Lineaariset mallit, kl 2016, Harjoitus 2, viikko 14

1. Olkoon matriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ idempotentti (eli $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} = \mathbf{A}'$). Osoita, että $\mathbf{A}$:n ominaisarvot ovat nollia ja ykkösiä.

Vihje: Ota lähtökohdaksi ominaisvektorit määrittävä yhtälö $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$; ks. monisteen Liite B.6.

2. Neliömatriisin jälki on sen diagonaalialkioiden summa eli, jos $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ on $n \times n$ matriisi, niin sen jälki (engl. trace) on $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Osoita seuraavat tulokset.

(i) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) + \mathsf{tr}\,(\mathbf{B})$, kun $\mathbf{B}$ on $n \times n$ matriisi

(ii) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{BA})$, kun tulot ovat määriteltyjä.

3. Jatkoa edelliselle. Osoita seuraavat tulokset.

(i) $\mathsf{tr}\,(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$:n ominaisarvojen summa, kun matriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ on symmetrinen.

(ii) $\mathbf{A}$:n aste $=$ $\mathbf{A}$:n jälki eli $\mathsf{r}(\mathbf{A}) = \mathsf{tr}\,(\mathbf{A})$, kun matriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ on ortogonaalinen projektio.

Vihje: Kohdassa (i) voit käyttää symmetrisen matriisin pääakselihajotelmaa (ks. monisteen Liite B.6) ja kohdassa (ii) lisäksi tehtävää 1 ja lineaarialgebrasta tunnetuksi oletettua tulosta, jonka mukaan matriisin aste ei muutu, kun matriisi kerrotaan vasemmalta tai oikealta jollain kääntyvällä matriisilla.

4. Tarkastellaan yhden selittäjän lineaarista regressiomallia

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., n, \quad \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \perp\!\!\!\perp, \ \varepsilon_i \sim \mathsf{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

Asettamalla $\alpha = \beta_1 + \beta_2 \bar{x}$, jossa $\bar{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ on selittävän muuttujan havaintojen keskiarvo, voidaan malliyhtälö $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ kirjoittaa muodossa

$$Y_i = \alpha + \beta_2(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i.$$

(i) Osoita normaaliyhtälöiden ratkaisukaavaa käyttäen, että parametrien α ja β_2 PNS-estimaatit ovat

$$\hat{\alpha} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{ja} \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

(ii) Osoita edelleen, että $\hat{\beta}_2$ voidaan esittää muodossa

$$\hat{\beta}_2 = r_{xy}\frac{s_y}{s_x},$$

jossa esimerkiksi $s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$ on selitettävän muuttujan havainnoista laskettu keskihajonta ja r_{xy} on havainnoista (y_i, x_i), $i = 1, ..., n$, laskettu korrelaatiokerroin eli

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

(iii) Totea, että kuvaus $(\beta_1, \beta_2) \mapsto (\alpha, \beta_2)$ on kääntäen yksikäsitteinen eli bijektio ja johda kohdan (i) ja SU-estimaatin invarianssiominaisuuden avulla alkuperäisen malliyhtälön parametrien β_1 ja β_2 PNS-estimaatit.

Vihje: SU-estimaatin invarianssiominaisuutta tarkastellaan kurssin Tilastollinen päättely II kurssimonisteen jaksossa 2.3.

5. Osoita, että jäännösneliösummafunktio $\mathsf{S}(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ voidaan lausua muodossa

$$\mathsf{S}(\boldsymbol{\beta}) = (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + n\hat{\sigma}^2,$$

jossa $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ on parametrin $\boldsymbol{\beta}$ PNS-estimaatti (tai SU-estimaatti) ja $\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\mathsf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ on virhevarianssin σ^2 SU-estimaatti (ks. monisteen s. 7-8). Päättele tämän perusteella, että PNS-estimaatti minimoi jäännösneliösummafunktion.

Vihje: Muokkaa jäännösneliösummafunktiossa $\mathsf{S}(\boldsymbol{\beta})$ olevaa erotusta $\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ ”sopivasti” niin, että saat sen riippumaan $\hat{\boldsymbol{\beta}}$:sta ja residuaalivektorista $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Jatko sujuu laskemalla ja ”sopivia” monisteen tuloksia käyttämällä.