KOMPLEKSIANALYYSI I:N JATKOKURSSI

RITVA HURRI-SYRJÄNEN
22.3.2016

Sisältö

Date: 22032016.

1. Johdantoa Laurentin sarjoihin

1.1. **Johdanto.**

Jos funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen pisteessä z_0, niin f voidaan kirjoittaa Taylorin sarjana pisteen z_0 ympärillä, eli jossakin pienessä z_0-keskeisessä avoimessa kiekossa. Sarjan suppenemissäde on useimmissa tapauksissa etäisyys pisteestä z_0 lähimpään singulariteettiin.
Nämä Taylorin sarjat "toimivat" hyvin, kun piste z_0 on kaukana kaikista singulariteeteista, mutta ongelmia ilmenee pisteen z_0 siirtyessä lähemmäs singulariteettia tai itse singulariteettiin.

1.2. **Esimerkki.** Funktio

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

voidaan kirjoittaa Taylorin sarjana pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

kaikilla $|z| < 1$. Sarjan suppenemissäde on siis $R = 1$.
Pisteen $z_0 = \frac{1}{2}$ ympäristössä saadaan

$$\frac{1}{1-z} = 2\frac{1}{1-2\left(z-\frac{1}{2}\right)} = 2 + 4\left(z - \frac{1}{2}\right) + 8\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots .$$

Sarjan suppenemissäde on $R = \frac{1}{2}$.
Taylorin sarja pisteessä $z_0 = \frac{9}{10}$ on

$$\frac{1}{1-z} = 10\frac{1}{1-10\left(z-\frac{9}{10}\right)} = 10+10^2\left(z - \frac{9}{10}\right)+10^3\left(z - \frac{9}{10}\right)^2+\cdots ,$$

ja sarjan suppenemissäde on $R = \frac{1}{10}$.
Pisteen $z_0 = 1$ ympäristössä ei Taylorin sarjaa ole olemassa lainkaan.

On kuitenkin olemassa toisenlainen sarja, joka suppenee "mielekkäästi" vaikka pisteessä z_0 tai sen lähellä olisi singulariteettejä. Tällainen sarja on **Laurentin sarja**.
Formaalisti Laurentin sarja on vain tuplapotenssisarja, jossa on sekä negatiivisia että positiivisia luvun $(z - z_0)$ potensseja:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

jossa $a_n \in \mathbb{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja $z, z_0 \in \mathbb{C}$. Erityisesti jokainen Taylorin sarja on Laurentin sarja, mutta ei päinvastoin.

Laurentin sarja suppenee pisteessä z, jos molemmat sarjat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ja

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

suppenevat pisteessä z.
Vastaavasti esimerkiksi itseinen suppeneminen.

1.3. **Esimerkki.** Tarkastellaan Laurentin sarjaa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \cdots .$$

Tässä sarja

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots$$

on Taylorin sarja, joka suppenee avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$. Negatiivisten potenssien sarja

$$\frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^2} + \cdots$$

voidaan kirjoittaa luvun $\omega = 1/z$ avulla muotoon

$$\frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} + \cdots ,$$

joka suppenee, kun $|\omega| < 2$ eli $|z| > 1/2$. Siis annettu Laurentin sarja suppenee annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$.

1.4. *Huomautus.* Taylorin sarja suppenee kiekossa. Laurentin sarja voi supeta kiekossa mutta useimmiten annuluksessa. On myös olemassa sarjoja, jotka eivät suppene missään.

1.5. **Esimerkki.** Tarkastellaan Laurentin sarjaa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|n|} z^n = 1 + 2z + 4z^2 + \cdots + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots ,$$

jossa sarja

$$1 + 2z + 4z^2 + \cdots$$

suppenee, kun $|z| < 1/2$. Koska sarja

$$\frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \cdots$$

suppenee, kun $|z| > 2$, ei ole olemassa sellaista kompleksilukua $z \in \mathbb{C}$, jolla molemmat sarjat suppenisivat.

1.6. **Lause.** *Olkoon*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

Laurentin sarja, missä $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ *ja* $z, z_0 \in \mathbb{C}$. *Silloin on olemassa luvut* $r \geq 0$ *ja* $R \leq \infty$ *siten, että sarja suppenee itseisesti analyyttiseen funktioon, kun* $r < |z - z_0| < R$ *ja hajaantuu, kun* $|z - z_0| < r$ *tai* $|z - z_0| > R$.

Todistus. Hajottamalla Laurentin sarja potenssisarjoiksi lukujen $(z - z_0)$ ja $1/(z - z_0)$ suhteen. □

1.7. *Huomautus.* Jos $R < r$, niin sarja ei suppene koskaan. Jos taas $r < r' < R' < R$, niin sarja suppenee tasaisesti pienemmässä annuluksessa $\{z : r' \leq |z - z_0| \leq R'\}$.

1.8. *Huomautus.* Lukua $R = \left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ sanotaan ulkosuppenemissäteeksi ja lukua $r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ sisäsuppenemissäteeksi.

1.9. *Huomautus.* Tulemme osoittamaan Laurentin teoreeman. Kuten analyyttinen voidaan esittää suppenevana potenssisarjana lokaalisti kiekossa eli Taylorin sarjana, niin jokainen funktio joka on analyyttinen voidaan esittää Laurentin sarjana.

1.10. **Esimerkki.** Etsitään funktion

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

Laurentin sarja pisteen $z_0 = 0$ ympärillä annuluksessa $1 < |z| < \infty$. Koska Taylorin sarja

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \cdots$$

ei suppene annuluksessa $1 < |z| < \infty$, tarvitaan toinen sarja! Kirjoittamalla funktio $f(z)$ luvun $1/z$ avulla saadaan

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z} - 1\right)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}}.$$

Koska $|1/z| < 1$, saadaan geometrisen sarjan avulla

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots .$$

Siis sarja

$$\frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots$$

on funktion $f(z) = 1/(1 - z)$ Laurentin sarja origon ympärillä annuluksessa $1 < |z| < \infty$.

1.11. **Esimerkki.** Etsitään funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$$

Laurentin sarja origon ympärillä. Funktio $f(z)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z},$$

missä

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \cdots && \text{kun } |z| < 1 \\
\frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots && \text{kun } |z| > 1 \\
\frac{1}{2-z} &= \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \cdots && \text{kun } |z| < 2 \\
\frac{1}{2-z} &= -\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} - \frac{4}{z^3} - \cdots && \text{kun } |z| > 2.
\end{aligned}$$

Saadaan siis kolme Laurentin sarjaa:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)(2-z)} &= \frac{1}{2} + \frac{3z}{4} + \frac{7z^2}{8} + \cdots && \text{kun } |z| < 1 \\
\frac{1}{(1-z)(2-z)} &= -\frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \cdots && \\
&\quad - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots && \text{kun } 1 < |z| < 2 \\
\frac{1}{(1-z)(2-z)} &= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \cdots && \text{kun } |z| > 2.
\end{aligned}$$

1.12. **Esimerkki.** Arvioidaan funktiota $f : z \mapsto \exp(1/z)$ origon ympärillä. Koska funktiolla f on singulariteetti origossa, sillä ei ole olemassa Taylorin sarjakehitelmää origon ympärillä. Laurentin sarja annuluksessa $0 < |z| < \infty$ on kuitenkin olemassa. Kun sarjassa

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

luku z korvataan luvulla $1/z$, saadaan

$$\exp(1/z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \cdots,$$

joka on funktion f Laurentin sarja alueessa $0 < |z| < \infty$.

1.13. **Historiaa. Pierre Alphonse Laurent** (1813-1854) Laurentin sarja on nimetty Pierre Laurentin mukaan. Hänen työtään sarjateoriasta, noin vuodelta 1843, Ranskan tiedeakatemia ei julkaisut, vaikka Cauchy suositteli sitä julkaistavaksi. Toisenkin Laurentin työn tiedeakatemia hylkäsi, vaikka Cauchy oli suositellut sen julkaisemista. Työ käsitteli yhden Cauchyn teoreeman laajennusta. Työ katosi ja nykyään se tunnetaan vain Cauchyn raportin kautta. Laurent vaihtoi tutkimusalaa hylkäämisten jälkeen.

2. Laurentin teoreema

Formaalisti Laurentin sarja on siis

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

missä $a_n \in \mathbb{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja $z, z_0 \in \mathbb{C}$.

2.1. **Laurentin teoreema.** Olkoon $0 \leq R_1 < R_2$ ja $z_0 \in C$ kiinnitetty. Olkoon f analyyttinen annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen funktion f Laurentin sarja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

joka suppenee kaikilla $z \in \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$.

Jos $\gamma_r(t) = z_0 + r\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, $R_1 < r < R_2$, niin

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du.$$

Sanonta: Laurentin teoreemassa esiintyvä sarja on funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 ympärillä annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$. Sanotaan myös: Laurentin sarja pisteen z_0 suhteen tai Laurentin sarja kehityskeskuksena z_0 rengasalueessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$.

2.2. *Huomautus.* Laurentin sarja pisteen z_0 suhteen on yksikäsitteinen annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$. Jos

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

suppenee, niin kertoimet ovat aina kaavasta

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du.$$

2.3. **Lemma.** Olkoon f analyyttinen annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$, missä $0 \leq r < R \leq \infty$. Olkoon $\gamma_\rho(t) = z_0 + \rho\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, $r < \rho < R$. Silloin

(1) Integraalin $\int_{\gamma_\rho} f(z)dz$ arvo on riippumaton luvusta $\rho \in (r, R)$.

(2) Jos $r < \rho_1 < \rho_2 < R_2$, niin
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}dw,$$
kunhan $\rho_1 < |z| < \rho_2$ ja $\gamma_{\rho_j}(t) = z_0 + \rho_j \exp(it)$ jossa $j = 1, 2$.

Todistus: Olkoon $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Merkitään $\sigma = \gamma_{\rho_2} - \gamma_{\rho_1}$, missä $\gamma_{\rho_n} = w + \rho_n \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, $n = 1, 2$. Jos $|w| \geq R$, niin $n(\sigma, w) = 0 - 0 = 0$. Jos $|w| \leq r$, niin $n(\sigma, w) = 1 - 1 = 0$. Siis $n(\sigma, w) = 0$ kaikilla $w \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Lisäksi $n(\sigma, w) = 1 - 0 = 1$, kun $\rho_1 < |z| < \rho_2$.
Nyt yleisen Cauchyn integraalikaavan nojalla
$$\int_\sigma f(z)dz = 0 \text{ ja } f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(u)}{u-z}du.$$
Koska $\int_\sigma f(z)dz = \int_{\gamma_{\rho_2}} f(z)dz - \int_{\gamma_{\rho_1}} f(z)dz$, niin $\int_{\gamma_{\rho_2}} f(z)dz = \int_{\gamma_{\rho_1}} f(z)dz$ ja lisäksi
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(u)}{u-z}du = \int_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(u)}{u-z}du - \int_{\gamma_{\rho_1}} \frac{f(u)}{u-z}du, \ \rho_1 < |z| < \rho_2.$$
□

Laurentin lauseen todistus: Olkoon f analyyttinen annuluksessa $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Valitaan r, R siten, että $R_1 < r < R < R_2$. Edellisestä lemmasta seuraa, että
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &=: f_1(z) + f_2(z), \quad r < |z| < R, \end{aligned}$$
missä $\gamma_R(t) = z_0 + R\exp(it)$ ja $\gamma_r(t) = z_0 + r\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Analyyttisillä funktioilla f_1 ja f_2 on Taylorin kehitelmä (Kompleksianalyysi I)
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \text{ missä } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}dw.$$
Todistetaan lauseke kertoimille a_n. Voidaan olettaa $z_0 = 0$. (Muutoin tarkastellaan funktiota $g(z) = f(z + z_0)$.) Jos $w \in |\gamma_R|$, niin $|w| = R$, ja siis $\frac{|z|}{|w|} < 1$. Siis geometrisen sarjan avulla
$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n}.$$

