Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi: Malliratkaisut 4

1. Tehtävä 3.2 (b) ja Tehtävä 3.5 (b).

   Ratkaisut 1. (3.2(b)) Etsimme funktion $f(z) = 1/\sin(z)$ Laurentin sarja kehityskeskuksena origo. Tutkimme funktiota $g : \mathbb{D}(0,\pi) \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \\ 0, & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

   Tehtävän 3.2(a):n mukaan käytämme l'Hospitalin sääntö, ja saamme, että g on jatkuva ja, että

$$\lim_{z\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sin(z)} - \dfrac{1}{z}}{z} = \frac{1}{6}.$$

   Saamme siis, että funktiolla g on olemassa derivaatta koko kiekossa $\mathbb{D}(0,\pi)$. Erityisesti g on analyyttinen koko kiekossa. Voimme siis kirjoittaa g Taylorin sarjana

$$g(z) = \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \cdots,$$

   joka suppenee kun $|z| < \pi$. Nyt saamme helposti etsitty Laurentin sarjaa:

$$\frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \cdots.$$

   Sarja suppenee kun $0 < |z| < \pi$.

   (3.5 (b)) Laskemme funktion

$$f(z) = \frac{\exp(z)}{\sin^2(z)}$$

   residyt kaikissa navoissa.

Toisen kertaluvun navat ovat pisteissä $z = m\pi$, missä $m \in \mathbb{Z}$. Residyn laskukaavan mukaan saamme

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z = m\pi) &= \lim_{z\to m\pi} \frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-m\pi)^2\frac{\exp(z)}{\sin^2(z)}\right) \\
&= \lim_{z\to m\pi}\Bigg(\frac{\exp(z)(z-m\pi)^2\sin(z)}{\sin^3(z)} + \frac{\exp(z)2(z-m\pi)\sin(z)}{\sin^3(z)} \\
&\quad - \frac{\exp(z)2(z-m\pi)^2\cos(z)}{\sin^3(z)}\Bigg) \quad (\text{merkitsemme } z - m\pi = u) \\
&= \lim_{u\to 0}\left(\exp(u+m\pi)\frac{u^2\sin(u)+2u\sin(u)-2u^2\cos(u)}{\sin^3(u)}\right) \\
&= \exp(m\pi)\underbrace{\lim_{u\to 0}\left(\frac{u^2\sin(u)+2u\sin(u)-2u^2\cos(u)}{\sin^3(u)}\right)}_{\mathrm{A}}.
\end{aligned}$$

Tarkastamme raja-arvoa A l'Hospitalin säännön avulla:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \lim_{u\to 0}\frac{u^3}{\sin^3(u)}\left(\frac{u^2\sin(u)+2u\sin(u)-2u^2\cos(u)}{u^3}\right) \\
&= 1\cdot\lim_{u\to 0}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^2\sin(u)+2u\sin(u)-2u^2\cos(u))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u^3}\right) \\
&= \cdots = 1.
\end{aligned}$$

Saamme siis lopulta, että

$$\operatorname{Res}(f, z = m\pi) = \exp(m\pi).$$

2. Määrää integraali

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{13+12\cos(t)}.$$

Ratkaisut 2. Muistamme, että

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(\exp(it)+\exp(-it)\right).$$

Seuraavaksi merkitsemme $z = \exp(it)$, ja saamme

$$\mathrm{d}z = i\exp(it)\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Muuttujanvaihdosta seuraa, että

$$\frac{1}{13+12\cos(t)} = \frac{1}{13+6\left(z+\dfrac{1}{z}\right)} = \frac{z}{13z+6z^2+6},$$

ja saamme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{13+12\cos(t)} = -i\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{6z^2+13z+6}.$$

Haluamme käyttää Residylausetta, niin tutkimme funktiota

$$f(z) = \frac{1}{6z^2+13z+6} = \frac{1}{6\left(z+\dfrac{2}{3}\right)\left(z+\dfrac{3}{2}\right)}.$$

Funktiolla on yksinkertaisia napoja pisteissä $z=-\frac{2}{3}$ ja $z=-\frac{3}{2}$, mutta vain ensimmäinen näistä on integroimispolun $\partial\mathbb{D}(0,1)$ sisällä. Laskemme residyn pisteessä:

$$\operatorname{Res}\left(f(z);-\frac{2}{3}\right) = \lim_{z\to-\frac{2}{3}}\left(z+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{6\left(z+\dfrac{2}{3}\right)\left(z+\dfrac{3}{2}\right)} = \frac{1}{5}.$$

Nyt saamme Residylauseen mukaan, että

$$-i\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{6z^2+13z+6} = -i\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{Res}\left(f(z);-\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{5}.$$

Alkuperäisen integraalin arvo on siis $-\frac{2\pi}{5}$.

