

Kompleksianalyysi I kurssin jatkokurssi: Malliratkaisut 1

1. Etsi seuraavien funktioiden Laurentin sarjat annetun kehityskeskuksen ympärillä. Määrä suppenemialue.

$$(a) \quad f(z) = ((z+1)^2 + 1) \sin \frac{1}{z+1} \text{ ja } z_0 = -1$$

$$(b) \quad f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3} \text{ ja } z_0 = 0$$

$$(c) \quad f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)} \text{ ja } z_0 = -2.$$

Ratkaisut 1. (a) Muistetaan, että $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{(1+2k)!}$ ja laiteetaan $x = \frac{1}{z+1}$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= ((z+1)^2 + 1) \sin \left(\frac{1}{z+1} \right) \\ &= ((z+1)^2 + 1) \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \frac{1}{5!(z+1)^5} - \frac{1}{7!(z+1)^7} + \dots \right) \\ &= \frac{(z+1)^2}{z+1} - \frac{(z+1)^2}{3!(z+1)^3} + \frac{(z+1)^2}{5!(z+1)^5} - \frac{(z+1)^2}{7!(z+1)^7} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!(z+1)^3} + \frac{1}{5!(z+1)^5} - \frac{1}{7!(z+1)^7} + \dots \\ &= (z+1) + \frac{5}{6} \frac{1}{z+1} - \frac{19}{120} \frac{1}{(z+1)^3} + \frac{41}{5040} \frac{1}{(z+1)^5} - \dots \end{aligned}$$

Sarja suppenee $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

(b) Tehdään samalla tavalla kuin (a)-kohdassa ja käytetään sinin sarjakehitelmää:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z - \sin(z)}{z^3} \\ &= \frac{1}{z^3} \left(z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) \right) \\ &= \frac{1}{z^3} \left(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots \end{aligned}$$

Sarja suppenee $\forall z \in \mathbb{C}$.

(c) Merkitään $z + 2 = u$ ja saadaan:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u} \cdot \frac{1}{1-u} \\ &= \frac{2-u}{u} (1+u+u^2+\dots) = (2-u) \left(\frac{1}{u} + 1 + u + \dots \right) \\ &= \frac{2}{u} + 2 + 2u + \dots - 1 - u - u^2 - \dots \\ &= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \dots \\ &= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Sarja suppenee kaikilla z , joille $0 < |z+2| < 1$.

2.

Ratkaisut 2. Siirretty viikon eteenpäin.

3. Olkoot potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenemissäde R ja potenssisarjan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ suppenemissäde r , missä $rR > 1$. Määritellään $a_n = b_{-n}$, kun $n < 0$. Osoita, että silloin sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ suppenee tasaisesti annuluksen $\{z : 1/r < |z| < R\}$ kompakteissa osajoukoissa.

Ratkaisut 3. Olkoon $K \subset \{z : \frac{1}{r} < |z| < R\}$ kompakti. Valitaan sellaiset $r' > 0$ ja $R' > 0$, että

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{r'} < |z| < R' < R \quad \forall z \in K.$$

Tarkastellaan seuraavaksi osasummaa

$$S_N(z) = \sum_{|n| < N} a_n z^n, \text{ kun } z \in K.$$

Sarja suppenee tasaisesti jos ja vain jos

$$\sup_{z \in K} \left| S_N(z) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right| \rightarrow 0 \text{ kun } N \rightarrow \infty.$$

Saadaan

$$\begin{aligned}
 \sup_{z \in K} \left| S_N(z) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right| &= \sup_{z \in K} \left| \sum_{|n| \geq N} a_n z^n \right| \\
 &\leq \sup_{z \in K} \sum_{n=N}^{\infty} (|a_n z^n| + |a_{-n} z^{-n}|) \\
 &= \sup_{z \in K} \sum_{n=N}^{\infty} (|a_n z^n| + |b_n z^{-n}|) \\
 &\leq \sum_{n=N}^{\infty} (|a_n| |R'|^n + |b_n| |r'|^n) \longrightarrow 0 \text{ kun } N \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Sarja suppenee siis tasaisesti.

□

4. Etsi funktion

$$f(z) = \frac{1}{2 - 3z + z^2}$$

Laurentin sarja annuluksessa

- (a) $\{z : 1 < |z| < 2\}$
- (b) $\{z : \sqrt{2} < |z + i| < \sqrt{5}\}$.

Ratkaisut 4. (a) Tapaus $z \in \{z : 1 < |z| < 2\}$.

Käytämme osamurtohajotelmaa saadaksemme $f(z)$ muotoon

$$f(z) = \frac{1}{2 - 3z + z^2} = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{2 - z}.$$

Huomaamme, että

$$\frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}},$$

ja käytämme geometrisen sarjan tapauksessa $|1/z| < 1$, eli kun $|z| > 1$:

$$\frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n.$$

Seuraavaksi huomaamme, että

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}},$$

ja käyttäen geometrista sarjaa tapauksessa $|z/2| < 1$, eli $|z| < 2$, saamme:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n.$$

Nyt seuraa, että

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-3z+z^2} &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n \\ &= \dots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \dots, \end{aligned}$$

mikä on Laurentin sarja annuluksessa $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

(b) Tapaus $z \in \{z : \sqrt{2} < |z+i| < \sqrt{5}\}$.

Käytämme ensin osamurtohajotelmaa samalla tavalla kuin (a)-kohdassa, ja huomaamme sitten, että

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1+i)-(z+i)} = -\frac{1}{z+i} \frac{1}{1-\left(\frac{1+i}{z+i}\right)}.$$

Koska $\left|\frac{1+i}{z+i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{|z+i|} < 1$ tehtävänannon mukaan, voimme taas käyt-

tää geometrista sarjaa:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z+i} \frac{1}{1-\left(\frac{1+i}{z+i}\right)} = -\frac{1}{z+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{z+i}\right)^n \\
 &= -\frac{1}{z+i} \sum_{n=-\infty}^0 \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n \\
 &= -\sum_{n=-\infty}^0 (1+i)^{-n} (z+i)^{n-1} \\
 &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (1+i)^{-n-1} (z+i)^n.
 \end{aligned}$$

Samalla tavalla kuin ensimmäisessä tapauksessa saamme

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{(2+i)-(z+i)} = \frac{1}{2+i} \frac{1}{1-\left(\frac{z+i}{2+i}\right)}.$$

Tehtävänannon mukaan $\left|\frac{z+i}{2+i}\right| = \frac{|z+i|}{\sqrt{5}} < 1$, niin voimme käyttää geometrista sarjaa:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2-z} &= \frac{1}{2+i} \frac{1}{1-\left(\frac{z+i}{2+i}\right)} = \frac{1}{2+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2+i}\right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^{-n-1} (z+i)^n.
 \end{aligned}$$

Nyt seuraa, että

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2-3z+z^2} &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (1+i)^{-n-1} (z+i)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^{-n-1} (z+i)^n \\
 &= \dots - \frac{1+i}{(z+i)^2} - \frac{1}{z+i} - \frac{1}{2+i} - \frac{(z+i)}{(2+i)^2} - \frac{(z+i)^2}{(2+i)^3} - \dots,
 \end{aligned}$$

mikä on Laurentin sarja annuluksessa $\{z : \sqrt{2} < |z+i| < \sqrt{5}\}$.