Siis

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)z^n}{w^{n+1}}dw$$
$$\stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw\right)}_{=a_n} z^n.$$

(*): Edellä viimeinen yhtälö pätee, koska integroitava sarja suppenee tasaisesti: f on jatkuva kompaktissa joukossa $\partial\mathbb{D}(0,R)$, joten kaikilla $w \in \partial\mathbb{D}(0,R)$ pätee

$$\left|\frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n\right| \le \frac{M|z|^n}{R^{n+1}}, \quad w \in \partial\mathbb{D}(0,R).$$

Sarja $\sum \frac{z^n}{R^n}$ suppenee geometrisena sarjana, kun $\frac{|z|}{|R|} < 1$, joten Weierstrassin M-testin nojalla sarja $\sum \frac{f(w)z^n}{w^{n+1}}$ suppenee tasaisesti joukossa $\partial\mathbb{D}(0,R)$.
Muokataan funktio f_2 vastaavaan muotoon. Ensin

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{w}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{z^n}, \quad \frac{|w|}{|z|} < 1.$$

Siis

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)w^n}{z^{n+1}}dw$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)w^n}{z^{n+1}}dw$$
$$= -\sum_{n=-1}^{-\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)}_{=a_n} z^n.$$

Yhdistämällä f_1 ja f_2 ja käyttämällä Lemmaa 2.3 saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) - f_2(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\right)z^n. \end{aligned}$$

Siis f on esitetty Laurentin sarjana.

Yksikäsitteisyys: Oletetaan, että on olemassa kaksi Laurentin sarjaa, jotka suppenevat tasaisesti annuluksessa $r \leq |z| \leq R$ ja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n.$$

Integroidaan kumpikin sarja yli polun γ_ρ ($r \leq \rho \leq R$, $\gamma_\rho(t) = \rho \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$) ja sarjan tasaisen suppenemisen nojalla summeerauksen ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa, jolloin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma_\rho} z^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{\gamma_\rho} z^n dz.$$

Funktiolla $z \mapsto z^n$, $n \neq -1$, on olemassa antiderivaatta (integraalifunktio) $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$, joukossa $|\gamma_\rho|$, joten funktion $z \mapsto z^n$, $n \neq -1$, integraali yli suljetun polun on 0. Siis jäljelle jää

$$a_{-1} \underbrace{\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z}}_{=2\pi i} = b_{-1} \underbrace{\int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z}}_{=2\pi i}.$$

Siis $a_{-1} = b_{-1}$. Osoittaaksemme, että muutkin kertoimet ovat samat, kerromme tai jaamme kummankin sarjan luvun z, $z \neq 0$, sopivalla potenssilla ja toistamme edellisen päättelyn. (Esim. jos kerromme molemmat puolet luvulla $z \neq 0$, niin a_{-2} ja b_{-2} eivät katoa, vaan $a_{-2} = b_{-2}$.)

□

2.4. *Huomautus.* Laurentin teoreema osoittaa, että Laurentin sarja on olemassa, mutta se ei anna helppoa kaavaa sarjan kertoimien määräämiseen. Käytännössä yleensä joutuu etsimään Laurentin sarjan kertoimet tilanteeseen sopivalla menetelmällä. Jotkut Laurent-sarjat ovat vaikeita: esimerkiksi Laurentin sarja funktiolle

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) \cos z, \; 0 < |z| < \infty.$$

2.5. **Esimerkki.** (1) $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$,

missä $c_n = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1, & n \geq 1 \end{cases}$. Sarja suppenee, kun $0 < |z| < 1$.

(2) $f(z) = \exp(z) + \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C},\ \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \text{ missä } c_n = \begin{cases} \frac{1}{m!}, & m \geq 1 \\ 2, & m = 0 \\ \frac{1}{(-m)!}, & m \leq -1 \end{cases}.$$

(3) $f(z) = \dfrac{\exp(2z)}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$, $z - 1 =: u$

$$\begin{aligned} \frac{\exp(2z)}{(z-1)^3} &= \frac{\exp(2)\exp(2u)}{u^3} = \frac{\exp(2)}{u^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2u)^k}{k!} \\ &= \exp(2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k u^{k-3}}{k!} = \exp(2) \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} u^n \\ &= \exp(2) \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{(n+3)!} (z-1)^n. \end{aligned}$$

3. Erillisistä erikoispisteistä

3.1. **Johdanto.**

Jokainen analyyttinen funktio voidaan esittää lokaalisti suppenevana potenssisarjana. Vaikka funktiolla f olisi singulariteettejä eli erikoispisteitä, voidaan se tavallisesti esittää suppenevana Laurentin sarjana

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

jota voidaan myös käyttää tutkittaessa funktion f erillisiä erikoispisteitä.

3.2. **Määritelmä.** Piste z_0 on funktion f *erillinen erikoispiste*, jos f on analyyttinen punkteeratussa avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ jollakin $r > 0$.

3.3. **Esimerkki.** Funktiolla

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$$

on erillinen erikoispiste $z_0 = 1$, koska pisteen z_0 ympärillä on olemassa punkteerattu kiekko $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 1\} = \mathbb{D}(1, 1) \setminus \{1\}$, jossa funktio f on analyyttinen. Vastaavasti myös piste $z_0 = -2$ on funktion f erillinen erikoispiste.

3.4. *Huomautus.* Laurentin teoreeman perusteella funktio f voidaan esittää Laurentin sarjana erillisen erikoispisteen z_0 ympärillä.

Erilliset erikoispisteet voidaan jakaa kolmeen ryhmään funktion f Laurentin sarjan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

kertoimien a_n avulla.

(1) **Poistuva erikoispiste**
Jos funktiolla f on erillinen erikoispiste z_0, mutta f voidaan määritellä kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$ analyyttisenä funktiona, sanotaan pisteen z_0 olevan *poistuva erikoispiste*. Jos funktion f Laurentin sarjassa $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$, niin asettamalla $f(z_0) = a_0$ saamme funktion f analyyttiseksi koko kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$ ja funktion f Taylorin sarja on

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

3.5. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Pisteen $z = 0$ punkteeratussa ympäristössä on sinifunktion sarjakehitelmän nojalla

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots .$$

Kun asetamme $f(0) = 1$, saamme funktion f, joka on kokonainen eli analyyttinen koko kompleksitasossa.

3.6. **Esimerkki.** Olkoon

$$g(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Kosinifunktion sarjakehitelmän

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

nojalla pisteen $z = 0$ punkteeratussa ympäristössä

$$g(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \cdots ,$$

joten määrittelemällä $g(0) = 1/2$, saadaan funktio g, joka on analyyttinen koko kompleksitasossa.

(2) **Napa** (Pole)
Jos vain äärellinen määrä kertoimia $a_n \neq 0$, kun $n < 0$, niin

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \; a_{-m} \neq 0.$$

Pisteen z_0 sanotaan tällöin olevan funktion f *napa* ja navan kertaluku on m.

3.7. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Silloin

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} .$$

Funktiolla f on 3. kertaluokan napa pisteessä $z = 0$.

3.8. **Esimerkki.** Olkoon

$$g(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^6}, \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Silloin

$$g(z) = \frac{1}{2!z^4} - \frac{1}{4!z^2} + \frac{1}{6!} - \cdots ,$$

ja funktiolla g on 4. kertaluokan napa pisteessä $z = 0$.

(3) **Oleellinen erikoispiste**
Jos $a_n \neq 0$ äärettömän monella indeksillä $n < 0$, niin piste z_0 on funktion f *oleellinen erikoispiste.*

3.9. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{kun } z \neq 0.$$

Silloin

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots$$

ja funktiolla f on oleellinen erikoispiste origossa.

Tarkastellaan seuraavaksi funktion käyttäytymistä erikoispisteen punkteeratussa kiekossa.

3.10. **Lause.** *Olkoon funktio f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ jollain $R > 0$. Silloin z_0 on poistuva erikoispiste, jos ja vain jos funktio f voidaan jatkaa analyyttisenä koko kiekkoon.*

Todistus. Olkoon piste z_0 funkton f poistuva erikoispiste. Silloin poistuvan erikoispisteen määritelmän nojalla

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{kun } 0 < |z - z_0| < R.$$

Asetetaan $f(z_0) = a_0$, jolloin

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in \mathbb{D}(z_0, R),$$

ja funktio f on siis analyyttinen koko kiekossa.
Toisaalta, jos f on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R)$, niin funktiolla f on olemassa yksikäsitteinen Taylorin sarja pisteen z_0 ympäristössä U. Laurentin sarjan yksikäsitteisyyden nojalla tämä Taylorin sarja yhtyy funktion f Laurentin sarjaan pisteessä z_0. Siis tässä Laurentin sarjassa ei ole luvun $(z - z_0)$ negatiivisia potensseja, joten piste z_0 on poistuva erikoispiste. $\square$

3.11. **Karakterisaatio poistuvalle erikoispisteelle.** Olkoon f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Silloin seuraavat väitteet ovat ekvivalentit:

(1) piste z_0 on poistuva erikoispiste
(2) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ on olemassa ja äärellinen
(3) on olemassa luvut $M > 0$ ja $\delta > 0$ siten, että $|f(z)| < M$ kaikilla $z \in \mathbb{D}(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$.

Todistus. On selvää, että ensimmäisestä väitteestä seuraa toinen, ja toisesta seuraa kolmas. Osoitetaan, että kolmannesta väitteestä seuraa ensimmäinen. Oletuksen perusteella on olemassa yksikäsitteinen Laurentin sarja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}.$$

Olkoon $\gamma_r(t) = z_0 + r \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$ jollain $r \in (0, R)$. Nyt

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)(z - z_0)^{n-1} \mathrm{d}z,$$

ja siis

$$|b_n| \leq \frac{1}{2\pi} M r^{n-1} 2\pi r = M r^n \qquad \forall n \geq 1.$$

Kun $r \to 0$, niin $|b_n| = 0 \; \forall n \geq 1$, joten z_0 on poistuva erikoispiste.

$\square$

3.12. **Korollaari.** *Jos jollakin indeksillä $k < 0$ kerroin $a_k \neq 0$ funktion f Laurent-sarjassa pisteen z_0 suhteen,niin funktio f on rajoittamaton jokaisessa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, \delta)$, $\delta > 0$.*

4. Erillisistä erikoispisteistä ...

4.1. **Esimerkki. Poistuvien erikoispisteiden karakterisaatiolauseen hyödyntäminen:** Olkoon

$$f(z) = \frac{z^2}{(\exp(z)-1)\sin z}, \quad z \neq 0.$$

Käyttämällä eksponentti- ja sinifunktioiden sarjaesityksiä

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

voidaan funktio f kirjoittaa muodossa

$$f(z) = \frac{z}{\exp(z)-1} \cdot \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\ldots} \cdot \frac{1}{1-\frac{z^2}{3!}+\ldots},$$

joten nyt

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\ldots} \cdot \frac{1}{1-\frac{z^2}{3!}+\ldots} = 1.$$

Siis raja-arvo $\lim_{z\to 0} f(z)$ on olemassa ja äärellinen. Tällöin karakterisaatiolauseen nojalla piste $z_0 = 0$ on funktion f poistuva erikoispiste.

