Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi: Modellösningar 4

1. Övning 3.2 (b) och Övning 3.5 (b).

   Lösningar 1. (3.2(b)) Vi söker Laurentserien kring origo för funktionen $f(z) = 1/\sin(z)$. Vi undersöker funktionen $g : \mathbb{D}(0,\pi) \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}, & \text{when } z \neq 0, \\ 0, & \text{då } z = 0. \end{cases}$$

   Som i övning 3.2(a) använder vi l'Hospitals regel och får att g är kontinuerlig och att

$$\lim_{z\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sin(z)} - \dfrac{1}{z}}{z} = \frac{1}{6}.$$

   Med andra ord har g en derivata i hela skivan $\mathbb{D}(0,\pi)$. Speciellt är g analytisk i hela skivan. Vi kan därmed skriva g som Taylorserien

$$g(z) = \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \cdots,$$

   som konvergerar då $|z| < \pi$. Nu hittar vi lätt den sökta Laurentserien:

$$\frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \cdots.$$

   Serien konvergerar då $0 < |z| < \pi$.

   (3.5 (b)) Vi beräknar funktionens

$$f(z) = \frac{\exp(z)}{\sin^2(z)}$$

   residy i alla dess poler.

   Andra ordningens poler hittas i $z = m\pi$,där $m \in \mathbb{Z}$. Residyns räkneformel ger att

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f, z = m\pi) &= \lim_{z\to m\pi} \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-m\pi)^2 \frac{\exp(z)}{\sin^2(z)}\right)\\ &= \lim_{z\to m\pi}\Big(\frac{\exp(z)(z-m\pi)^2\sin(z)}{\sin^3(z)} + \frac{\exp(z)2(z-m\pi)\sin(z)}{\sin^3(z)}\\ &\quad - \frac{\exp(z)2(z-m\pi)^2\cos(z)}{\sin^3(z)}\Big) \quad (\text{vi betecknar } z - m\pi = u)\\ &= \lim_{u\to 0}\left(\exp(u+m\pi)\frac{u^2\sin(u) + 2u\sin(u) - 2u^2\cos(u)}{\sin^3(u)}\right)\\ &= \exp(m\pi)\underbrace{\lim_{u\to 0}\left(\frac{u^2\sin(u)+2u\sin(u)-2u^2\cos(u)}{\sin^3(u)}\right)}_{\mathrm{A}}.\end{aligned}$$

Vi undersöker gränsvärdet A med hjälp av l'Hospitals regel:

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \lim_{u\to 0}\frac{u^3}{\sin^3(u)}\left(\frac{u^2\sin(u)+2u\sin(u)-2u^2\cos(u)}{u^3}\right)\\ &= 1\cdot\lim_{u\to 0}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^2\sin(u)+2u\sin(u)-2u^2\cos(u))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u^3}\right)\\ &= \cdots = 1.\end{aligned}$$

Slutligen får vi

$$\mathrm{Res}(f, z = m\pi) = \exp(m\pi).$$

2. Bestäm integralen

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{13+12\cos(t)}.$$

Lösningar 2. Vi minns att

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(\exp(it)+\exp(-it)\right).$$

Till följande betecknar vi $z = \exp(it)$, och får

$$\mathrm{d}z = i\exp(it)\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Ur substitutionen följer att

$$\frac{1}{13+12\cos(t)} = \frac{1}{13+6\left(z+\dfrac{1}{z}\right)} = \frac{z}{13z+6z^2+6},$$

och vi får

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{13+12\cos(t)} = -i\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{6z^2+13z+6}.$$

Vi vill använda Residysatsen, så vi betraktar funktionen

$$f(z) = \frac{1}{6z^2+13z+6} = \frac{1}{6\left(z+\dfrac{2}{3}\right)\left(z+\dfrac{3}{2}\right)}.$$

Funktionen har simpla poler i $z=-\frac{2}{3}$ och $z=-\frac{3}{2}$, men endast den första av dessa ligger innanför integrationsstigen $\partial\mathbb{D}(0,1)$. Vi beräknar residyn i denna punkt:

$$\operatorname{Res}\left(f(z); -\frac{2}{3}\right) = \lim_{z\to-\frac{2}{3}} \left(z+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{6\left(z+\dfrac{2}{3}\right)\left(z+\dfrac{3}{2}\right)} = \frac{1}{5}.$$

Med hjälp av Residysatsen får vi

$$-i\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{6z^2+13z+6} = -i\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{Res}\left(f(z); -\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{5}.$$

Den ursprungliga integralens värde är alltså $-\frac{2\pi}{5}$.

