

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi, talvi 2016
Harjoitus 3

1. Laske funktion $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2}$ Laurentin sarja kehityskeskukseksi $z = 3$ ja määrää suppenemisalue. Mikä on erillisen erikoispisteen $z = 3$ laatu.
2. (1) Määrää funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{j\pi : j \in \mathbb{Z}\}$, $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ erikoispisteen laatu origossa.
(2) Etsi funktion $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ Laurentin sarja kehityskeskukseksi origo ja määrää suppenemisalue.
3. Olkoon f ja g analyyttisiä kiekossa $\mathbb{D}(z_0, 1)$ ja olkoon funktiolla g yksinkertainen nollakohta pisteessä z_0 . Osoita, että silloin

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}; z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

4. Laske funktion

$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{(\exp(z) - 1) \cos(z)}$$

residy pisteessä $z_0 = 2\pi i$.

5. Määrää funktioiden

$$(a) \quad g(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \quad (b) \quad f(z) = \frac{\exp(z)}{\sin^2(z)}$$

residy kaikissa niiden navoissa kompleksitasossa \mathbb{C} .