4.2. **Karakterisaatio navalle.** Olkoot f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ jollain $R > 0$. Silloin funktiolla f on olemassa kertalukua m oleva napa pisteessä z_0 jos ja vain jos

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = l \neq 0.$$

Todistus. "$\Rightarrow$": Jos funktiolla f on olemassa kertalukua m oleva napa pisteessä z_0, niin

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \ldots + b_1(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{m+n}.$$

Siis

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = b_m.$$

Koska funktiolla f on oletuksen mukaan kertaluvun m napa pisteessä z_0, niin $b_m \neq 0$.
"$\Leftarrow$": Olkoot

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = l \neq 0.$$

Tällöin funktiolla $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ on poistuva erikoispiste pisteessä z_0 (karakterisaatiolause). Tällöin funktiolla g on sarjaesitys

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R \text{ ja } a_0 = l \neq 0.$$

Silloin

$$f(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n,$$

missä $a_0 \neq 0$. Siis funktiolla f on pisteessä z_0 kertalukua m oleva napa. □

4.3. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{1}{\exp(z) - 1}.$$

Käyttämällä eksponenttifunktion sarjaesitystä saadaan

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots - 1} = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \ldots} \\ &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots}. \end{aligned}$$

Siis $\lim_{z \to 0} z f(z) = 1 \neq 0$, joten funktiolla f on ensimmäisen kertaluvun napa origossa.

4.4. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{5z + 3}{(1 - z)^3 \sin^2 z}, \quad 0 < |z| < 1.$$

Silloin

$$\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = 3 \neq 0,$$

siis funktiolla f on toisen kertaluvun napa origossa.
Olkoon

$$f(z) = \frac{5z + 3}{(1 - z)^3 \sin^2 z}, \quad 0 < |z - 1| < 1.$$

Silloin

$$\lim_{z \to 1} (z - 1)^3 f(z) = \frac{-8}{\sin^2 1} \neq 0,$$

siis funktiolla f on 3. kertaluvun napa pisteessä $z = 1$.

4.5. **Seurauslause.** Jos funktiolla f on kertalukua m oleva napa pisteessä z_0, niin

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Todistus. Merkitään $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, jolloin

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} |f(z)| &= \lim_{z\to z_0} \left| \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \right| \\ &= \underbrace{\lim_{z\to z_0} |g(z)|}_{=l\neq 0} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{1}{|z-z_0|^m} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

□

Siis navan lähellä funktion f käyttäytyy melko hyvin. Oleellisen erikoispisteen lähellä käyttäytyminen on villiä.

Oleellisista erikoispisteistä:

4.6. *Huomautus.* Funktiolla f on olemassa oleellinen erikoispiste pisteessä z_0 jos ja vain jos f ei lähesty äärellistä rajaa eikä ääretöntä rajaa, kun $z \to z_0$. Toisinsanoen funktiolla ei ole olemassa raja-arvoa joukossa $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kun $z \to z_0$.

4.7. **Weierstrassin-Casoratin lause.** Jos piste z_0 on funktion f oleellinen erikoispiste, niin f saa jokaisessa pisteen z_0 ympäristössä arvoja mielivaltaisen lähellä annettua lukua. Eli $\overline{f(\mathbb{D} \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$.

4.8. **Picardin teoreema.** Kompleksisesti derivoituva funktio saa jokaisessa oleellisen erikoispisteen ympäristössä kaikki arvot lukuunottamatta mahdollisesti yhtä arvoa.

4.9. **Esimerkki.** Funktio

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z \neq 0,$$

saa kaikki arvot punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(0,r) \setminus \{0\}$ kaikilla $r > 0$.

4.10. **Esimerkki.** Funktio

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right), \quad \text{kun } z \neq 0,$$

saa kaikki arvot paitsi arvon 0 punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(0,r) \setminus \{0\}$, näin kaikilla $r > 0$.

5. Residylaskentaa

Integroinnista erillisen erikoispisteen ympäri:

Olkoon f funktio, jolla on olemassa erillinen erikoispiste z_0 (eli on olemassa $r > 0$ siten, että f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.) Olkoon $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(t) = z_0 + r\exp(it)$.

5.1. **Esimerkki.** Määrää

$$\int_{\gamma_1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

Eksponenttifunktion sarjan avulla

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz &= \int_{\gamma_1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^k}{k!}\right) dz \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{k! z^k} \\ &= \int_{\gamma_1} dz + \underbrace{\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}}_{=2\pi i} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{2! z^2} + \dots \\ &\overset{**}{=} 0 + 2\pi i + 0 + \dots = 2\pi i.\end{aligned}$$

(*) Summeerauksen ja integroinnin järjestystä voidaan vaihtaa, koska integroitava sarja suppenee tasaisesti.
(**) Jos funktiolla g on olemassa integraalifunktio avoimessa joukossa ja $|\gamma_1| = \partial^+\mathbb{D}(0, 1)$, niin $\int_{\gamma_1} g(z)dz = 0$. Funktiolla $g : z \mapsto \frac{1}{n! z^n}$, $n \geq 2$, on olemassa integraalifunktio, samoin funktiolla $g : z \mapsto 1$ on olemassa integraalifunktio.

Yleisesti: Olkoon f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ jollain $r > 0$. Tällöin funktiolla f on Laurentin sarjaesitys

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Olkoon γ (yksinkertainen) positiiviseen kiertosuuntaan kulkeva polku, jonka rajaaman alueen sisälle jää piste z_0 ja muita erikoispisteitä ei ole. Silloin

$$\int_{\gamma} f(u)du = \int_{\gamma} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz \overset{*}{=} 2\pi i a_{-1},$$

koska Laurent-sarjan muilla termeillä on olemassa antiderivaatta (integraalifunktio).
(*) Deformointilause (Kompleksianalyysi I).

Koska a_{-1} on ainoa termi, joka jää jäljelle integroinnin jälkeen, sanomme sitä funktion f residyksi pisteessä z_0 ja merkitsemme $\operatorname{Res}(f; z_0)$. Siis $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_0)$.

5.2. **Esimerkki.** Olkoon

$$\begin{aligned} f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{z^n}{(-n)!} \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \end{aligned}$$

Siis $a_{-1} = 1$, jolloin

$$\operatorname{Res}\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right); 0\right) = 1.$$

Residyn laskemisesta/määräämisestä:

(1) Jos funktiolla f on poistuva erikoispiste z_0, niin Laurent-sarjalla ei ole luvun $(z - z_0)$ negatiivisia potensseja. Laurent-sarjassa ei siis ole termiä $(z - z_0)^{-1}$, joten funktion f residy pisteessä z_0 on 0.

(2) Olkoon funktiolla f yksinkertainen napa pisteessä z_0. Silloin Laurent-sarja on muotoa:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Siis

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä. Nyt

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1}.$$

Residy yksinkertaisessa navassa z_0 on siis

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z).$$

5.3. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{1}{\sin z},$$

jolloin funktiolla f on yksinkertainen napa origossa. Tällöin

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sin z}; 0\right) &= \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) Jos funktiolla f on toisen kertaluvun napa pisteessä z_0, niin

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

ja

$$(z-z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + a_0(z-z_0)^2 + \dots$$

pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä. Nyt

$$\frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2 f(z)\right) \overset{*}{=} a_{-1} + 2a_0(z-z_0) + \dots$$

ja

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left((z-z_0)^2 f(z)\right).$$

(*) Tasaisesti suppeneva sarja voidaan derivoida termeittäin.

(4) Jos funktiolla f on kertaluvun k napa pisteessä z_0, niin induktiolla saadaan kaava

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-z_0)^k f(z)\right).$$

5.4. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3.$$

Nyt

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^3 f(z) = \lim_{z\to 1}(z+1)^3 = 8 \neq 0,$$

joten funktiolla f on pisteessä $z = 1$ kolmannen kertaluvun napa. Lasketaan residy tässä pisteessä:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3 f(z)\right) &= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}(z+1)^3 \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}3(z+1)^2 \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}\cdot 6(z+1) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Siis $\operatorname{Res}(f; 1) = 6$.

5.5. **Esimerkki.** Määrää funktion f,

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z^2-4)(z^4-1)},$$

erilliset erikoispisteet ja residyt näissä pisteissä.

Funktion f erillisten erikoispisteiden ulkopuolella

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z-2)(z^2+1)(z^2-1)} = \frac{1}{(z+2)(z-2)(z+1)(z-1)}.$$

Siis pisteissä $\pm i$ funktiolla f on poistuva erikoispiste ja pisteissä ± 1 ja ± 2 on ensimmäisen kertaluvun napa.
Residyt näissä navoissa:

$$\mathrm{Res}(f; z=1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+2)(z-2)(z+1)} = -\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Res}(f; z=-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{1}{(z+2)(z-2)(z-1)} = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{Res}(f; z=2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{1}{(z+2)(z+1)(z-1)} = \frac{1}{12}$$

$$\mathrm{Res}(f; z=-2) = \lim_{z\to -2}(z+2)f(z) = \lim_{z\to -2}\frac{1}{(z-2)(z+1)(z-1)} = -\frac{1}{12}.$$

5.6. **Historiaa. Felice Casorati** (1835-1890). Hän tunnetaan parhaiten Casorati-Weierstrass teoreemasta.
Charles Emile Picard (1856-1941). Hän todisti 1879 kuuluisan teoreemansa, joka nykyään tunnetaan Picardin teoreemana käyttäen Hermite'n modulaarifunktioita. Picard työskenteli usealla matematiikan alalla menestyksekkäästi. Hän oli myös erinomainen opettaja.

6. Residylaskentaa...

6.1. **Residylause.** Olkoon f analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D lukuunottamatta äärellistä määrää erillisiä erikoispisteitä z_j, $j = 1, \dots, n$, missä $z_j \in D$, kaikilla $j = 1, \dots, n$. Silloin

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k)\, n(\gamma; z_k)$$

kaikilla suljetuilla paloittain C^1-poluilla γ alueessa D, kun $z_j \notin |\gamma|$, $j = 1, \dots, n$.

Todistus. Katso Kallen esitys. □

7. Määrättyjen integraalien laskemisesta

Tarkastellaan reaalisen integraalin määräämistä tietyissä tapauksissa, joissa integroitavassa funktiossa on trigonometrinen funktio, ja integrointivälin pituus on 2π tai sen monikerta.
Olkoon Q rationaalifunktio, ja tarkastellaan integraalin

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$$

määräämistä. Olkoon $\gamma = \exp(it)$, kun $t \in [0, 2\pi]$. Formaalilla sijoituksella $z = \exp(it)$, $\mathrm{d}z = i\exp(it)\mathrm{d}t$, $t \in [0, 2\pi]$ saadaan

$$\begin{aligned}
\cos t &= \frac{1}{2}\left[\exp(it) + \exp(-it)\right] = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right) \\
\sin t &= \frac{1}{2i}\left[\exp(it) - \exp(-it)\right] = \frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right),
\end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t &= \int_\gamma Q\left(\frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right), \frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right) \frac{1}{ie^{it}}\right)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(Q\left(\frac{(z + z^{-1})}{2}, \frac{(z - z^{-1})}{2i}\right); a_j\right),
\end{aligned}$$

missä pisteet a_j ovat funktion Q erillisiä erikoispisteitä yksikköympyrän sisällä.