3. Määrää integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$

Ratkaisut 3. Huomaamme ensin, että funktio

$$g(x) = \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}$$

on parillinen kaikilla $x \in \mathbb{R}$, eli $g(x) = g(-x)$. Nyt voimme kirjoittaa integraalimme (joka on olemassa) muotoon

$$\begin{aligned}
I = \int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \\
= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\frac{1}{2i}(\exp(ix)-\exp(-ix))}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \\
= \underbrace{\frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\exp(ix)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x}_{A} - \underbrace{\frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\exp(-ix)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x}_{B}.
\end{aligned}$$

Integraali A: Muodostamme polun, joka koostuu reaaliakselilla olevasta välistä $[-R,R]$ ja ylemmässä puolitasossa olevasta puoliympyrän $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ kaaresta. Tässä tapauksessa R on joku positiivinen reaaliluku. Kuljemme positiiviseen suuntaan. Jos merkitsemme polkua pitkin $[-R,R]$ merkillä $\gamma_{[-R,R]}$, ja polkua pitkin puoliympyrän kaarta merkillä γ_R, voimme muodostaa integraalia

$$\begin{aligned}
I' &= \frac{1}{4i}\int_{\gamma_{[-R,R]}*\gamma_R} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2} \\
&= \frac{1}{4i}\int_{\gamma_{[-R,R]}} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + \frac{1}{4i}\int_{\gamma_R} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Jordanin Lemman nojalla toinen yllä olevista integraaleista saa arvon 0, niin saamme

$$I' = \frac{1}{4i}\int_{\gamma_{[-R,R]}} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z + 0 = \frac{1}{4i}\int_{-R}^{R} \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.$$

Voimme laskea integraalin I' arvo Residylauseen avulla. Funktiolla

$$f(z) = \frac{z\exp(iz)}{(z^2+1)^2}$$

on olemassa toisen kertaluvun napa pisteessä $z = i$, ja se on ainoa napa puoliympyrän $\gamma_{[-R,R]} * \gamma_R$ rajaaman alueen sisällä. Laskemme funktion residy pisteessä:

$$\mathrm{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-i)^2\frac{z\exp(iz)}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{4e}.$$

Nyt saamme Residylauseen mukaan

$$I' = \frac{1}{4i} \cdot 2\pi i \mathrm{Res}(f; i) = \frac{2\pi i}{4i} \cdot \frac{1}{4e} = \frac{\pi}{8e}.$$

Koska $A = \lim_{R\to\infty} I'$ saamme $A = \pi/(8e)$.

Integraali B: Samalla tavalla laskemme integraalin B arvo, nyt alemmassa puolitasossa olevaa puoliympyrän kaarta pitkin. Saamme lopulta $B = -\pi/(8e)$. Tästä seuraa, että etsitty integraalin arvo on

$$I = A - B = \frac{\pi}{8e} + \frac{\pi}{8e} = \frac{\pi}{4e}.$$

4. (1) Olkoon Q neliö (kuutio tasossa), jonka kärkipisteet ovat

$$(N + 1/2)(1 + i), (N + 1/2)(-1 + i)$$
$$(N + 1/2)(-1 - i), (N + 1/2)(1 - i),$$

$N \in \mathbb{Z}$ kiinnitetty. Osoita, että kuution reunalla $|\cot(\pi z)| < A$, missä A on vakio.

(2) Olkoon f analyyttinen tasossa lukuunottamatta äärellistä määrää napoja z_j, $j = 1, 2, \ldots l$. Oletetaan, että navat eivät ole kokonaislukupisteissä.

Jos kuution reunapisteissä z pätee epäyhtälö $|f(z)| \leq M/|z|^k$, missä $k > 1$ ja M ovat vakioita, jotka eivät riipu luvusta N, niin osoita, että

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{j=1}^{l} \mathrm{Res}(\pi\cot(\pi z) f(z); z_j),$$

missä z_j on funktion f napa.

