Lineaariset mallit, kl 2016, Harjoitus 1, viikko 13 (huom.: pääsiäisloma)

1. Symmetristä matriisia $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ sanotaan positiivisesti definiitiksi (merkitään $\mathbf{A} > \mathbf{0}$), jos $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$ kaikilla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (ks. monisteen Liite B.11). Osoita, että positiivisesti definiitti matriisi on epäsingulaarinen (eli sillä on käänteismatriisi). (*Vihje*: Yksi tapa on olettaa $\mathbf{A}$ singulaariseksi ja todeta, ettei se voi tällöin olla positiivisesti definiitti.)

2. Olkoon $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ positiivisesti definiitti ja $\mathbf{B}$ $(n \times k)$ astetta k oleva matriisi (eli $\mathbf{B}$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat; ks. monisteen Liite B.9). Osoita, että $\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{B}$ $(k \times k)$ on positiivisesti definiitti ja siten epäsingulaarinen.

3. (i) Olkoon neliömatriisi $\mathbf{A}$ $(n \times n)$ idempotentti eli $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}$ (merkitään $\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$; ks. monisteen Liite B.10). Osoita, että $\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ on myös idempotentti.

(ii) Olkoon $\mathbf{X}$ on astetta p oleva $n \times p$ matriisi ja $\mathcal{R}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z} = \mathbf{X}\mathbf{b} \text{ jollain } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p\}$ $\mathbf{X}$:n sarakevektoreiden virittämä $\mathbb{R}^n$:n p-ulotteinen aliavaruus (eli $\mathbf{X}$:n sarakeavaruus).

Osoita, että matriisi $\mathbf{P} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'$ on symmetrinen ja idempotentti eli ns. (ortogonaalinen) projektio(matriisi). Totea myös, että matriisin $\mathbf{P}$ määritelmässä esiintyvä matriisi $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ on epäsingulaarinen ja että yhtälö $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pätee kaikilla $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{X})$ (kuten nimityksen projektiomatriisi perusteella odottaisikin).

4. Tarkastellaan aineistosta $y_1, ..., y_n$ laskettua otoskeskiarvoa $\bar{y} = n^{-1}\sum_{i=1}^n y_i$ ja otosvarianssia $s_y^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$. Osoita, että

$$(n-1)\, s_y^2 = \mathbf{y}'\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{J}\right)\mathbf{y},$$

jossa $\mathbf{y} = [y_1 \ \cdots \ y_n]'$ ja $\mathbf{J} = \mathbf{1}_n\left(\mathbf{1}_n'\mathbf{1}_n\right)^{-1}\mathbf{1}_n'$ $(\mathbf{1}_n = [1 \cdots 1]',\ n \times 1)$ on (edellisen tehtävän perusteella) projektiomatriisi.

5. (Yksisuuntainen varianssianalyysimalli) Olkoon $Y_{11}, ..., Y_{1n_1}, Y_{21}, ..., Y_{2n_2}, ..., Y_{p1}, ..., Y_{pn_p}$ riippumattomia ja $Y_{ji} \sim \mathsf{N}\left(\mu_j, \sigma^2\right)\ \left(\mu_j \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\right)$. Esitä tilanne lineaarisen mallin erikoistapauksena käyttäen lineaarisen mallin matriisiesitystä. Mikä on matriisin $\mathbf{X}$ aste?