7.1. **Esimerkki.** Lasketaan integraali

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\cos^3 t + \sin^2 t\right)\mathrm{d}t.$$

Sijoituksen $z = \exp(it)$, $\mathrm{d}z = iz\mathrm{d}t$, $t \in [0, 2\pi]$ avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{iz} Q\left(\frac{(z+z^{-1})}{2}, \frac{(z-z^{-1})}{2i}\right) &= \frac{1}{iz}\left[\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^3 + \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{iz}\left(\frac{z^3}{8} + \frac{3z}{8} + \frac{3}{8z} + \frac{1}{8z^3} - \frac{z^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4z^2}\right) \\
&= \left(\frac{z^2}{8i} + \frac{3}{8i} + \frac{3}{8iz^2} + \frac{1}{8iz^4} - \frac{z}{4i} + \boxed{\frac{1}{2iz}} - \frac{1}{4iz^3}\right).
\end{aligned}$$

Tällä funktiolla on napa origossa, ja residy on $1/(2i)$. Siis

$$I = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

7.2. **Esimerkki.** Määrää

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

Ratkaisu: Koska

$$\cos t = \frac{1}{2}\big(\exp(it) + \exp(-it)\big),$$

niin sijoituksella $z = \exp(it)$, $dz = i\exp(it)dt$, kun $t \in [0, 2\pi]$, saadaan

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \frac{1}{2}(\exp(it) + \exp(-it))} \\
&= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}.
\end{aligned}$$

Koska $z^2 + 4z + 1 = 0$, jos ja vain jos $z = -2 \pm \sqrt{3}$, niin $z^2 + 4z + 1 = (z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})$, ja siis

$$I = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}.$$

Funktiolla

$$f : z \mapsto \frac{1}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}$$

on erikoispisteet $z_1 = -2+\sqrt{3}$ ja $z_2 = -2-\sqrt{3}$, mutta integrointipolku γ, $\gamma(t) = \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, kiertää vain pisteen z_1. Siis, koska z_1 on yksinkertainen napa, niin

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{i}\,2\pi i\ \mathrm{Res}(f;-2+\sqrt{3}) \\ &= 4\pi \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} f(z)(z+2-\sqrt{3}) \\ &= 4\pi \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{z+2-\sqrt{3}}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})} = 4\pi\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

7.3. *Huomautus.* Edellä oleva menetelmä soveltuu vain, jos integroimme yli välin, jonka pituus on 2π tai luvun 2π monikerta. Menetelmä ei sovellu suoraan integraalin

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{2+\cos t}$$

määräämiseen. Syy on se, että sijoitus $z = \exp(it)$ johtaa puoliympyrän kehälle, ei suljetulle polulle. Tällöin yksi tapa on hyödyntää integroitavan funktion mahdollista symmetrisyyttä. Funktio

$$g(t) = \frac{1}{2+\cos t}$$

on parillinen, joten

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{2+\cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

7.4. **Esimerkki.** Määrää integraalit

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \exp(\cos t)\cos(\sin t)\,\mathrm{d}t, \text{ ja} \\ I_2 &= \int_0^{2\pi} \exp(\cos t)\sin(\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Olkoon $\gamma(t) = \exp(it)$, kun $t \in [0, 2\pi]$. Residylauseen perusteella

$$\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{\exp(z)}{z};0\right) = 2\pi i.$$

Sijoittamalla $z = \exp(it)$, $\mathrm{d}z = i\exp(it)\mathrm{d}t$, saadaan

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\exp(\cos t + i\sin t)}{\exp(it)} i\exp(it)\,\mathrm{d}t = 2\pi i \iff \\ &\int_0^{2\pi} \exp(\cos t)(\cos(\sin t) + i\sin(\sin t))\,\mathrm{d}t = 2\pi. \end{aligned}$$

Siis $I_1 = 2\pi$ ja $I_2 = 0$.

Rationaalifunktion integraali yli koko reaaliakselin, kun integroivalla funktiolla on tietyt rajoitteet:
Jos raja-arvot

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 f(x)\,\mathrm{d}x$$

ovat olemassa, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tämän integraalin Cauchyn pääarvo, C.p.a, on puolestaan

$$\text{C.p.a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On tärkeää huomata, että Cauchyn pääarvo voi olla olemassa, vaikka integraalia ei olisi tavallisessa mielessä määritelty.

7.5. **Esimerkki.** Tarkastellaan integraalia

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x.$$

Koska

$$\int_{-R}^{R} x\,\mathrm{d}x = \Big|_{-R}^{R}\frac{1}{2}x^2 = 0,$$

niin

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Kuitenkin

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\int_0^a x\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 x\,\mathrm{d}x = \infty - \infty,$$

jota ei ole määritelty.

7.6. *Huomautus.* Olkoon $\Gamma_R(t) = R\exp(it)$, kun $t \in [0,\pi]$ ja $R > 0$. Oletetaan, että kaikki avoimessa ylemmässä puolitasossa olevat funktion f navat z_k, $k = 1,\ldots,p$, ovat polun $\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R$ sisällä ja, että suurilla R on olemassa vakio M siten, että

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^2},$$

kun luku z on polun Γ_R jäljellä. Silloin

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}(f;z_k)\,.$$

Koska

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{M\pi R}{R^2} = \frac{\pi M}{R} \to 0\,, \text{kun}\, R \to \infty,$$

niin

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \text{C.p.a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}(f; z_k)\,.$$

Toisaalta, jos

$$|f(x)| \le \frac{M}{R^2} \quad \forall x,\ \text{kun}\ |x| = R$$

ja funktiolla f ei ole reaalisia napoja, niin reaalianalyysin tietojen perusteella integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ on olemassa ja siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \text{C.p.a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}(f; z_k)\,.$$

7.7. *Huomautus.* Ehto

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^2} \quad \forall z,\ \text{kun}\ |z| = R$$

toteutuu, jos

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

jossa P ja Q ovat polynomeja, joille $\deg Q \ge 2 + \deg P$ ja polynomilla Q ei ole reaalisia nollakohtia.

8. MÄÄRÄTTYJEN INTEGRAALIEN LASKEMISESTA …

8.1. **Lause.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen avoimessa puolitasossa $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ äärellistä määrää napoja $z_1, \cdots, z_p$ lukuunottamatta. Olkoon $\Gamma_R(t) = R\exp(it)$, $t \in [0, \pi]$ polku siten, että kaikki navat sisältyvät suljetun polun $\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R$ (eli polku koostuu janasta $[-R, R]$ ja puoliympyrästä Γ_R) rajoittamaan alueeseen ja oletetaan, että suurilla R on olemassa vakio M siten, että

$$|f(z)| \le \frac{M}{R^2}$$

kun luku z on polun Γ_R jäljellä. Silloin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

8.2. *Huomautus.* Edellisessä lauseessa on oleellista, että navat eivät ole reaaliakselilla, ja että funktion modulille on kasvurajoite, jotta määrättävä integraali on olemassa.

8.3. *Huomautus.* Tulofunktion integroimislauseen ja Cauchyn residyteoreeman nojalla

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

Koska

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \right| \le \frac{M\pi R}{R^2} = \frac{\pi M}{R} \to 0\,, \text{ kun } R \to \infty\,,$$

niin

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

Koska

$$|f(x)| \le \frac{M}{x^2}\,, \text{ kun } |x| \text{ kyllin suuri }, \tag{8.1}$$

integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ on olemassa ja siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

8.4. *Huomautus.* Ehto (8.1) toteutuu, kun

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

missä P ja Q ovat polynomeja, joille $\deg Q \geq 2 + \deg P$ ja polynomilla Q ei ole reaalisia nollakohtia.

Rationaalifunktion integrointi reaaliakselilla

8.5. **Esimerkki.** Määrää

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Ensinnäkin integraali on olemassa, joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Määritellään

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^4+1}.$$

Polynomin z^4+1 nollakohdat ovat

$$z^4+1=0 \iff z = \underbrace{\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)}_{=z_1}, \underbrace{\exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}_{=z_2}, \underbrace{\exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right)}_{=z_3}, \underbrace{\exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right)}_{=z_4}.$$

Näin ollen pisteet $z_1, \ldots, z_4$ ovat funktion f erillisiä erikoispisteitä, tarkemmin ensimmäisen kertaluvun napoja. Näistä ylemmässä puolitasossa sijaitsevat z_1 ja z_2. Olkoon $R > 2$ ja $\gamma_R(t)$ jana reaaliakselilla pisteestä $-R$ pisteeseen R. Määritellään $\Gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ asettamalla $\Gamma_R(t) = R\exp(i(\pi - t))$. Nyt $\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R$ kiertää luvut $z_1 = \exp(\pi i/4)$ ja $z_2 = \exp(3\pi/4)$. Cauchyn residylauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R} f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f; \exp(\pi i/4)) + 2\pi i \operatorname{Res}(f; \exp(3\pi i/4)) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to\exp(\pi i/4)} \frac{z-\exp(\pi i/4)}{z^4+1} + 2\pi i \lim_{z\to\exp(3\pi i/4)} \frac{z-\exp(3\pi i/4)}{z^4+1} \\
&\overset{l'H\hat{o}pital}{=} 2\pi i \lim_{z\to\exp(\pi i/4)} \frac{1}{4z^3} + 2\pi i \lim_{z\to\exp(3\pi i/4)} \frac{1}{4z^3} \\
&= 2\pi i \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right) + 2\pi i \frac{1}{4}\exp\left(-\frac{9\pi i}{4}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Toisaalta tulopolun integraalilauseen nojalla pätee

$$\int_{\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\overleftarrow{\Gamma}_R} f(z)\,dz$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_r * \overleftarrow{\Gamma}_R} f(z)\,dz}_{=\pi/\sqrt{2}} + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\,.$$

Koska integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

on olemassa (perustelu vastaavasti kuin Huomautuksissa 8.3 ja 8.4), niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\,.$$

Kun $z \in \Gamma_R$, niin $|z| = R$. Tällöin $|z^4| = R^4$ ja

$$R^4 - 1 \le |z^4+1| \le R^4 + 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{R^4+1} \le \frac{1}{|z^4+1|} \le \frac{1}{R^4-1}\,.$$

Nyt Arviolemman nojalla

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^4+1}\right| \le \frac{\pi R}{R^4-1} \longrightarrow 0, \text{ kun } R \longrightarrow \infty\,.$$

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

8.6. *Huomautus.* Integrandin parillisuuden nojalla

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

Rationaalifunktion integrointi, jossa mukana trigonometrinen funktio ja integroimisväli on $(-\infty, \infty)$

8.7. **Esimerkki.** Määrää

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx\,.$$

Olkoon γ_R jana reaaliakselilla pisteestä $-R$ pisteeseen R. Määritellään $\Gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_R(t) = R\exp(i(\pi - t))$. Nyt kuitenkin

$$\int_{\overleftarrow{\Gamma}_R} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz \not\to 0, \text{ kun } R \to \infty\,.$$

Syy: Merkitään $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, jolloin

$$|\exp(-i(x+iy))| = |e^y||\exp(-ix)|\,.$$

Ylemmällä puolitasolla $|y| \geq 0$, joten $|e^y|$ hajaantuu, kun $R \to \infty$. Integraali saadaan kuitenkin laskettua eri polulla. Määritellään $\Gamma_R^-[0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_R^-(t) = R\exp(-i(\pi - t)) = R\exp(i(t-\pi))$. Tällöin

$$\int_{\Gamma_R^-} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz \to 0, \text{ kun } R \to \infty,$$

sillä polulla Γ_R^- pätee $|z| = R$, joten $|z^2| = R^2$ ja

$$\begin{aligned} & R^2 - 1 \leq |z^2+1| \leq R^2+1 \\ \iff & \frac{1}{R^2+1} \leq \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{R^2-1}, \\ & |\exp(-iz)| = |\exp(-i(x+iy))| = |\exp(-ix)|e^y, \end{aligned}$$

missä $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Koska alemmalla puoliympyrällä Γ_R^- pätee $y \leq 0$, niin $e^y \leq 1$. Tällöin arviolemman nojalla

$$\left|\int_{\Gamma_R^-} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0, \text{ kun } R \to \infty\,.$$