3. Bestäm integralen
$$\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$

Lösningar 3. Vi märker först att

$$g(x) = \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}$$

är jämn för alla $x \in \mathbb{R}$, alltså $g(x) = g(-x)$. Nu kan vi skriva vår integral på formen

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\frac{1}{2i}(\exp(ix)-\exp(-ix))}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\frac{1}{4i}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\exp(ix)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x}_{A} - \underbrace{\frac{1}{4i}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\exp(-ix)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x}_{B}. \end{aligned}$$

Integral A: Vi bildar en stig bestående av det reella intervallet $[-R, R]$ och bågen av den halvcirkel $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ som ligger i den övre planhalvan. Här är R något postivt heltal, och vi färdas i den positiva riktningen. Om vi betecknar stigen längs $[-R, R]$ med $\gamma_{[-R,R]}$, och stigen längs kurvan av halvcirkeln med γ_R, kan vi bilda integralen

$$\begin{aligned} I' &= \frac{1}{4i}\int_{\gamma_{[-R,R]}*\gamma_R} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{4i}\int_{\gamma_{[-R,R]}} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + \frac{1}{4i}\int_{\gamma_R} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Jordans Lemma ger oss att den andra av dessa integraler får värdet 0, så vi får

$$I' = \frac{1}{4i}\int_{\gamma_{[-R,R]}} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + 0 = \frac{1}{4i}\int_{-R}^R \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.$$

Vi kan beräkna integralens I' värde med hjälp av Residysatsen. Funktionen

$$f(z) = \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}$$

har en andra ordningens pol i $z = i$, och den är den enda polen i det område som begränsas av $\gamma_{[-R,R]} * \gamma_R$. Vi beräknar residyn i denna punkt:

$$\mathrm{Res}(f; i) = \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-i)^2\frac{z\exp(iz)}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{4e}.$$

Residysatsen ger oss att

$$I' = \frac{1}{4i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) = \frac{2\pi i}{4i} \cdot \frac{1}{4e} = \frac{\pi}{8e}.$$

Eftersom $A = \lim_{R\to\infty} I'$ får vi $A = \pi/(8e)$.

Integral B: På samma sätt beräknar vi värdet av integralen B, nu längs bågen av den halvcirkel som ligger i den nedre planhalvan. Slutligen får vi $B = -\pi/(8e)$. Ur detta följer att den sökta integralens värde är

$$I = A - B = \frac{\pi}{8e} + \frac{\pi}{8e} = \frac{\pi}{4e}.$$

4. (1) Låt Q vara en kvadrat (en kub i planet), med hörnpunkterna

$$\begin{aligned}&(N+1/2)(1+i), (N+1/2)(-1+i)\\ &(N+1/2)(-1-i), (N+1/2)(1-i),\end{aligned}$$

$N \in \mathbb{Z}$ fixerat. Visa att det längs kubens sidor gäller att $|\cot(\pi z)| < A$,där A är konstant.

(2) Låt f vara analytisk i planet, bortsett ett ändligt antal poler z_j, $j = 1, 2, \dots l$. Anta att dessa poler inte är heltalspunkter.

Om olikheten $|f(z)| \leq M/|z|^k$, där $k > 1$ och M är konstanter oberoende av N, gäller i kubens kantpunkter z, vis att då gäller

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z); z_j),$$

där z_j är en pol till funktionen f.

Lösningar 4. (1) Vi betecknar $z = x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$. Vi betraktar det sökta uttryckets kvadrat:

$$\begin{aligned}K^2 := |\cot(\pi z)|^2 &= \left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right|^2 = \left|\frac{\cos(\pi(x+iy))}{\sin(\pi(x+iy))}\right|^2 = \left|\frac{\cos(\pi x + i\pi y)}{\sin(\pi x + i\pi y)}\right|^2\\ &= \left|\frac{\cos(\pi x)\cos(i\pi y) - \sin(\pi x)\sin(i\pi y)}{\sin(\pi x)\cos(i\pi y) + \sin(i\pi y)\cos(\pi x)}\right|^2\\ &= \left|\frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y) - i\sin(\pi x)\sinh(\pi y)}{\sin(\pi x)\cosh(\pi y) + i\sinh(\pi y)\cos(\pi x)}\right|^2\end{aligned}$$

