Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi: Modellösningar 2

1. Låt $a, b \in \mathbb{C}$. Bestäm faktorerna för Laurentserien kring origo för funktionerna

$$f(z) = \exp(az + bz^{-1}) \text{ och } g(z) = \sin(a(z + z^{-1})).$$

Lösningar 1. Vi undersöker först funktionen $f(z) = \exp(az + b/z)$ i ringen $D = \{z : 0 < |z| < \infty\}$. Enligt Laurents teorem får vi faktorerna med formeln

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

Vi fixerar n:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z^{n+1}} &= \frac{\exp\left(\frac{b}{z}\right)\exp(za)}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}} \exp\left(\frac{b}{z}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k a^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k-n-1} a^k}{k!} \exp\left(\frac{b}{z}\right). \end{aligned}$$

Detta ger oss att

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{|z|=1} a^k z^{k-n-1} \exp\left(\frac{b}{z}\right) \mathrm{d}z \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\int_{|z|=1} a^k z^{k-n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j! z^j} \mathrm{d}z}_{\mathrm{I}}. \end{aligned}$$

Vi märker att

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \left(a_k z^{k-n-1} \left(1 + \frac{b}{z} + \frac{b^2}{2z^2} + \cdots \right) \right) \mathrm{d}z \\ &= \int_{|z|=1} a_k z^{k-n-1} \mathrm{d}z + \int_{|z|=1} a_k z^{k-n-1} \frac{b}{z} \mathrm{d}z + \cdots, \end{aligned}$$

och eftersom $\int_{|z|=1} (1/z)\mathrm{d}z = 2\pi i$ och $\int_{|z|=1} h(z) = 0$, då h är analytisk får vi

$$I = \begin{cases} 0, & k - n < 0 \\ \dfrac{2\pi i}{(k-n)!} a^k b^{k-n}, & k - n \geq 0 \end{cases}.$$

Ur detta följer att

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} I = \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty} \frac{a^k b^{k-n}}{k!(k-n)!}.$$

Till följande undersöker vi funktionen $g(z) = \sin(a(z + z^{-1}))$ i samma ring. Vi minns att

$$\sin(a(z + z^{-1})) = \frac{1}{2i}(\exp(ia(z + z^{-1})) - \exp(-ia(z + z^{-1}))),$$

och ur detta följer (utgående från den första delen) att

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty} \frac{(ia)^{k+k-n}}{k!(k-n)!} - \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty} \frac{(-ia)^{2k-n}}{k!(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ia)^{2k+|n|}}{2ik!(|n|+k)!}. \end{aligned}$$

2. Sök funktionernas $f(z) = z^{-1}$ och $g(z) = z^{-2}$ Laurentserier i ringen $\{z : 1 < |z - i| < \infty\}$.

Lösningar 2. Först undersöker vi funktionen f. Vi betraktar uttrycket z^{-1}:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i + (z - i)} = \frac{1}{i} \frac{1}{1 - i(z - i)}.$$

Vi får $|i(z - i)| > 1$ då $z \in \{z : 1 < |z - i| < \infty\}$, och med hjälp av den geometriska serien frår vi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{z - i} \frac{1}{1 - \frac{1}{i(z - i)}} = \frac{1}{z - i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^n (z - i)^n} \\ &= \frac{1}{z - i} \sum_{n=-\infty}^{0} i^n (z - i)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} i^n (z - i)^{n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1} (z - i)^n, \end{aligned}$$

vilket är funktionens Laurentserie i ringen.

Till följande undersöker vi funktionen g. Vi märker att

$$g(z) = z^{-2} = -f'(z),$$

och använder detta. Utgående från den första delen får vi:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{z^2} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} n i^{n+1}(z-i)^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) i^{n+2}(z-i)^{n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) i^{n}(z-i)^{n} \quad \forall z \in \{z : 1 < |z-i| < \infty\}.\end{aligned}$$

Ur detta följer att

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) i^{n}(z-i)^{n},$$

vilket är funktionens Laurentserie i ringen.

3. Berätta vilken sorts singulariteter det är frågan om i (a), (b) och (c) i Uppgift 1.1.

   Lösningar 3. (a) Väsentlig singularitet.

   (b) Hävbar singularitet.

   (c) En pol av första ordningen.

4. Bestäm singulariteterna hos följande funktioner. Berätta hurudan varje singularitet är.

$$f(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{z^4}, \quad f(z) = \exp(z + z^{-1}), \quad f(z) = \frac{z}{\sin^2(z)}.$$

   Lösningar 4. Vi märker att

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{2}{z^3} + \frac{1}{3z} + \frac{2}{5}z + \cdots,\end{aligned}$$

alltså är den enda singulariteten $z = 0$, och det är frågan om en pol av tredje ordningen.

Vi märker till följande att

$$\begin{aligned} f(z) = \exp(z + z^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + z^{-1})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k + \binom{k}{1} z^{k-2} + \binom{k}{2} z^{k-4} + \cdots + z^{-k}}{k!}. \end{aligned}$$

Detta ger oss att $z = 0$ är den enda singulariteten, och att den i själva verket är en väsentlig singularitet.

I det sista fallet har vi de möjliga singulariteterna $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. I punkten $z = 0$ hittar vi en pol av första ordningen, eftersom

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\sin^2(z)} = 1 \neq 0.$$

I punkterna $z = n\pi \neq 0$ hittar vi poler av andra ordningen, eftersom

$$\lim_{z \to \pi n} \frac{(z - n\pi)^2 z}{\sin^2(z)} = n\pi \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

5. Bestäm hurudan funktionens $f(z) = z \cos\left((z - 1)^{-1}\right)$ singularitet är i $z_0 = 1$ och beräkna $\mathrm{Res}(f, 1)$.

   Lösningar 5. Först skriver vi om uttrycket $\cos((z - 1)^{-1})$:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{z - 1}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z - 1)^{2n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2!(z - 1)^2} + \frac{1}{4!(z - 1)^4} - \cdots \end{aligned}$$

Ur detta följer att

$$\begin{aligned}
f(z) &= z\cos\left(\frac{1}{1-z}\right) = (z-1)\cos\left(\frac{1}{1-z}\right) + \cos\left(\frac{1}{1-z}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} \\
&= (z-1) + 1 - \frac{1}{2!(z-1)} - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^3} \\
&\quad + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \cdots
\end{aligned}$$

Funktionen f har en väsentlig singularitet i $z = 1$, och

$$\operatorname{Res}(f, 1) = -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}.$$