Merkitään $f : z \mapsto \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}$. Funktiolla f on erilliset erikoispisteet $z = i$ ja $z = -i$, mutta vain piste $z = -i$ jää integroimispolun $\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R^-$ rajaaman alueen sisään. Nyt Residyteoreeman nojalla

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R^-} f(z)\,dz &= -2\pi i \operatorname{Res}(f; -i) \\ &= -2\pi i \lim_{z \to -i} \frac{(\exp(-iz))(z+i)}{z^2+1} \\ &= -2\pi i \lim_{z \to -i} \frac{\exp(-iz)}{z-i} \\ &= -2\pi i \frac{1}{-2ie} \\ &= \frac{\pi}{e}\,. \end{aligned}$$

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1}\,dz,$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{\exp(-iz)}{z^2+1} = \underbrace{\oint_{\gamma_R * \overleftarrow{\Gamma}_R^-} f(z)\,dz}_{=\pi/e} - \underbrace{\int_{\overleftarrow{\Gamma}_R^-} f(z)\,dz}_{\to 0}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e}\,.$$

8.8. **Esimerkki.** Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx\,.$$

1. Tapa: Kirjoitetaan kosini eksponenttifunktion avulla

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\exp(ix) + \exp(-ix)\right).$$

Tällöin integraali tulee muotoon

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx\,.$$

Ensimmäinen integraali voidaan laskea käyttämällä aiempien esimerkkien puoliympyräpolkua Γ_R^+ ylemmässä puolitasossa ja toinen integraali käyttämällä puoliympyräpolkua Γ_R^- alemmassa puolitasossa. Tämä on kuitenkin työläs tapa.

2. Tapa: Koska

$$\cos x = \mathrm{Re}(\exp(-ix)) = \mathrm{Re}(\cos(-x) + i\sin(-x)) = \mathrm{Re}(\cos x - i\sin x)\,,$$

niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\,dx\right) = \frac{\pi}{e}\,.$$

Varoitus: Edellä käytetty integrointikeino ei toimi aina:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x+i}\,dx, \qquad \frac{\cos x}{x+i} \neq \mathrm{Re}\left(\frac{\exp(-ix)}{x+i}\right).$$

8.9. **Esimerkki.** Määrää integraali

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx\,.$$

Edellisestä esimerkistä integroitavan funktion parillisuuden vuoksi

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}\,.$$

8.10. **Esimerkki.** Integraali
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\, dx = 0\,,$$
sillä integroitava funktio on pariton. Toinen tapa:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\, dx = -\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix)}{x^2+1}\, dx\right) = 0\,.$$
8.11. **Jordanin lemma.** Olkoot P ja Q polynomeja siten, että $\deg Q \geq \deg P + 1$.
Olkoot $\Gamma_R^+(t) := R\exp(i(\pi - t))$ ja $\Gamma_R^-(t) := R\exp(-it)$, kun $t \in [0,\pi]$.
Jos $m > 0$, niin
$$\int_{\Gamma_R^+} \frac{P(z)\exp(imz)}{Q(z)} dz \to 0\,,\ \text{kun } R \to \infty\,.$$
Jos $m < 0$, niin
$$\int_{\Gamma_R^-} \frac{P(z)\exp(imz)}{Q(z)} dz \to 0\,,\ \text{kun } R \to \infty\,.$$
8.12. **Lause.** Olkoon
$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$
missä $P = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, $a_n \neq 0$, ja $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$, $b_m \neq 0$, ovat polynomeja, joille $\deg Q \geq 2 + \deg P$ ja polynomilla Q ei ole reaalisia juuria. Olkoon $c \geq 0$. Silloin
$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\exp(icx)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f(z)\exp(icz); z_k)\,,$$
missä luvut $z_1, \cdots, z_p$ ovat funktion f navat avoimessa puolitasossa $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Todistus. Koska $\deg Q \geq 2 + \deg P$, $b_m \neq 0$, niin on olemassa $R_0 > 0$ ja vakio M siten, että
$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}\,, \text{kun } |z| > R_0\,.$$
Muodostetaan suljettu polku $\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R$, missä $\Gamma_R(t) = R\exp(it)$, $t \in [0,\pi]$ ja $\gamma_{[-R,R]}$ on janapolku pisteestä $-R$ pisteeseen R, jonka jälki on $[-R,R]$. Kun R on kyllin suuri, niin kaikki navat sisältyvät suljetun polun $\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R$ rajoittamaan alueeseen. Silloin Cauchyn residylauseen nojalla
$$\int_{\gamma_{[-R,R]} * \Gamma_R} f(z)\exp(icz)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f(z)\exp(icz); z_k)\,.$$

Tulopolun integroimislauseen nojalla

$$\int_{-R}^{R} f(x)\exp(icx)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\exp(icz)dz = \int_{\gamma_{[-R,R]}*\Gamma_R} f(z)\exp(icz)\,dz\,.$$

Siis Arviolemman avulla, kun $R > R_0$,

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\exp(icz)\,dz\right| \le \frac{\pi M}{R} \to 0\,,\ \text{kun } R \to \infty\,.$$

Siis

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\exp(icx)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\operatorname{Res}(f(z)\exp(icz);z_k)\,.$$

Koska suurilla x

$$|f(x)\exp(icx)| \le M/x^2\,,$$

niin integraali $\int_{\infty}^{\infty} f(x)\exp(icx)\,dx$ on olemassa, niin väite seuraa. □

9. Integrandissa mukana moniarvoinen funktio

9.1. **Esimerkki.**

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

1. Tapa: Sijoittamalla $x = u^2$ saadaan integraali, joka osataan laskea.
2. Tapa: Vaikeuksia: (1) Funktio $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}$ ei ole parillinen. Siis integroimisvälin laajentaminen koko reaaliakseliksi ei auta.
(2) Funktiolla f on origossa singulariteetti, eli on tarkasteltava raja-arvoa

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Tarkoitus olisi korvata kyseessä oleva integraali kompleksisella integraalilla

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to 0}\int_{\gamma_{[\varepsilon,R]}} \frac{dz}{\sqrt{z}(z+4)}\,.$$

Tämä ei kuitenkaan ole oikein, sillä funktio $z \mapsto \sqrt{z}$ on moniarvoinen. Tärkeä asia: Funktio $f : z \mapsto \sqrt{z}$ ei ole analyyttinen koko kompleksiatsossa. On valittava haara, mutta

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(-\pi,\pi]}(z)\right)$$

ei käy, sillä $-4 \in (-\infty, 0)$. Valitaan haaraksi

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(z)\right)\,.$$

Silloin

$$\begin{aligned} f(-1) = \sqrt{-1} &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(-1)\right) \\ &= |-1|^{1/2}\exp\left(\frac{i}{2}\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(-1)\right) \\ &= 1\cdot\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) \\ &= i\,. \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$, $R > 0$ ja $\delta > 0$ (pieni). Merkitään

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\,, \\ I_2 &:= \int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i, R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\,. \end{aligned}$$

Janalla $|\gamma_{[\varepsilon+\delta i,R+\delta i]}|$ pätee $z = x + \delta i$, $\varepsilon \le x \le R$, joten

$$I_1 = \int_\varepsilon^R \frac{dx}{f(x+\delta i)(x+4+\delta i)}\,.$$

Kun $\delta \to 0$, niin $x + 4 + \delta i \to x + 4$. Lisäksi

$$\begin{aligned} f(x+\delta i) &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(x+\delta i)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\ln|x+\delta i| + \frac{i}{2}\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(x+\delta i)\right)\,. \end{aligned}$$

Kun $\delta \to 0$, niin $\ln|x+\delta i| \to \ln x$ ja $\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(x+\delta i) \to 0$. Siis

$$f(x+\delta i) \to \exp\left(\frac{1}{2}\ln x\right) = \sqrt{x},\ \text{kun } \delta \to 0\,.$$

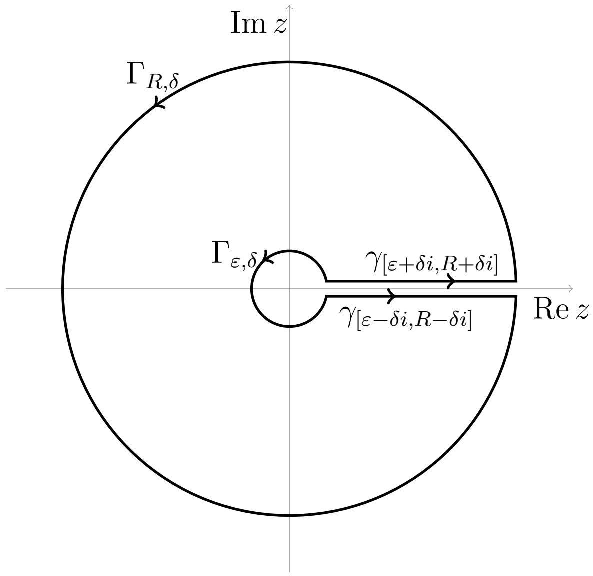
Siis

$$\lim_{\delta\to 0} I_1 = \lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} = \int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Lisäksi

$$I_2 = \int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i, R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} = \int_\varepsilon^R \frac{dx}{f(x-\delta i)(x+4-\delta i)}\,.$$

KUVA 1. Integroimispolku



Kun $\delta \to 0$, niin $x+4-\delta i \to x+4$. Toisaalta

$$\begin{aligned} f(x-\delta i) &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(x-\delta i)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\Big(\ln|x-\delta i| + i\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(x-\delta i)\Big)\right). \end{aligned}$$

Kun $\delta \to 0$, niin $\ln|x-\delta i| \to \ln x$, mutta $\operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(x-\delta i) \to 2\pi$ (eikä 0). Siis

$$f(x-\delta i) \to \exp\left(\frac{1}{2}(\ln x + i2\pi)\right) = \sqrt{x}\exp(\pi i) = -\sqrt{x}\,,$$

kun $\delta \to 0$.
Huomaa: Kun $z \to x$ ylemmältä puolitasolta, niin $f(z) \to \sqrt{x}$ ja kun $z \to x$ alemmalta puolitasolta, niin $f(z) \to -\sqrt{x}$. Siis

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i,R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(z)(z+4)}$ "branch cut"on $[0,\infty)$ ja erillinen erikoispiste on $z=-4$. Merkitään (kts. Kuva 1)

$$\gamma = \gamma_{[\varepsilon+\delta i,R+\delta i]} * \Gamma_{R,\delta} * \overleftarrow{\gamma}_{[\varepsilon-\delta i,R-\delta i]} * \overleftarrow{\Gamma}_{\varepsilon,\delta}$$

Polun γ jälki $|\gamma|$ kiertää pisteen $z=-4$ ($R \gg 4$) ja välttää puolisuoran $[0,\infty)$. Siis

$$\int_\gamma \frac{dz}{f(z)(z+4)} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{f(z)(z+4)}, -4\right).$$

Funktio f on analyyttinen pisteessä $z=-4$ ja $f(-4) \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(-4) &= \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}_{(0,2\pi]}(-4)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\ln|-4| + \frac{1}{2} i \operatorname{Arg}_{(0,2\pi]}(-4)\right) \\ &= \exp\left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2i\,. \end{aligned}$$