Eftersom $|\omega|^2 = \omega \cdot \overline{\omega}$ får vi att

$$\begin{aligned}
K^2 &= \frac{\cos^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \sin^2(\pi x)\sinh^2(\pi y)}{\sin^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \sinh^2(\pi y)\cos^2(\pi x)} \\
&= \frac{\cos^2(\pi x)(1+\sinh^2(\pi y)) + \sin^2(\pi x)\sinh^2(\pi y)}{\sin^2(\pi x)(1+\sinh^2(\pi y)) + \cos^2(\pi x)\sinh^2(\pi y)} \\
&= \frac{\cos^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)}{\sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)}.
\end{aligned}$$

Nu gäller längs de vertikala sidorna$x = \pm(N + 1/2)$ att:

$$\cos^2(\pi x) = 0 \quad \text{and} \quad \sin^2(\pi x) = 1,$$

och därmed

$$K^2 = \frac{\sinh^2(\pi y)}{1 + \sinh^2(\pi y)} \leq 1 \implies |\cot(\pi z)| \leq 1.$$

Längs de horisontella sidorna $y = \pm(N + 1/2)$ får vi:

$$K^2 \leq \frac{1 + \sinh^2(\pi y)}{\sinh^2(\pi y)} = \frac{1}{\sinh^2(\pi y)} + 1 < \frac{1}{\sinh^2(\pi/2)} + 1 < \frac{6}{5}.$$

Vi får $|\cot(\pi z)| < \sqrt{6/5}$.

(2) Enligt Residysatsen har vi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_N} \pi\cot(\pi z)f(z)\mathrm{d}z &= \sum_{s=-N}^{N} \operatorname{Res}(\pi\cot(\pi z)f(z); s) \\
&\quad + \sum_{s=1}^{l} \operatorname{Res}(\pi\cot(\pi z)f(z); z_s).
\end{aligned}$$

Funktionen $\cot(\pi z)$ har en enkel pol i varje heltalspunkt. Vi beräknar residyn i dessa punkter:

$$\operatorname{Res}(\pi\cot(\pi z)f(z); s) = f(s).$$

Vi märker att

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} \pi\cot(\pi z)f(z)\mathrm{d}z\right| &\leq \int_{\partial Q} |\cot(\pi z)||f(z)|\mathrm{d}z \\
&\leq \sqrt{\frac{6}{5}}\frac{M}{N^k} \to 0, \text{ då } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Det följer att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}(\pi\cot(\pi z) f(z); z_j).$$

5. Visa att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a),$$

där $a > 0$.

Lösningar 5. Vi betecknar

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}, \quad a > 0.$$

Utgående från Övning 4.4 får vi

$$\begin{aligned}
S := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} \\
&= -\sum_{j=1}^{2} \operatorname{Res}\left(\pi\cot(\pi z)\frac{1}{z^2+a^2}; z_j = (-1)^{j+1} ai\right) \\
&= -\operatorname{Res}\left(\pi\cot(\pi z)\frac{1}{z^2+a^2}; ai\right) \\
&\quad - \operatorname{Res}\left(\pi\cot(\pi z)\frac{1}{z^2+a^2}; -ai\right),
\end{aligned}$$

där $z = \pm ai$ är funktionens $\pi\cot(\pi z) f(z)$ första ordningens poler. Vi får

$$\operatorname{Res}(\pi\cot(\pi z) f(z); ai) = \frac{\pi\cot(\pi ai)}{2ai},$$

och motsvarande

$$\operatorname{Res}(\pi\cot(\pi z) f(z); -ai) = \frac{-\pi\cot(-\pi ai)}{2ai}.$$

Nu har vi

$$S = -\left(\frac{\pi}{2ai}\cot(\pi ai) - \frac{\pi}{2ai}\cot(-\pi ai)\right).$$

Med hjälp av likheterna

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)), \\
\cos(z) &= \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \\
\cot(z) &= \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \\
\coth(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{\exp(z) - \exp(-z)},
\end{aligned}$$

får vi att

$$\cot(\pi ai) - \cot(-\pi ai) = i\coth(-\pi a) - i\coth(\pi a).$$

Slutligen får vi att

$$S = -\frac{\pi}{2ai}\left(i\coth(-\pi a) - i\coth(\pi a)\right) = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a).$$