\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'} l\left(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}\right) & \frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2} l\left(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2\partial\boldsymbol{\beta}} l\left(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}\right) & \frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2} l\left(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n/2\sigma^4 \end{bmatrix}$$

- Tilastollinen päättely $\Rightarrow$ mille tahansa harhattomille estimaattoreille $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ ja $\tilde{\sigma}^2$ pätee

$$\mathrm{Cov}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\beta}} \\ \tilde{\sigma}^2 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} \sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n/2\sigma^4 \end{bmatrix}^{-1} \geq \mathbf{0}$$

eli

$$\mathbf{c}'\mathrm{Cov}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\beta}} \\ \tilde{\sigma}^2 \end{bmatrix}\right)\mathbf{c} - \mathbf{c}'\begin{bmatrix} \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\sigma^4/n \end{bmatrix}\mathbf{c} \geq 0 \quad \forall\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{p+1}$$

- Valitsemalla $\mathbf{c}' = [\mathbf{a}' \colon 0]$ tuloksessa

$$\mathbf{c}'\mathrm{Cov}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\sigma}^2 \end{bmatrix}\right)\mathbf{c} - \mathbf{c}'\begin{bmatrix} \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\sigma^4/n \end{bmatrix}\mathbf{c} \geq 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{p+1}$$

  saadaan kaikilla $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$

$$\mathbf{a}'\mathrm{Cov}(\tilde{\beta})\mathbf{a} - \sigma^2\mathbf{a}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a} \geq 0 \text{ eli } \mathrm{Cov}(\tilde{\beta}) - \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \geq 0.$$

- $\hat{\beta}$ on harhaton ja $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, joten *PNS-estimaattori* $\hat{\beta}$ *on täystehokas*.

- $S^2 = n\hat{\sigma}^2/(n-p)$ on harhaton, mutta $\mathrm{Var}\left(S^2\right) = 2\sigma^4/(n-p) > 2\sigma^4/n$, joten S^2 *ei ole täystehokas*.

Identiteetti $\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta = \mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta) + \hat{\varepsilon}$, tulos $\mathbf{X}'\hat{\varepsilon} = \mathbf{0}$ ja suora lasku $\Rightarrow$

$$\mathrm{S}\,(\beta) = (\hat{\beta} - \beta)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta) + (n - p)s^2.$$

Havaintojen yhteistiheysfunktiolle saadaan siten esitys

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}\left(\mathbf{y}; \beta, \sigma^2\right) &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\hat{\beta} - \beta)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\beta} - \beta)\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(n - p)s^2\right\}, \end{aligned}$$

mistä seuraa faktorointikriteerin perusteella *estimaattorien* $\hat{\beta}$ *ja* S^2 *tyhjentävyys*.

- $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ on harhaton, tyhjentävä ja täystehokas
- $\hat{\sigma}^2$ on harhainen, mutta sen muunnos $S^2 = \frac{n}{n-p}\hat{\sigma}^2$ on harhaton, mutta ei täystehokas (kuten ei myöskään $\hat{\sigma}^2$). Sekä $\hat{\sigma}^2$ että S^2 ovat tyhjentäviä.
- Ns. Gaussin ja Markovin lauseen mukaan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ on (varianssikriteerin mielessä) paras lineaarinen (eli tyyppiä $\mathbf{AY}$ oleva) harhaton estimaattori myös ilman normaalisuusoletusta eli oletuksilla $\mathrm{E}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ ja $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}) = \sigma^2\mathbf{I}_n$ (riippumattomuuttakaan ei vaadita).
  - Toisin sanoen, mille tahansa parametrin $\boldsymbol{\beta}$ harhattomalle estimaatorille $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{AY}$ pätee kaikilla $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ $\left(\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right)$

$$\mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) - \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}'\mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{a} \geq \sigma^2\mathbf{a}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}.$$