Koska funktiolla $z \mapsto \frac{1}{f(z)(z+4)}$ on ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä $z=-4$, niin

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f(z)(z+4)}, -4\right) = \lim_{z\to -4} \frac{z+4}{f(z)(z+4)} = \frac{1}{2i}\,.$$

Siis

$$\int_\gamma \frac{dz}{f(z)(z+4)} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi\,.$$

Nyt tulopolun määritelmästä seuraa

$$\int_{\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} + \int_{\Gamma_{R,\delta}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} - \int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i, R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} + \int_{\overleftarrow{\Gamma}_{\varepsilon,\delta}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} = \pi\,.$$

Jos nyt $\delta \to 0$, niin osoitimme jo, että

$$\int_{\gamma_{[\varepsilon+\delta i, R+\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} \to \int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,,$$

ja

$$\int_{\gamma_{[\varepsilon-\delta i, R-\delta i]}} \frac{dz}{f(z)(z+4)} \to -\int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Lisäksi $\Gamma_{R,\delta} \to \Gamma_R$, $\Gamma_{\varepsilon,\delta} \to \Gamma_\varepsilon$, kun $\delta \to 0$. Tässä $\Gamma_R : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_R(t) = R\exp(it)$ ja $\Gamma_\varepsilon : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\Gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon\exp(it)$.
Siis ottamalla raja $\delta \to 0$ saadaan

$$\pi = 2\int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{f(z)(z+4)} + \int_{\overleftarrow{\Gamma}_\varepsilon} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\,.$$

Kun $z \in |\Gamma_R|$, niin $|z| = R$ ja siis

$$R - 4 \le |z+4| \le R+4\,,$$

ja $|f(z)| = R^{1/2}$. Nyt Arviolemman nojalla

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\right| \le \frac{2\pi R}{\sqrt{R}(R-4)} = \frac{2\pi}{\sqrt{R}(1-\frac{4}{R})} \to 0\,,$$

kun $R \to \infty$.
Kun $z \in |\Gamma_\varepsilon|$, niin $|z| = \varepsilon$ ja

$$4 - \varepsilon \le |z+4| \le 4 + \varepsilon\,,$$

ja $|f(z)| = \varepsilon^{1/2}$. Siis

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz}{f(z)(z+4)}\right| \le \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}(4-\varepsilon)} = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{4-\varepsilon} \to 0\,,$$

kun $\varepsilon \to 0$. Siis

$$\pi = 2\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}\,.$$

Näin ollen lopullinen tulos on

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

10. Suorakaiteen reuna polun jälkenä

10.1. **Esimerkki.** Tyyppiesimerkki

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Merkitään

$$\Gamma_1 := \gamma_{[-x_1,x_2]}, \qquad \Gamma_2 := \gamma_{[x_2,x_2+2\pi i]},$$
$$\Gamma_3 := \gamma_{[-x_1+2\pi i,x_2+2\pi i]}, \qquad \Gamma_4 := \gamma_{[-x_1,-x_1+2\pi i]}.$$

Tällöin tulopolku $\Gamma := \Gamma_1 * \Gamma_2 * \overleftarrow{\Gamma}_3 * \overleftarrow{\Gamma}_4$ on suljettu, suorakaiteen muotoinen ja sen kiertosuunta on vastapäivään.
Kun $z \in |\Gamma_3|$, niin $z = -t + 2\pi i$, $-x_2 \le t \le x_1$

$$\begin{aligned}
\int_{\overleftarrow{\Gamma}_3} \frac{\exp(\alpha z)}{\phi(\exp(z))}\,dz &= \int_{-x_2}^{x_1} \frac{\exp(\alpha(-t+2\pi i))}{\phi(\exp(-t+2\pi i))}(-1)\,dt \\
&= \int_{-x_2}^{x_1} \frac{\exp(-\alpha t + 2\pi i\alpha)}{\phi(e^{-t})}(-1)\,dt \\
&= \exp(2\pi i\alpha)\int_{x_1}^{-x_2} \frac{e^{-\alpha t}}{\phi(e^{-t})}\,dt \\
&\overset{t=-x}{=} -\exp(2\pi i\alpha)\int_{-x_1}^{x_2} \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Jos funktiolle ϕ pätee

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\exp(\alpha z)}{\phi(\exp(z))}\,dz \to 0\,,$$

kun $x_1, x_2 \to \infty$, $k = 2, 4$, saamme

$$(1-\exp(2\pi i\alpha))\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{\exp(\alpha z)}{\phi(\exp(z))}; z_k\right)\,,$$

missä $z_1, \ldots, z_p$ ovat suorien $\operatorname{Im} z = 0$ ja $\operatorname{Im} z = 2\pi$ välissä sijaitsevat funktion f navat. Syy:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\overleftarrow{\Gamma_4}} f(z)\,dz + \int_{-x_1}^{x_2} \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\,dx + (-\exp(2\pi i\alpha))\int_{-x_1}^{x_2} \frac{e^{\alpha x}}{\phi(e^x)}\,dx\,.$$

10.2. *Huomautus.* Funktion käyttäytymisen suljetulla polulla (suljetun polun jäljellä) suuressa määrin kontrolloi erilliset erikoispisteet polun jäljen rajaaman alueen sisällä.

10.3. **Esimerkki.** Määrää

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{2x}+1}\,dx, \quad 0 < \alpha < 1\,.$$

Integrandilla on suorien $\operatorname{Im} z = 0$ ja $\operatorname{Im} z = 2\pi$ välissä singulariteetit pisteissä $i\frac{\pi}{2}$ ja $3i\frac{\pi}{2}$. Residyt näissä pisteissä ovat

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{\exp(\alpha z)}{\exp(2z)+1}, i\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z\to i\pi/2} (z - i\pi/2)\frac{\exp(\alpha z)}{\exp(2z)+1} \\
&= \lim_{z\to i\pi/2} \frac{\exp(\alpha z) + (z-i\pi/2)\alpha\exp(\alpha z)}{2\exp(2z)} \\
&\overset{L'H}{=} -\frac{1}{2}\exp\left(\alpha i\frac{\pi}{2}\right)\,, \\
\operatorname{Res}\left(\frac{\exp(\alpha z)}{\exp(2z)+1}, i\frac{3\pi}{2}\right) &= \lim_{z\to i3\pi/2} (z - i3\pi/2)\frac{\exp(\alpha z)}{\exp(2z)+1} \\
&= \lim_{z\to i3\pi/2} \frac{\exp(\alpha z) + (z-i3\pi/2)\alpha\exp(\alpha z)}{2\exp(2z)} \\
&\overset{L'H}{=} -\frac{1}{2}\exp\left(3i\frac{\pi\alpha}{2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi i\alpha)}\left(-\frac{1}{2}\exp\left(i\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{3\pi\alpha}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{2}}\,.
\end{aligned}$$

11. Argumentin periaate

Perusajatus residylaskennan taustalla on, että funktion erilliset erikoispisteet suljetun polun γ jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä määräävät suuressa määrin funktion käyttäytymisen polun jäljellä. Toisaalta myös funktion käyttäytyminen suljetun polun jäljellä auttaa selvittämään funktion singulariteettien ja nollakohtien lukumäärän polun jäljen rajaaman alueen sisällä. *Argumentin periaatteen* mukaan analyyttisen funktion f nollakohtien lukumäärä suljetun polun jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä on yhtä suuri kuin polun $f \circ \gamma$ kierrosluku origon suhteen. Olkoon γ suljettu yksinkertainen polku, joka kiertää kerran positiiviseen kiertosuuntaan. Olkoon f analyyttinen funktio mahdollisesti lukuunottamatta äärellistä määrää singulariteetteja jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Oletetaan, että tunnetaan funktion f arvot polulla, muttei polun jäljen rajaaman alueen sisällä.
Kysymys: Voimmeko tietää jotain funktion f käyttäytymisestä jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, jos tiedämme funktion käyttäytymisen alueen reunalla?
Muistutus: Jos tiedämme, että funktiolla f ei ole singulariteetteja jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, ja $\gamma(t) = z_0 + R\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, niin Cauchyn integraalikaavan mukaan

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1}\, \mathrm{d}z \quad \forall z_1 \in \mathbb{D}(z_0, R).$$

Tämän perusteella emme kuitenkaan helposti saa selville kuinka monta nollakohtaa tai singulariteettia funktiolla f on jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Esimerkiksi nollakohtien löytämiseksi pitäisi määrätä z_1 siten, että

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1}\, \mathrm{d}z = 0.$$

Muistutus: Jos funktiolla f ei ole singulariteetteja jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, niin

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

Siis, jos

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z \neq 0,$$

niin funktiolla on ainakin yksi singulariteetti jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Lisäksi, jos funktiolla f on äärellinen määrä singulariteetteja z_k, $k = 1, \dots, p$, jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, niin residylauseen perusteella voimme määrätä funktion f residyjen summan

$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}(f(z); z_k)$. Emme kuitenkaan näytä saavan tietoa singulariteettien tai nollakohtien lukumäärästä.

Tarkastellaan funktiota $f'(z)/f(z)$, ja etsitään sen singulariteetit ja niiden residyt. Tällä funktiolla voi olla singulariteetti pisteessä z_0 kahdesta eri syystä:

(1) jos $f(z_0) = 0$ tai
(2) jos funktiolla $f(z)$ ja siten myös funktiolla $f'(z)$ on singulariteetti pisteessä z_0.

Jos funktio f on analyyttinen pisteessä z_0 ja $f(z_0) \neq 0$, niin $f'(z)/f(z)$ on analyyttinen pisteessä z_0 eikä siinä ole singulariteettia. Siis funktion f'/f singulariteetit ovat funktion f nollakohdissa tai singulariteeteissa.

Määrätään funktion f'/f residyt. Olkoon funktiolla $f(z)$ kertalukua m oleva nollakohta pisteessä z_0, jolloin $f(z) = (z - z_0)^m \psi(z)$, jossa funktio ψ on kompleksisesti derivoituva pisteen z_0 ympäristössä ja $\psi(z_0) \neq 0$. Tällöin myös $f'(z) = m\,(z - z_0)^{m-1} \psi(z) + (z - z_0)^m \psi'(z)$, joten funktiolla $f'(z)$ on kertalukua $m - 1$ oleva nollakohta pisteessä z_0. Siis funktiolla f'/f on yksinkertainen napa pisteessä z_0. Residy tässä pisteessä on

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)(z - z_0)}{f(z)} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{m\,(z - z_0)^m \psi(z) + (z - z_0)^{m+1} \psi'(z)}{(z - z_0)^m \psi(z)} \\
&= \lim_{z \to z_0} m + (z - z_0)\,\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = m.
\end{aligned}$$

Funktion f'/f residy pisteessä z_0 on yhtä suuri kuin funktion f pisteessä z_0 olevan nollakohdan kertaluku.

