Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi: Malliratkaisut 2

1. Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$. Määritä Laurentin sarjan kertoimet, kun kehityskeskus on origo, funktioille

$$f(z) = \exp(az + bz^{-1}) \text{ ja } g(z) = \sin(a(z + z^{-1})).$$

Ratkaisut 1. Tutkimme ensin funktiota $f(z) = \exp(az + b/z)$ annuluksessa $D = \{z : 0 < |z| < \infty\}$. Laurentin teoreeman mukaan saamme kertoimet kaavalla

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

Kiinnitetään n:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z^{n+1}} &= \frac{\exp\left(\frac{b}{z}\right)\exp(za)}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}} \exp\left(\frac{b}{z}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k a^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k-n-1} a^k}{k!} \exp\left(\frac{b}{z}\right). \end{aligned}$$

Tästä saamme, että

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{|z|=1} a^k z^{k-n-1} \exp\left(\frac{b}{z}\right) \mathrm{d}z \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\int_{|z|=1} a^k z^{k-n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j! z^j} \mathrm{d}z}_{\mathrm{I}}. \end{aligned}$$

Huomaamme, että

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \left(a_k z^{k-n-1} \left(1 + \frac{b}{z} + \frac{b^2}{2z^2} + \cdots \right) \right) \mathrm{d}z \\ &= \int_{|z|=1} a_k z^{k-n-1} \mathrm{d}z + \int_{|z|=1} a_k z^{k-n-1} \frac{b}{z} \mathrm{d}z + \cdots, \end{aligned}$$

ja koska $\int_{|z|=1}(1/z)\mathrm{d}z = 2\pi i$ ja $\int_{|z|=1} h(z) = 0$, kun h on analyyttinen, saamme

$$I = \begin{cases} 0, & k-n<0 \\ \dfrac{2\pi i}{(k-n)!}a^k b^{k-n}, & k-n \geq 0 \end{cases}.$$

Tästä seuraa, että

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}I = \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty}\frac{a^k b^{k-n}}{k!(k-n)!}.$$

Seuraavaksi tutkimme funktiota $g(z) = \sin(a(z+z^{-1}))$ samassa annuluksessa. Muistamme, että

$$\sin(a(z+z^{-1})) = \frac{1}{2i}(\exp(ia(z+z^{-1})) - \exp(-ia(z+z^{-1}))),$$

ja tästä seuraa (ensimmäisen osan perusteella), että

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty}\frac{(ia)^{k+k-n}}{k!(k-n)!} - \sum_{k=\max\{0,n\}}^{\infty}\frac{(-ia)^{2k-n}}{k!(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ia)^{2k+|n|}}{2ik!(|n|+k)!}. \end{aligned}$$

2. Etsi funktioiden $f(z) = z^{-1}$ ja $g(z) = z^{-2}$ Laurentin sarjat annuluksessa $\{z : 1 < |z-i| < \infty\}$.

Ratkaisut 2. Ensin tutkimme funktiota f. Tarkastellaan lauseketta z^{-1}:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i+(z-i)} = \frac{1}{i}\frac{1}{1-i(z-i)}.$$

Saamme $|i(z-i)| > 1$ kun $z \in \{z : 1 < |z-i| < \infty\}$, ja käyttäen geometrista sarjaa saamme:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{z-i}\frac{1}{1-\dfrac{1}{i(z-i)}} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i^n(z-i)^n}\\ &= \frac{1}{z-i}\sum_{n=-\infty}^{0} i^n(z-i)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} i^n(z-i)^{n-1}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1}(z-i)^n,\end{aligned}$$

mikä on funktion Laurentin sarja annuluksessa.

Seuraavaksi tutkimme funktiota g. Huomaamme, että

$$g(z) = z^{-2} = -f'(z),$$

ja käytämme tätä. Ensimmäisen kohdan perusteella saamme:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{z^2} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} n i^{n+1}(z-i)^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)i^{n+2}(z-i)^n\\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)i^n(z-i)^n \quad \forall z \in \{z : 1 < |z-i| < \infty\}.\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)i^n(z-i)^n,$$

mikä on funktion Laurentin sarja annuluksessa.

3. Kerro, mikä erikoispiste on kysymyksessä kohdissa (a), (b) ja (c) Tehtävässä 1.1.

Ratkaisut 3. (a) Oleellinen erikoispiste.

(b) Poisuva erikoispiste.

(c) Ensimmäisen kertaluvun napa.

4. Määrää seuraavien funktioiden erilliset erikoispisteet. Kerro, millainen kukin erikoispiste on.

$$f(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{z^4}, \quad f(z) = \exp(z + z^{-1}), \quad f(z) = \frac{z}{\sin^2(z)}.$$

Ratkaisut 4. Huomaamme, että

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{z^4} &= \frac{1}{z^4}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{2}{z^3} + \frac{1}{3z} + \frac{2}{5}z + \cdots , \end{aligned}$$

eli ainoa erillinen erikoispiste on $z = 0$, ja kyseessä on kolmanten kertaluvun napa.

Huomaamme seuraavaksi, että

$$\begin{aligned} f(z) = \exp(z + z^{-1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + z^{-1})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k + \binom{k}{1} z^{k-2} + \binom{k}{2} z^{k-4} + \cdots + z^{-k}}{k!}. \end{aligned}$$

Tästä saamme, että $z = 0$ on ainoa erillinen erikoispiste, ja että se on itse asiassa oleellinen erikoispiste.

Viimeisessä tapauksessa meillä on mahdolliset erikoispisteet $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Pisteessä $z = 0$ löytyy ensimmäisen kertaluvun napa, sillä

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\sin^2(z)} = 1 \neq 0.$$

Pisteissä $z = n\pi \neq 0$ löytyy toisen kertaluvun napa, sillä

$$\lim_{z \to \pi n} \frac{(z - n\pi)^2 z}{\sin^2(z)} = n\pi \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$$

5. Määrää funktion $f(z) = z \cos\left((z - 1)^{-1}\right)$ erikoispisteen laatu pisteessä $z_0 = 1$ ja laske $\mathrm{Res}(f, 1)$.

Ratkaisut 5. Muokataan ensin lauseketta $\cos((z-1)^{-1})$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{1}{z-1}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \cdots\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}f(z) &= z\cos\left(\frac{1}{1-z}\right) = (z-1)\cos\left(\frac{1}{1-z}\right) + \cos\left(\frac{1}{1-z}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} \\ &= (z-1) + 1 - \frac{1}{2!(z-1)} - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^3} \\ &\quad + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \cdots\end{aligned}$$

Funktiolla f on oleellinen erikoispiste pisteessä $z = 1$, ja

$$\mathrm{Res}(f, 1) = -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}.$$