SU-estimointi lineaarisin rajoittein

- Tarkastellaan lineaarista mallia

$$\mathbf{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n\right), \quad \mathrm{r}\left(\mathbf{X}\right) = p,$$

  jossa parametriavaruus ei ole kuten aikaisemmin, vaan $\boldsymbol{\beta}$:n komponenttien oletetaan toteuttavan

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}, \ \ \mathbf{A} \ \ (q \times p) \ \ \text{ja} \ \ \mathbf{c} \ \ (q \times 1) \ \ \text{tunnettuja ja} \ \ \mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = q.$$

- Tehtävänä on estimoida $\boldsymbol{\beta}$ ja σ^2 ottaen nämä rajoitteet huomioon. Parametriavaruus on näin ollen $B = \left\{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}\right\}, \sigma^2 > 0$.
- Esimerkiksi testattavana on hypoteesi $\beta_{p-q+1} = \cdots = \beta_p = 0$ (viimeiset q selittäjää tarpeettomia). Tällöin $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}_q\end{bmatrix}$ ja $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.
- Tai $\beta_{p-1} = \beta_p$, jolloin $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ ja $\mathbf{c} = 0$. Tällainen hypoteesi voi seurata tutkittavan ilmiön taustateoriasta.

SU-estimointi lineaarisin rajoittein

- Maksimoitava log-uskottavuusfunktio

$$l\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^2;\mathbf{y}\right)=-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{S}\left(\boldsymbol{\beta}\right),\quad \mathrm{S}\left(\boldsymbol{\beta}\right)=\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)$$

  ehdolla ehdolla $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}$ ($\mathbf{A}$ $(q\times p)$, $\mathbf{c}$ $(q\times 1)$ ja $\mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right)=q$).

- Kuten aikaisemmin, tämä johtaa $\boldsymbol{\beta}$:n osalta $\mathrm{S}\left(\boldsymbol{\beta}\right)$:n minimointiin ehdolla $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}$.

- Jos $\hat{\boldsymbol{\beta}}_H$ on saatu estimaatti (eli $\boldsymbol{\beta}$:n SU-estimaatti), nähdään kuten aikaisemmin, että σ^2:n SU-estimaatti on $\hat{\sigma}^2_H=\frac{1}{n}\mathrm{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_H)$.

- Lisäksi ($\hat{\boldsymbol{\beta}}=\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$),

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_H=\hat{\boldsymbol{\beta}}-\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{c}),$$

  jossa matriisin $\mathbf{A}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{A}'$ epäsingulaarisuus seuraa oletuksista $\mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right)=q$ ja $\mathrm{r}\left(\mathbf{X}\right)=p$ (ks. HT 1.2).

- Laskemalla nähdään, että $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}_H=\mathbf{c}$.

SU-estimointi lineaarisin rajoittein

- Rajoitteet

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c},\ \mathbf{A}\,(q \times p)\,,\ \ \mathbf{c}\ \ (q \times 1)\ \text{ tunnettuja ja } \mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = q,$$

  voidaan esittää yhtäpitävästi ($\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^r$ tuntem. parametri, $r = p - q$)

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{d},\ \ \mathbf{C}\ \ (p \times r)\,,\ \mathbf{d}\ (p \times 1)\ \text{tunnettuja ja } \mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = r.$$

- Malli $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},\ \ \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n\right)$, voidaan tällöin kirjoittaa

$$\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{d} = (\mathbf{X}\mathbf{C})\,\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

  josta PNS:ää soveltaen saadaan $\boldsymbol{\phi}$:n SU-estimaatiksi

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \left(\mathbf{C}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{X}'\,(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{d})\,.$$

- SU-estimaatin invarianssiominaisuus $\Rightarrow\ \ \hat{\boldsymbol{\beta}}_H = \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{d}$.