Olkoon funktiolla f nyt kertalukua m oleva napa pisteessä z_0, jolloin $f(z) = (z - z_0)^{-m} \varphi(z)$, jossa funktio φ on kompleksisesti derivoituva pisteen z_0 ympäristössä ja $\varphi(z_0) \neq 0$. Tällöin pätee myös $f'(z) = -m\,(z - z_0)^{-(m+1)} \varphi(z) + (z - z_0)^{-m} \varphi'(z)$, joten funktiolla $f'(z)$ on kertalukua $m + 1$ oleva napa pisteessä z_0. Siis funktiolla f'/f on yksinkertainen napa pisteessä z_0. Residy tässä pisteessä on

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; z_0\right) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)(z - z_0)}{f(z)} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{-m\,(z - z_0)^{-m} \varphi(z) + (z - z_0)^{-(m-1)} \varphi'(z)}{(z - z_0)^{-m} \varphi(z)} \\
&= \lim_{z \to z_0} -m + (z - z_0)\,\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = -m.
\end{aligned}$$

Funktion f'/f residy pisteessä z_0 on yhtä suuri kuin funktion f pisteessä z_0 olevan navan kertaluvun vastaluku.
Poistuvat erikoispisteet ovat napoja, joiden kertaluku on 0 eikä niillä ole residyjä. Jos funktiolla f ei ole oleellisia erillisiä erikoispisteitä jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, niin residylauseen nojalla

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i(Z-P) \iff (Z-P) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z,$$

jossa Z on funktion f **nollakohtien** lukumäärä jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä ja P on funktion f **napojen** lukumäärä jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Molemmat luvut lasketaan kertaluku huomioiden, eli esimerkiksi kertalukua m oleva napa tai nollakohta lasketaan m kertaa.

11.1. *Huomautus.* Jos merkitään $\omega = f(z)$, $\mathrm{d}\omega = f'(z)\,\mathrm{d}z$, niin $\omega \in |f\circ\gamma|$ kun $z \in |\gamma|$ ja

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}.$$

Koska polku γ on suljettu, myös polku $f\circ\gamma$ on suljettu. Funktiolla $1/\omega$ on yksinkertainen napa origossa ja sen residy on 1, joten residylauseen avulla saadaan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = n(f\circ\gamma; 0).$$

11.2. **Argumentin periaate.** Olkoon $|\gamma|$ yksinkertaisen positiivisesti suunnistetun suljetun polun γ jälki. Olkoon funktio f analyyttinen alueessa, johon $|\gamma|$ ja jäljen $|\gamma|$ rajaama alue kuuluvat, lukuunottamatta äärellistä määrää napoja ja nollakohtia jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Oletetaan, että funktiolla f ei ole nollakohtia polun γ jäljellä. Tällöin

$$(Z-P) = n(f\circ\gamma; 0),$$

jossa Z on funktion f nollakohtien lukumäärä (laskettuna kertalukuina) jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä, P on funktion f napojen lukumäärä (laskettuna kertalukuina) jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä ja $n(f\circ\gamma; 0)$ on polun $f\circ\gamma$ kierrosluku origon suhteen.

11.3. **Esimerkki.** Funktio $f : z \mapsto z^5$ on analyyttinen koko kompleksitasossa ja sillä on kertalukua 5 oleva nollakohta origossa, mutta ei yhtään singulariteettia. Olkoon $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$, jolloin funktiolla f on jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä 5 nollakohtaa ja 0 napaa. Toisaalta $(f\circ\gamma)(t) = \exp(5it)$, joten polku $f\circ\gamma$ kiertää origon 5 kertaa positiiviseen kiertosuuntaan, eli $n(f\circ\gamma; 0) = 25$.

11.4. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = z^5 + 2$ ja $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$. Funktiolla f on viisi nollakohtaa z_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$f(z) = 0 \iff z^5 = -2 \iff z_k = |-2|^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{\pi + 2ki\pi}{5})$$

$$z_0 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{i\pi}{5}) \qquad z_1 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{3i\pi}{5}) \qquad z_2 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(i\pi)$$
$$z_3 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{7i\pi}{5}) \qquad z_4 = 2^{\frac{1}{5}} \exp(\frac{9i\pi}{5}).$$

Nollakohdat z_k ovat kuitenkin jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen ulkopuolella, joten funktiolla f ei ole nollakohtia tai napoja jäljen $|\gamma|$ rajaaman alueen sisällä. Koska $(f \circ \gamma)(t) = \exp(5it) + 2$, polku $f \circ \gamma$ on 2-keskeisen 1-säteisen ympyrän kehä kierrettynä 5 kertaa positiiviseen kiertosuuntaan. Siis $f \circ \gamma$ ei kierrä origoa, joten $n(f \circ \gamma; 0) = 0$.

12. Argumentin periaate ...

12.1. **Esimerkki.** Olkoon $\gamma : t \mapsto \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$ ja olkoon

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^5}.$$

Tällöin funktiolla f on 5-kertainen napa origossa ja ei nollakohtia. Tällöin nollakohtien lukumäärän ja napojen lukumäärän (kertaluku huomioituna) erotus on $0 - 5 = 5$. Lisäksi

$$(f \circ \gamma)(\theta) = \exp(-i5\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Siis polku $f \circ \gamma$ kiertää origon kellon kiertosuuntaan 5 kertaa ja siis $\mathrm{n}(f \circ \gamma, 0) = -5$, aivan kuten pitääkin Argumentin periaatteen nojalla.

12.2. *Huomautus.* Voimme siis laskea nollakohtien lukumäärän ja napojen lukumäärän erotuksen. Kysymys: Saako nollakohtien lukumäärän suoraan?

12.3. **Esimerkki.** Olkoon $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$. Olkoot $f(z) = 1$ ja

$$g(z) = \frac{z + 10^{-4}}{z}.$$

Tällöin funktiolla f ei ole nollakohtia eikä napoja. Funktiolla g on yksinkertainen napa origossa ja yksinkertainen nollakohta pisteessä $z = -10^{-4}$. Kuitenkin $f \approx g$ polun γ jäljellä.

12.4. *Huomautus.* Olkoon $f : z \mapsto z^2$. Tällöin funktiolla f on kaksinkertainen nollakohta origossa. Olkoon $g : z \mapsto z(z + 10^{-4})$. Tällöin funktiolla g on 2 erillistä nollakohtaa: origossa kertalukua 1 oleva nollakohta ja pisteessä $z = -10^{-4}$ kertalukua 1 oleva nollakohta. Siis aina on katsottava nollakohdan ja/tai navan kertaluku!

12.5. *Huomautus.* Hyvin heikko vastine reaalianalyysissä: Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos $f(a)$ ja $f(b)$ ovat eri merkkiset, niin funktiolla f on olemassa ainakin yksi nollakohta välillä $[a,b]$.

13. Rouchen lause

Johdantoa: Olkoon $f : z \mapsto z^5 + z + 1$ ja olkoon $\gamma(t) = 2\exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$. Kysymys: Kuinka monta nollakohtaa funktiolla f on kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$? Nyt

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = 2^5 \exp(5it) + 2\exp(it) + 1\,,$$

$0 \le t \le 2\pi$. Koska funktiolla f ei ole napoja, niin Argumentin periaatteen nojalla nollakohtien lukumäärä kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$ on yhtä suuri kuin $\mathrm{n}(f \circ \gamma, 0)$.
Merkitään

$$\Gamma_1(t) = 2^5 \exp(i5t), \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Polku Γ_1 kiertää origon 5 kertaa positiiviseen kiertosuuntaan. Merkitään $\Gamma = f \circ \gamma$. Nyt

$$\begin{aligned}|\Gamma_1(t) - \Gamma(t)| &= |2^5 \exp(i5t) - 2^5 \exp(i5t) - 2\exp(it) - 1| \\ &\le 1 + 2 = 3 \ll 2^5\,.\end{aligned}$$

Siis Γ kulkee origon ympäri 5 kertaa ja Γ on hyvin lähellä polkua Γ_1, joten voisi luulla, että Γ kiertää origon 5 kertaa positiiviseen kiertosuuntaan (tämä todistetaan Rouchen lauseessa). Silloin Argumentin periaatteen nojalla funktiolla f olisi 5 nollakohtaa kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$. Siis funktiolla $g : z \mapsto z^5$ ja $f : z \mapsto z^5 + z + 1$ on sama määrä nollakohtia kiekossa $\mathbb{D}(0,2)$, koska

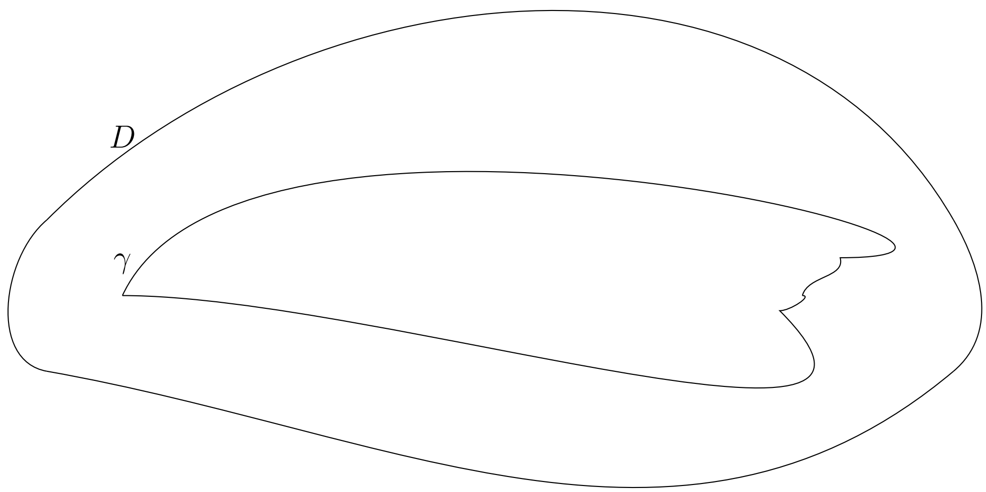
$$|g(z) - f(z)| = |z + 1| \ll |g(|z| = 2)|\,.$$

13.1. **Rouchen lause.** (Eugène Rouché, 1832-1910) Olkoon $|\gamma|$ positiivisesti suunnistetun yksinkertaisen suljetun polun γ jälki. Olkoon f ja g analyyttisiä alueessa D johon polun γ jälki ja jäljen rajaama alue kuuluvat (Kuva 1).
Jos

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{kaikilla } z \in |\gamma|\,,$$

niin funktioilla f ja g on sama määrä nollakohtia polun γ jäljen rajaaman alueen sisällä.

KUVA 2. (Rouchen lause) Alue D, joka sisältää polun γ jäljen ja polun γ rajaaman alueen.



13.2. *Huomautus.* Rouchen lauseen perusteella saadaan selville "monimutkaisenkin"funktion f nollakohtien lukumäärän suljetun polun rajaaman alueen sisällä, jos osaamme approksimoida funktiota f yksinkertaisemmalla funktiolla g, jonka nollakohtien lukumäärä tiedetään. Yksi tapa löytää g on muodostaa g niistä funktion f termeistä, jotka dominoivat polun γ jäljellä.

13.3. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = z^4 - 8z + 10$. Kysymys: Kuinka monta nollakohtaa funktiolla f on avoimessa yksikkökiekossa $\mathbb{D}(0,1)$?
Ratkaisuehdotus: Kehällä $\partial\mathbb{D}(0,1)$

$$|z^4| = 1, \quad |-8z| = 8, \quad |10| = 10\,.$$

Siis 10 on funktion f osa, joka dominoi, kun $|z| = 1$. Merkitään $g(z) = 10$. Silloin

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |z^4 - 8z + 10 - 10| \\ &\le 1 + 8 < 10 = |g(z)| \quad \forall z, |z| = 1\,. \end{aligned}$$

Siis Rouchen lauseen nojalla funktion f nollakohtien lukumäärä avoimessa yksikkökiekossa on sama kuin funktion g nollakohtien lukumäärä, mutta funktiolla g ei ole nollakohtia, joten funktiolla f ei ole nollakohtia kiekossa $\mathbb{D}(0,1)$.

