

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi, talvi 2016
Harjoitus 1

1. Etsi seuraavien funktioiden Laurentin sarjat annetun kehityskeskuksen ympärillä. Määää suppenemisalue.

$$(a) \quad f(z) = ((z+1)^2 + 1) \sin \frac{1}{z+1} \text{ ja } z_0 = -1$$

$$(b) \quad f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3} \text{ ja } z_0 = 0$$

$$(c) \quad f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)} \text{ ja } z_0 = -2.$$

2. Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$. Määää Laurentin sarjan kertoimet, kun kehityskeskus on origo, funktioille

$$f(z) = \exp(az + bz^{-1}) \text{ ja } g(z) = \sin(a(z + z^{-1})).$$

3. Olkoot potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenemissäde R ja potenssisarjan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ suppenemissäde r , missä $rR > 1$. Määritellään $a_n = b_{-n}$, kun $n < 0$. Osoita, että silloin sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ suppenee tasaisesti annuluksen $\{z : 1/r < |z| < R\}$ kompakteissa osajoukoissa.

4. Etsi funktion

$$f(z) = \frac{1}{2 - 3z + z^2}$$

Laurentin sarja annuluksessa

$$(a) \quad \{z : 1 < |z| < 2\}$$

$$(b) \quad \{z : \sqrt{2} < |z + i| < \sqrt{5}\}.$$

5. Etsi funktioiden $f(z) = z^{-1}$ ja $g(z) = z^{-2}$ Laurentin sarjat annuluksessa $\{z : 1 < |z - i| < \infty\}$.