Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi: Malliratkaisut 3

1. Laske funktion $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2}$ Laurentin sarja kehityskeskuksena $z = 3$ ja määrää suppenemisalue. Mikä on erillisen erikoispisteen $z = 3$ laatu?

   Ratkaisut 1. Binomilauseen avulla saamme:

$$(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \cdots, \quad |z| < 1,$$

ja tästä seuraa, että

$$\left(1+\frac{u}{3}\right)^{-2} = 1 + (-2)\frac{u}{3} + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \cdots, \quad \left|\frac{u}{3}\right| < 1. \tag{1}$$

Käyttäen (1) ja sijoitusta $z = u + 3$ saamme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{(3+u)^2u^2} &= \frac{1}{9u^2\left(1+\frac{u}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{9u^2}\left(1 + \frac{-2u}{3} + \frac{(-2)(-3)u^2}{2!\cdot 3^2} + \frac{(-2)(-3)(-4)u^3}{3!\cdot 3^3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{9u^2} - \frac{2}{27u} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}u + \cdots \\
&= \frac{1}{9(z-3)^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}(z-3) + \cdots.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $z = 3$ on toisen kertaluvun napa. Sarja suppenee $\forall z$, joille $0 < |z-3| < 3$.

Vaihtoehtoisesti voimme huomata, että

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\frac{d}{dz}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-3}{3}\right)},$$

ja käyttää geometrista sarjaa.

2. (1) Määrää funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{j\pi : j \in \mathbb{Z}\}$, $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ erikoispisteen laatu origossa.

   (2) Etsi funktion $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ Laurentin sarja kehityskeskuksena origo ja määrää suppenemisalue.

Ratkaisut 2. (1) Muokaamme funktion lauseketta:

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{z - \sin(z)}{z \sin(z)}.$$

Kun $z \to 0$, sekä osoittaja, että nimittäjä menee nollaan. Voimme siis käyttää l'Hospitalin sääntö:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z - \sin(z)}{z \sin(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{d}{dz}(z - \sin(z))}{\frac{d}{dz}(z \sin(z))} = \lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos(z)}{\sin(z) + z \cos(z)}.$$

Nyt voimme taas käyttää l'Hospitalin sääntö, ja saamme lopulta

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{\cos(z) + \cos(z) - z \sin(z)} = 0.$$

Koska raja-arvo on olemassa ja äärellinen tiedämme, että piste $z = 0$ on poistuva erikoispiste.

(2) Siiretty Harjoitukseen 4.

3. Olkoon f ja g analyyttisiä kiekossa $\mathbb{D}(z_0, 1)$ ja olkoon funktiolla g yksinkertainen nollakohta pisteessä z_0. Osoita, että silloin

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}; z_0\right) = \frac{f(z)}{g'(z)}.$$

Ratkaisut 3. Voimme esittää funktiot f ja g potenssisarjoina:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$$
$$g(z) = \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^k = (z - z_0) \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Merkitään $h(z) := \sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^{k-1}$, ja huomaamme, että $h(z_0) \neq 0$. Nyt

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z - z_0) h(z)},$$

missä f/h on analyyttinen. Taylorin kehitelmän mukaan saamme

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}; z_0\right) = \frac{a_0}{b_1} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Vaihtoehtoisesti: Funktiolla g on yksinkertainen nollakohta pisteessä z_0, eli funktiolla f/g on yksinkertainen napa samassa pisteessä. Saamme residyn laskukaavalla

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}; z_0\right) &= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)f(z)}{g(z)-0} \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus pätee, koska analyyttisellä funktiolla g on olemassa derivaatta pisteessä $z = z_0$.

4. Laske funktion

$$f(z) = \frac{z^2+2}{(\exp(z)-1)\cos(z)}$$

residy pisteessä $z_0 = 2\pi i$.

Ratkaisut 4. Käyttäen Tehtävän 3 tulosta määrittelemme

$$f(z) = \frac{z^2+2}{\cos(z)} \quad \text{ja} \quad g(z) = \exp(z) - 1,$$

ja saamme

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2+2}{(\exp(z)-1)\cos(z)}; 2\pi i\right) = \frac{\frac{(2\pi i)^2+2}{\cos(2\pi i)}}{\exp(2\pi i)} = \frac{-4\pi^2+2}{\cosh(2\pi)}.$$

5. Määrää funktioiden

$$(a) \quad g(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}, \quad (b) \quad f(z) = \frac{\exp(z)}{\sin^2(z)}$$

residyt kaikissa niiden navoissa kompleksitasossa $\mathbb{C}$.

Ratkaisut 5. (a) Funktion navat ovat pisteissä $z = -1$, $z = 2i$ ja $z = -2i$. Residyn laskemiselle navassa z_0 meillä on kaava

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}((z-z_0)^k f(z)),$$

missä k on kertaluku. Nyt huomaamme, että $z=-1$ on toisen kertaluvun napa, niin kaavan mukaan saamme

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g(z);-1) &= \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\frac{z^2-2z}{z^2+4}\\ &= \lim_{z\to-1}\frac{(2z-2)(z^2+4)-2z(z^2-2z)}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}.\end{aligned}$$

Pisteissä $z=2i$ ja $z=-2i$ navat ovat yksinkertaisia, ja suoralla laskulla saamme

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g(z),2i) &= \frac{7}{25}+\frac{i}{25},\\ \operatorname{Res}(g(z),-2i) &= \frac{7}{25}-\frac{i}{25}.\end{aligned}$$

(b) Siiretty Harjoitukseen 4.