13.4. *Huomautus.* Joskus ei ole selvää, kuinka Rouchen lausetta voisi käyttää. Esimerkiksi, kun $f : z \mapsto z^4 + z + 1$, $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$. Nyt mikään yksittäinen termi z^4, z tai 1 ei dominoi funktiota f, eivätkä edes kombinaatiot, kuten $z^4 + z$. Tällöin on käytettävä suoraan Argumentin periaatetta.
Todistetaan nyt Algebran peruslause Rouchen lauseen avulla. Toinen todistustapa on esitetty kurssilla Kompleksianalyysi I.

13.5. **Algebran peruslause.** Jokaisella n-asteisella polynomilla on tarkalleen n nollakohtaa (m-kertainen nollakohta lasketaan m kertaa).

Todistus. Merkitään

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \,,$$

missä $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n-1$.
Lasketaan nollakohtien lukumäärä avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(0,R)$, missä R suuri, ja otetaan sitten raja $R \to \infty$.
Jos R on kyllin suuri, niin funktiota P voidaan approksimoida funktiolla $G(z) = a_n z^n$, jolloin

$$|P(z) - G(z)| < |G(z)| \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}(0,R)\,.$$

Perustelu: kun $z \in \partial\mathbb{D}(0,R)$, niin $|G(z)| = |a_n| R^n$ ja

$$\begin{aligned} |P(z) - G(z)| &= |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0| \\ &\le |a_{n-1}| R^{n-1} + \ldots + |a_0|\,. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\frac{|a_{n-1}|R^{n-1} + \ldots + |a_0|}{|a_n| R^n} \to 0, \qquad \text{kun } R \to \infty\,.$$

Siis kun R on kyllin suuri, niin $|a_{n-1}|R^{n-1} + \ldots + |a_0| < |a_n|R^n$ eli $|P(z) - G(z)| < |G(z)|$ kaikilla $|z| = R$. Siis polynomeilla P ja G on yhtä monta nollakohtaa avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(0,R)$. Selvästi polynomilla $G(z)$ on origossa n-kertainen nollakohta ja muita nollakohtia ei ole. Siis polynomilla $P(z)$ on myös n nollakohtaa avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(0,R)$, kun R kyllin suuri.
Kun annetaan $R \to \infty$, niin väite seuraa. $\square$

14. Rouchen lauseen sovelluksia

Rouchen lauseen todistus

14.1. **Rouchen lause.** Olkoon $|\gamma|$ positiivisesti suunnistetun yksinkertaisen suljetun polun γ jälki. Olkoot f ja g analyyttisiä alueessa D, johon polun jälki ja jäljen rajaama alue kuuluvat. Jos

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in |\gamma|,$$

niin funktioilla f ja g on sama määrä nollakohtia polun γ jäljen rajaaman alueen sisällä.

Todistus. Argumentin periaatteen mukaan funktion f nollakohtien lukumäärä jäljen $|\gamma|$ rajaamassa alueessa on

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Vastaavasti funktion g nollakohtien lukumäärä jäljen $|\gamma|$ rajaamassa alueessa on

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Havaitaan, että

$$\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f(z)g'(z) - g(z)f'(z)}{f(z)g(z)} = \frac{(g(z)/f(z))'}{(g(z)/f(z))}.$$

Merkitään $\varphi(z) = g(z)/f(z)$. Nyt funktioiden f ja g analyyttisyyden perusteella myös funktio φ on analyyttinen jäljen $|\gamma|$ ympäristössä. Jos $z \in |\gamma|$, niin

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| = \left|\frac{g(z) - f(z)}{f(z)}\right| < 1,$$

koska oletuksen mukaan $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ kaikilla $z \in |\gamma|$. Siis polku $(g/f) \circ \gamma$ ei kierrä origoa, joten $n(((g/f) \circ \gamma)(z); 0) = 0$. Tällöin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(g(z)/f(z))'}{(g(z)/f(z))}\,\mathrm{d}z = 0,$$

mistä väite seuraa. □

14.2. **Korollaari.** *Olkoot f ja g analyyttisiä funktioita suljetun kiekon $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ ympäristössä. Jos*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z) - a| \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r),$$

niin f ja g saavat arvon $a \in \mathbb{C}$ yhtä monta kertaa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$.

Todistus. Sovelletaan Rouchen teoreemaa. Valitaan polun γ jäljeksi $|\gamma| = \partial^+\mathbb{D}(z_0, r)$. Määritellään funktiot $h_1(z) = f(z) - a$ ja $h_2 = g(z) - a$. Tällöin

$$|f(z) - a - (g(z) - a)| = |h_1(z) - h_2(z)| = |f(z) - g(z)| < |f(z) - a|$$

kaikilla $z \in \partial^+\mathbb{D}(z_0, r)$. $\square$

Seuraava avoimen kuvauksen lause on lause on tärkeä.
Muistutus: Kuvaus f on avoin, kun se kuvaa avoimen joukon avoimeksi joukoksi.

14.3. **Avoimen kuvauksen lause (open mapping theorem).** Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Jos $f : D \to \mathbb{C}$ on analyyttinen kuvaus, joka ei ole vakio, niin kuvaus f on avoin.

Todistus. Olkoon $z_0 \in D$ mielivaltaisesti valittu kiinnitetty piste. Osoitetaan, että $f(D)$ sisältää avoimen kiekon, jonka keskipiste on $\omega_0 = f(z_0)$.
Koska f on analyyttinen funktio, joka ei ole vakiofunktio, niin jokaisen pisteen alkukuva on diskreetti. Voidaan valita $r > 0$ siten, että $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset D$ ja $f(z) \neq f(z_0)$, kun $z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Merkitään $\delta = \inf\{|f(z) - \omega_0| : z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)\}$, jolloin $\delta > 0$. Olkoon lisäksi $|\omega_0 - \omega| < \delta/2$.
Soveltamalla edellistä korollaaria funktioihin $f(z)$ ja $g(z) = f(z) + \omega_0 - \omega$ sekä kiekkoon $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ havaitaan, että funktiot f ja g saavat arvon ω_0 yhtä monta kertaa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$. Erityisesti siis funktio g saa arvon ω_0 ainakin kerran, koska $f(z_0) = \omega_0$.
Valitaan piste $u \in \mathbb{D}(z_0, r)$ siten, että $g(u) = \omega_0$. Silloin $g(u) = \omega_0 = f(u) + \omega_0 - \omega$, eli $f(u) = \omega$. Siis funktio f saa arvon ω ainakin kerran kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$. Väite seuraa, koska piste z_0 oli mielivaltaisesti valittu. $\square$

14.4. **Korollaari.** *Analyyttinen kuvaus f, joka ei ole vakio, kuvaa alueen alueeksi.*

Todistus. Alue on avoin ja yhtenäinen joukko. Edellisen lauseen perusteella tiedämme, että f on avoin. Topologiasta taas tiedämme, että jatkuva kuvaus kuvaa yhtenäisen joukon yhtenäiseksi joukoksi. Koska f on analyyttinen kuvaus, se on jatkuva. Siis f kuvaa avoimen ja yhtenäisen joukon avoimeksi ja yhtenäiseksi joukoksi. $\square$

14.5. **Esimerkki.** Jos funktio f ei ole analyyttinen, sen antama kuva avoimesta joukosta ei välttämättä ole avoin. Merkitään $z = x + iy$,

$x, y \in \mathbb{R}$, ja tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x+iy) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ iy & x > 0. \end{cases}$$

Tällöin $f(\mathbb{D}(2,1)) = (-i, i)$, joka ei ole avoin alueessa $\mathbb{C}$.

Muistutus: Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ avoin. Funktiojono $(f_n(z))$ suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa A kohti funktiota $f(z)$, kun $n \to \infty$, jos $(f_n(z))$ suppenee pisteittäin kohti funktiota $f(z)$ ja suppeneminen on tasaista jokaisessa joukon A kompaktissa osajoukossa.

14.6. **Hurwitzin lause.** Olkoon D alue. Olkoot $f_n : D \to \mathbb{C}$ analyyttisiä kuvauksia kaikilla $n \in \mathbb{N}$ siten, että $f_n(z) \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, kun $z \in D$. Jos jono $(f_n(z))$ suppenee lokaalisti tasaisesti alueessa D kohti funktiota $f(z)$, niin silloin joko $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$ tai $f(z) \equiv 0$ kaikilla $z \in D$.

Todistus. Tasaisesta suppenemisesta seuraa, että rajafunktio $f(z)$ on analyyttinen. Oletetaan, että $f(z_0) = 0$ jollakin $z_0 \in D$. Osoitetaan, että tällöin $f(z) \equiv 0$ kaikilla $z \in D$.
Vastaoletus: Piste z_0 on erillinen nollakohta.
Siis on olemassa $r > 0$ siten, että $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset D$ ja $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Silloin $|f(z)|$ saa positiivisen minimiarvon kiekon $\mathbb{D}(z_0, r)$ reunalla. Koska jono $(f_n(z))$ suppenee kohti funktiota $f(z)$ tasaisesti reunalla $\partial\mathbb{D}(z_0, r)$, niin on olemassa luku n_0 siten, että $|f_{n_0}(z) - f(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in \partial\mathbb{D}(z_0, r)$. Rouchen lauseen perusteella funktioilla f_{n_0} ja f on sama määrä nollakohtia kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$. Siis funktiolla f_{n_0} on ainakin yksi nollakohta kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$, mikä on ristiriidassa oletuksen $f_n(z) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ kanssa. $\square$

14.7. **Esimerkki.** Hurwitzin lauseen kumpikin väite on mahdollinen. Tarkastellaan funktioita $f_n(z) = z$ alueessa $A = \mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\}$. Selvästi jono $(f_n(z))$ suppenee kohti funktiota $f(z) = z$ lokaalisti tasaisesti alueessa A, ja $f(z) \neq 0$, kun $z \in A$.
Tarkastellaan nyt funktioita $g_n(z) = z/n$ alueessa $B = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin $g_n \to 0$ lokaalisti tasaisesti alueessa B, kun $n \to \infty$. Siis rajafunktiolle g pätee $g(z) = 0$.
Tarkastellaan vielä funktioita $h_n(z) = z^n$ alueessa $A = \mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\}$. Olkoon $K \subset A$ kompakti joukko. Tällöin $K \subset \mathbb{D}(0,r) \setminus \{0\}$ jollain $0 < r < 1$, ja siten $|h_n(z)| \leq r^n$ $\forall z \in K$. Siis $h_n(z) \to 0$ tasaisesti alueessa K, kun $n \to \infty$. Koska $K \subset A$ oli mielivaltaisesti valittu kompakti joukko, niin $h_n(z) \to h(z) = 0$ lokaalisti tasaisesti alueessa A, kun $n \to \infty$.

14.8. **Lause.** *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Olkoot funktiot $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, analyyttisiä injektioita. Jos $f_n \to f$ lokaalisti tasaisesti alueessa D, niin silloin f on joko vakiokuvaus tai injektio alueessa D.*

Todistus. Oletetaan, että f ei ole vakiokuvaus. Valitaan mielivaltaisesti piste $z_0 \in D$. Silloin kuvaus $f(z) - f(z_0)$ ei ole vakiokuvaus alueessa $D \setminus \{z_0\}$ ja $f(z) - f(z_0)$ on raja lokaalisti tasaisesti suppenevalle jonolle $(f_n(z) - f_n(z_0))$ alueessa $D \setminus \{z_0\}$. Koska $f_n(z) - f_n(z_0) \neq 0$ alueessa $D \setminus \{z_0\}$, niin Hurwitzin lauseen perusteella $f(z) - f(z_0) \neq 0$ alueessa $D \setminus \{z_0\}$. Koska z_0 oli mielivaltaisesti valittu, funktio f on injektio alueessa D. $\square$

LOPPU.