Ratkaisut 4. (1) Merkitsemme $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$. Tarkastamme etsitty lausekkeen neliö:

$$K^2 := |\cot(\pi z)|^2 = \left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right|^2 = \left|\frac{\cos(\pi(x+iy))}{\sin(\pi(x+iy))}\right|^2 = \left|\frac{\cos(\pi x + i\pi y)}{\sin(\pi x + i\pi y)}\right|^2$$
$$= \left|\frac{\cos(\pi x)\cos(i\pi y) - \sin(\pi x)\sin(i\pi y)}{\sin(\pi x)\cos(i\pi y) + \sin(i\pi y)\cos(\pi x)}\right|^2$$
$$= \left|\frac{\cos(\pi x)\cosh(\pi y) - i\sin(\pi x)\sinh(\pi y)}{\sin(\pi x)\cosh(\pi y) + i\sinh(\pi y)\cos(\pi x)}\right|^2$$

Koska $|\omega|^2 = \omega \cdot \overline{\omega}$ saamme

$$\begin{aligned}
K^2 &= \frac{\cos^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \sin^2(\pi x)\sinh^2(\pi y)}{\sin^2(\pi x)\cosh^2(\pi y) + \sinh^2(\pi y)\cos^2(\pi x)} \\
&= \frac{\cos^2(\pi x)(1+\sinh^2(\pi y)) + \sin^2(\pi x)\sinh^2(\pi y)}{\sin^2(\pi x)(1+\sinh^2(\pi y)) + \cos^2(\pi x)\sinh^2(\pi y)} \\
&= \frac{\cos^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)}{\sin^2(\pi x) + \sinh^2(\pi y)}.
\end{aligned}$$

Nyt saamme pystysivuilla $x = \pm(N + 1/2)$:

$$\cos^2(\pi x) = 0 \quad \text{ja} \quad \sin^2(\pi x) = 1,$$

ja siis

$$K^2 = \frac{\sinh^2(\pi y)}{1+\sinh^2(\pi y)} \le 1 \implies |\cot(\pi z)| \le 1.$$

Vaakasuorilla sivuilla $y = \pm(N + 1/2)$ saamme:

$$K^2 \le \frac{1+\sinh^2(\pi y)}{\sinh^2(\pi y)} = \frac{1}{\sinh^2(\pi y)} + 1 < \frac{1}{\sinh^2(\pi/2)} + 1 < \frac{6}{5}.$$

Saamme $|\cot(\pi z)| < \sqrt{6/5}$.

(2) Residylauseen avulla saamme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_N} \pi\cot(\pi z) f(z)\mathrm{d}z = &\sum_{s=-N}^{N} \mathrm{Res}(\pi\cot(\pi z)f(z); s) \\
&+ \sum_{s=1}^{l} \mathrm{Res}(\pi\cot(\pi z)f(z); z_s).
\end{aligned}$$

Funktiolla $\cot(\pi z)$ on yksinkertainen napa jokaisessa kokonaislukupisteessä. Laskemme residyt näissä pisteissä, ja saamme

$$\mathrm{Res}(\pi\cot(\pi z)f(z); s) = f(s).$$

Huomaamme, että

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} \pi\cot(\pi z) f(z)\mathrm{d}z\right| &\le \int_{\partial Q} |\cot(\pi z)||f(z)|\mathrm{d}z \\
&\le \sqrt{\frac{6}{5}}\frac{M}{N^k} \to 0, \text{ kun } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{j=1}^{l} \mathrm{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z); z_j).$$

5. Osoita, että

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a),$$

missä $a > 0$.

Ratkaisut 5. Merkitään

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}, \quad a > 0.$$

Nyt meillä on Tehtävän 4.4 nojalla

$$\begin{aligned}
S := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \\
&= -\sum_{j=1}^{2} \mathrm{Res}\left(\pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2 + a^2}; z_j = (-1)^{j+1} ai\right) \\
&= -\mathrm{Res}\left(\pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2 + a^2}; ai\right) \\
&\quad - \mathrm{Res}\left(\pi \cot(\pi z) \frac{1}{z^2 + a^2}; -ai\right),
\end{aligned}$$

missä $z = \pm ai$ on funktion $\pi \cot(\pi z) f(z)$ ensimmäisen kertaluvun napoja. Saamme

$$\mathrm{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z); ai) = \frac{\pi \cot(\pi ai)}{2ai},$$

ja vastaavasti

$$\mathrm{Res}(\pi \cot(\pi z) f(z); -ai) = \frac{-\pi \cot(-\pi ai)}{2ai}.$$

Nyt meillä siis on

$$S = -\left(\frac{\pi}{2ai} \cot(\pi ai) - \frac{\pi}{2ai} \cot(-\pi ai)\right).$$

Käyttäen yhtälöt

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)), \\
\cos(z) &= \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \\
\cot(z) &= \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \\
\coth(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{\exp(z) - \exp(-z)},
\end{aligned}$$

saamme, että

$$\cot(\pi ai) - \cot(-\pi ai) = i \coth(-\pi a) - i \coth(\pi a).$$

Nyt meillä lopulta on

$$S = -\frac{\pi}{2ai}\left(i \coth(-\pi a) - i \coth(\pi a)\right) = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$