

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi, talvi 2016
Harjoitus 4

1. Tehtävä 3.2 ja Tehtävä 3.5.(b).

2. Määrää integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{13 + 12 \cos(t)}.$$

3. Määrää integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

4. (1) Olkoon Q neliö (kuutio tasossa), jonka kärkipisteet ovat

$$(N + 1/2)(1 + i), (N + 1/2)(-1 + i) \\ (N + 1/2)(-1 - i), (N + 1/2)(1 - i),$$

$N \in \mathbb{Z}$ kiinnitetty. Osoita, että kuution reunalla $|\cot \pi z| < A$, missä A on vakio.

(2) Olkoon f analyyttinen tasossa lukuunottamatta äärellistä määrää napoja z_j , $j = 1, \dots, l$. Oletetaan, että navat eivät ole kokonaislukupisteissä.

Jos kuution reunapisteissä z pätee epäyhtälö $|f(z)| \leq M/|z|^k$, missä $k > 1$ ja M ovat vakioita, jotka eivät riipu luvusta N , niin osoita, että

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = - \sum_{j=1}^l \operatorname{Res}(\pi \cot \pi z f(z); z_j),$$

missä z_j on funktion f napa.

5. Osoita, että

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a),$$

missä $a > 0$.